Adquiera MyMathLab® en español con etext incluido

THOMAS

Decimotercera edición

CÁLCULO

Varias variables

ALWAYS LEARNING

PEARSON

FÓRMULAS BÁSICAS DE ÁLGEBRA

Operaciones aritméticas

$$a(b + c) = ab + ac, \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \qquad \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Leyes de los signos

$$-(-a) = a, \qquad \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Cero La división entre cero no está definida.

$$\text{Si } a \neq 0\text{:} \quad \frac{0}{a} = 0, \quad a^0 = 1, \quad 0^a = 0$$

$$\text{Para cualquier número } a\text{: } a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

Leyes de los exponentes

$$a^m a^n = a^{m+n}, \qquad (ab)^m = a^m b^m, \qquad (a^m)^n = a^{mn}, \qquad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Si $a \neq 0$,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \qquad a^0 = 1, \qquad a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

Teorema del binomio Para cualquier entero positivo n,

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{n-3}b^3 + \cdots + nab^{n-1} + b^n.$$

Por ejemplo,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \qquad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Factorización de la diferencia de potencias enteras iguales, $n > 1$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Por ejemplo,

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$
$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3).$$

Cómo completar un cuadrado

Si $a \neq 0$,

$$ax^2 + bx + c = au^2 + C \qquad \left(u = x + (b/2a),\ C = c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

La fórmula cuadrática

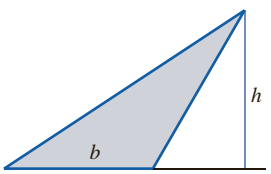
Si $a \neq 0$ y $ax^2 + bx + c = 0$, entonces,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

FÓRMULAS DE GEOMETRÍA

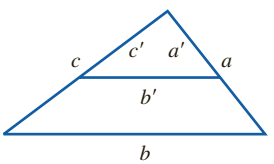
A = área, B = área de la base, C = circunferencia, S = área lateral o área de la superficie, V = volumen

Triángulo



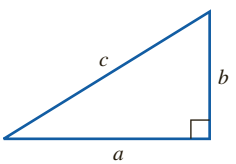
$$A = \frac{1}{2}bh$$

Triángulos semejantes



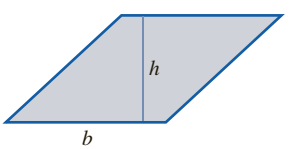
$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

Teorema de Pitágoras



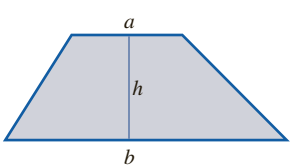
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Paralelogramo



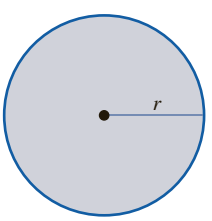
$$A = bh$$

Trapecio



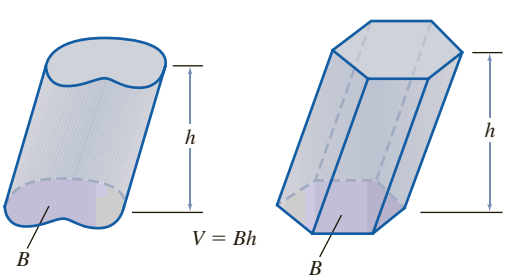
$$A = \frac{1}{2}(a + b)h$$

Círculo



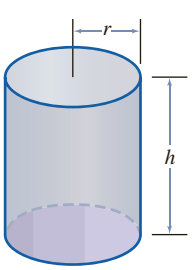
$$A = \pi r^2,$$
$$C = 2\pi r$$

Cualquier cilindro o prisma con bases paralelas



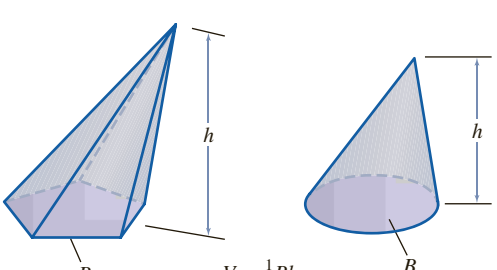
$$V = Bh$$

Cilindro circular recto



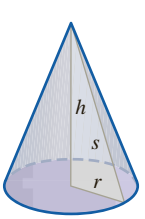
$$V = \pi r^2 h$$
$$S = 2\pi rh = \text{Área lateral}$$

Cualquier cono o pirámide



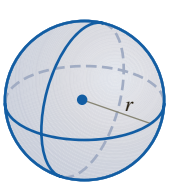
$$V = \tfrac{1}{3}Bh$$

Cono circular recto



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$
$$S = \pi rs = \text{Área lateral}$$

Esfera



$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$
$$S = 4\pi r^2$$

THOMAS

CÁLCULO

Varias variables

THOMAS

CÁLCULO

Varias variables

DECIMOTERCERA EDICIÓN

George B. Thomas, Jr.
Massachusetts Institute of Technology

REVISADA POR
Maurice D. Weir
Naval Postgraduate School

Joel Hass
University of California, Davis

CON LA COLABORACIÓN DE
Christopher Heil
Georgia Institute of Technology

TRADUCCIÓN
Ana Elizabeth García Hernández
Instituto Politécnico Nacional, México

REVISIÓN TÉCNICA
César Luis García García
Carlos Bosch Giral
Claudia Gómez Wulschner
Departamento de Matemáticas
Instituto Tecnológico Autónomo de México

PEARSON

Datos de catalogación bibliográfica

Thomas, George; Weir, Maurice D.;
Hass, Joel y Heil, Christopher

Thomas. Cálculo. Varias variables

Decimotercera edición
PEARSON EDUCACIÓN, México, 2015

ISBN: 978-607-32-3336-1
Área: Matemáticas

Formato: 21 × 27 cm Páginas: 544

Authorized translation from the English language edition entitled *Thomas' Calculus. Multivariable*, 13th Edition, by George B. Thomas, Jr., Maurice D. Weir, Joel Hass, Christopher Heil, published by Pearson Education, Inc., Copyright © 2014. All rights reserved.
ISBN 9780321884053

Traducción autorizada de la edición en idioma inglés titulada *Thomas' Calculus. Multivariable,* 13ª edición, por George B. Thomas, Jr., Maurice D. Weir, Joel Hass, Christopher Heil, publicada por Pearson Education, Inc., Copyright © 2014. Todos los derechos reservados.

Esta edición en español es la única autorizada.

Edición en español

Director General:	Sergio Fonseca Garza
Director de Contenidos y Servicios Digitales:	Alan David Palau
Editora Sponsor:	Rosa Díaz Sandoval e-mail: rosa.diaz@pearson.com
Editor de Desarrollo:	Bernardino Gutiérrez Hernández
Supervisor de Producción:	Enrique Trejo Hernández
Gerente de Contenidos Educación Superior:	Marisa de Anta

DECIMOTERCERA EDICIÓN, 2015

D.R. © 2015 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Antonio Dovalí Jaime núm. 70
Torre B, Piso 6, Colonia Zedec, Ed Plaza Santa Fe
Delegación Álvaro Obregón, C.P. 01210, México, D.F.

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. núm. 1031.

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

El préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar requerirá también la autorización del editor o de sus representantes.

ISBN: 978-607-32-3336-1
ISBN E-BOOK: 978-607-32-3339-2
ISBN E-CHAPTER: 978-607-32-3337-8

Impreso en México. *Printed in Mexico.*
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 18 17 16 15

PEARSON

www.pearsonenespañol.com

Agradecimientos

Nuestra gratitud para todos los profesores que han impartido la materia de *Cálculo* con el apoyo del presente libro. Sus valiosos comentarios han servido para enriquecer esta edición. En especial, deseamos agradecer el apoyo y la retroalimentación que nos han brindado los siguientes profesores:

ARGENTINA

Emilio Suárez
Instituto Tecnológico de Buenos Aires

Haydee Castelletti
Silvia Adriana Mamone
Universidad de Belgrano

Viviana Niselman
Universidad de Buenos Aires

Gladis Beatriz Astargo
Horacio Day
Universidad Nacional de Cuyo

Isabel Weinberg
Universidad Nacional de la Matanza

Ángela Maldonado
Augusto Melgarejo
Delicia Tisera
Diego Vallejo
José Suárez
Laura Langoni
María Inés Otegui
María Teresa Guardarucci
Mariel Lavaña
Mercedes Trípoli
Miguel Sanservino
Néstor Bucari
Universidad Nacional de la Plata

Angélica Arnulfo
Beatriz Introcaso
Emilio Sastre
José Botto
María Susana Montelar
Mónica Caserío
Universidad Nacional de Rosario
Elena Arlauskas
Gabriela Righetti
Universidad Tecnológica Nacional Regional Avellaneda

COLOMBIA

Bernardo Aldana Gómez
Néstor Raúl Pachón
Escuela Colombiana de Ingeniería-Bogotá

Elías Cardona
ICESI

Antonio Merchán
Fernando Novoa
Gerardo Tole
Héctor Linares
Irina Reyes
Ismael García
Jaime Gómez
Juan Carlos Quintero
Liliana Barreto
Moisés Aranda
Nazly Esmeralda Salas
Rafael Castro
Pontificia Universidad Javeriana

Laureano Valencia
Oswaldo Rodríguez Díaz
Universidad Autónoma de Occidente-Cali

Mario Bravo
Universidad de San Buenaventura-Cali

José Villada
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

CHILE

Juan Duarte
Universidad de Antofagasta

Clarita Balbontín
Universidad de los Andes

Julio Hugo Ramírez
Universidad de Viña del Mar

ECUADOR

Eduardo Alba
Universidad San Francisco de Quito

ESPAÑA

Nilo Carlos Bobillo Ares
Universidad de Oviedo

María Elena Vázquez Cendón
Universidad de Santiago de Compostela

Alberto García Cristóbal
Domingo Martínez García
Julio Pellicer Porres
Juan Francisco Sánchez Royo
Universitat de València

MÉXICO

María Elvira Guardiola Martínez
Centro de Enseñanza Técnica Industrial

Ernesto Tello Basurto
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Instituto Politécnico Nacional, Culhuacán

José Antonio Rodríguez Luna
Facultad de Estudios Superiores Aragón
Universidad Nacional Autónoma de México

Juan Manuel Calderón Cortés
José Luz Hernández Castillo
Iván Noé Mata Vargas
Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán
Universidad Nacional Autónoma de México

María Antonieta Araceli Reyes Guerrero
Instituto Tecnológico Autónomo de México

Humberto Hipólito García Díaz
María Guadalupe Lomelí Plascencia
Ma. Margarita Orozco Gómez
Instituto Tecnológico y de Estudios
Superiores de Monterrey
Campus Guadalajara

Lauro Ayala
Juan José Carracero
Dulce Hernández Méndez
Sithanntham Kanthimathinatan
Lucio López Cavazos
María Griselda Tapia Mercado
Instituto Tecnológico y de Estudios
Superiores de Monterrey
Campus Querétaro

Rogelio Morales
Lino Andrea Notarantonio
Instituto Tecnológico y de Estudios
Superiores de Monterrey
Campus Santa Fe

José Carlos Ahumada Flores
Óscar Vidal Arellano Tanori
Ricardo Betancourt Riera
José Jesús Cayetano Borquez Gamboa
Pedro Anuar Castellanos López
Lourdes Contreras Beltrán
Rosa Ahimé Corral Guerrero
Trinidad Corral Sandoval
Maximino Dorame Velázquez
Lázaro Alberto Ferrer Moreno
Benjamín Hernández Fimbres
Roxana Martínez Campusano
Gabriel Martínez Chávez
Hilario Mayboca Araujo
Alejandro Medellín Valdés
Francisco Medellín Valdés
Gloria Angélica Moreno Durazo
Dámaso Ochoa Landín
Carlos Alberto Pereyda Pierre
Julia Graciela Preciado León
Flor Ramírez Torres
Adolfo Rivera Castillo
Jesús Manuel Solís Santoscoy
Francisco Javier Zamora Aguirre
Instituto Tecnológico de Hermosillo

Ana María Aspeitia Arellano
Edgar Antonio Peña Domínguez
Jorge Armando Ramírez De la Torre
Instituto Tecnológico de La Laguna

Juan Manuel Araujo
Perfecto Barragán
Marco Antonio Cervantes Aguilar
José Escárcega Castellanos
Mirna Carolina Fuentes García
Alejandro García Blanco
Jorge Luis Gil Sevilla
Elizabeth González León
Francisca del Socorro González Peralta

Adriana Guerrero Martínez
Mireya Morales Corral
José Luis Porras Molina
Daniel Ramírez Zúñiga
Karina Reyes Lio
Enoch Robles Díaz
Raúl Gustavo Robles Montijo
Carlos Benigno Robles Verduzco
Rosalinda Ruiz Ibarra
Zindi Sánchez Hernández
Claudia Ericka Sánchez Martínez
Efrén Santini Durán
Marlene Smith
Israel Tarazón Acuña
Omar Velarde Anaya
Lourdes Villarino García
Andrea Alejandra Zabala Robles
Instituto Tecnológico de Nogales

Ángela Rebeca Garcés Rodríguez
Instituto Tecnológico de San Luis Potosí

Juan Francisco Meléndez Elizalde
Héctor Osorio Ramírez
Ciria Salinas López
Tecnológico de Estudios Superiores de Ecatepec

Arturo Hidalgo Aguilar
Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Ciencias Sociales y Administrativas
Instituto Politécnico Nacional

Prisciliano Aguilar
Félix Almendra Arao
Jorge Fernando Ángeles Islas
Iliana Cristina Carrillo Ibarra
Carlos Cruz
Fernando Estrada Oliva
Juan González García
Manuel González Sarabia
Rogelio Jiménez Fragoso
Igor Lashkevych
Marco Antonio Macías Cedeño
Pablo Mendoza Iturralde
Augusto Guadalupe Miss Paredes
Jorge Pérez Hernández
José Rubén Pérez Hernández
Marco Antonio Reyes Guzmán
Israel Reyes Ramírez
Fernando Vallejo Aguirre
Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas
Instituto Politécnico Nacional

Víctor Hugo Ibarra Mercado
Gerardo Maldonado
Enrique Zamora Gallardo
Universidad Anáhuac, México Norte

José Antonio Bohon Devars
Universidad Anáhuac, México Sur

Mario Mesino González
Universidad Autónoma de Guadalajara

Eduardo Castillo Montemayor
Magda Patricia Estrada Castillo
Homero Estrada Cortina
Vitaly Kalashnikov
Claudia Sánchez Vela
Universidad Autónoma de Nuevo León

María Eugenia Andreu Ibarra
Marina Salazar Antúnez
Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco

Maribel Fuentes Dávila
Patricia González Miranda
Ana María González Piña
María Cristina Ramírez Palacios
Ayax Santos Guevara
Juan Carlos Tudón Martínez
Universidad de Monterrey

Samuel Espinoza Guillén
Emma Lilia Fierros Pesqueira
Universidad Estatal de Sonora

Humberto Mondragón Suárez
Universidad Iberoamericana

Carlos Álvarez Maciel
Filiberto Mata Pérez
Rosalba Rodríguez Chávez
Francisco Javier Romero Andrade
José Rosillo Martínez
Guadalupe Silva Esparza
Tonatihu Valdez Hernández
Universidad Nacional Autónoma de México

Porfirio Rafael Pérez Cisneros
Universidad Tecnológica de la Zona Metropolitana de Guadalajara

Romualdo Guadalupe de la Cruz
Universidad Tecnológica de Tamaulipas, Norte

PERú

Luis Díaz Bazurco
Wilber Ramos Lovón
Universidad Católica de Santa María-Arequipa

José Cuevas González
Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas

VENEzu ELA

Elvira Sabal
Milagros Bosquetti
Universidad Católica Andrés Bello

Jesús Hernández
José Luis Quinteros
María de Armas
María Luisa Vonna
Marienma Sánchez
Universidad Central de Venezuela

Contenido

Prefacio xiii

11 Ecuaciones paramétricas y coordenadas polares 641

11.1 Parametrización de curvas planas 641
11.2 Cálculo con curvas paramétricas 649
11.3 Coordenadas polares 659
11.4 Gráficas de ecuaciones en coordenadas polares 663
11.5 Áreas y longitudes en coordenadas polares 667
11.6 Secciones cónicas 671
11.7 Secciones cónicas en coordenadas polares 680
Preguntas de repaso 687
Ejercicios de práctica 687
Ejercicios adicionales y avanzados 689
Proyectos de aplicación tecnológica 691

12 Vectores y geometría del espacio 692

12.1 Sistemas de coordenadas tridimensionales 692
12.2 Vectores 697
12.3 El producto punto 706
12.4 El producto cruz 714
12.5 Rectas y planos en el espacio 720
12.6 Cilindros y superficies cuádricas 728
Preguntas de repaso 733
Ejercicios de práctica 734
Ejercicios adicionales y avanzados 736
Proyectos de aplicación tecnológica 738

13 Funciones con valores vectoriales y movimiento en el espacio 739

13.1 Curvas en el espacio y sus tangentes 739
13.2 Integrales de funciones vectoriales; movimiento de proyectiles 747
13.3 Longitud de arco en el espacio 756
13.4 Curvatura y vectores normales de una curva 760
13.5 Componentes tangencial y normal de la aceleración 766
13.6 Velocidad y aceleración en coordenadas polares 772
Preguntas de repaso 776
Ejercicios de práctica 777
Ejercicios adicionales y avanzados 778
Proyectos de aplicación tecnológica 780

14 Derivadas parciales 781

14.1 Funciones de varias variables 781
14.2 Límites y continuidad en dimensiones superiores 789
14.3 Derivadas parciales 798
14.4 Regla de la cadena 809
14.5 Derivadas direccionales y vectores gradiente 818
14.6 Planos tangentes y diferenciales 827
14.7 Valores extremos y puntos silla 836
14.8 Multiplicadores de Lagrange 845
14.9 Fórmula de Taylor para dos variables 854
14.10 Derivadas parciales con variables restringidas 858
Preguntas de repaso 863
Ejercicios de práctica 864
Ejercicios adicionales y avanzados 867
Proyectos de aplicación tecnológica 869

15 Integrales múltiples 870

15.1 Integrales dobles e iteradas sobre rectángulos 870
15.2 Integrales dobles sobre regiones generales 875
15.3 Áreas por integración doble 884
15.4 Integrales dobles en forma polar 888
15.5 Integrales triples en coordenadas rectangulares 894
15.6 Momentos y centros de masa 903
15.7 Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas 910
15.8 Sustitución en integrales múltiples 922
Preguntas de repaso 932
Ejercicios de práctica 932
Ejercicios adicionales y avanzados 935
Proyectos para aplicación tecnológica 937

16 Integrales y campos vectoriales 938

16.1 Integrales de línea 938
16.2 Campos vectoriales e integrales de línea: trabajo, circulación y flujo 945
16.3 Independencia de la trayectoria, campos conservativos y funciones potenciales 957
16.4 Teorema de Green en el plano 968
16.5 Superficies y áreas 980
16.6 Integrales de superficie 991
16.7 Teorema de Stokes 1002
16.8 El teorema de la divergencia y una teoría unificada 1015
Preguntas de repaso 1027
Ejercicios de práctica 1028
Ejercicios adicionales y avanzados 1030
Proyectos de aplicación tecnológica 1032

17 Ecuaciones diferenciales de segundo orden 1033

17.1 Ecuaciones lineales de segundo orden 1033
17.2 Ecuaciones lineales no homogéneas 1039
17.3 Aplicaciones 1047
17.4 Ecuaciones de Euler 1053
17.5 Soluciones en series de potencias 1055

Apéndices AP-1

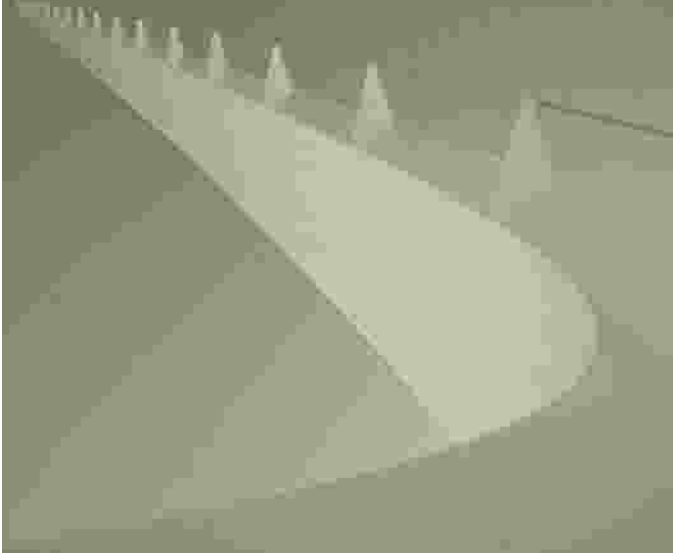
A.1 Números reales y recta de los reales AP-1
A.2 Inducción matemática AP-6
A.3 Rectas, circunferencias y parábolas AP-10
A.4 Demostración de los teoremas de límites AP-19
A.5 Límites que se presentan comúnmente AP-22
A.6 Teoría de los números reales AP-23
A.7 Números complejos AP-26
A.8 Ley distributiva para el producto cruz de vectores AP-35
A.9 El teorema de la derivada mixta y el teorema del incremento AP-36

Respuestas a los ejercicios con número impar R-1

Índice I-1

Créditos C-1

Breve tabla de integrales T-1



Prefacio

Esta nueva edición de *Cálculo* de Thomas ofrece una introducción moderna al cálculo, enfocada en la comprensión integral de los elementos fundamentales de un curso tradicional. Este material se puede utilizar tanto para un curso de cálculo de tres semestres como para uno de cuatro trimestres, que por lo general toman los estudiantes de matemáticas, ingeniería y ciencias. Explicaciones precisas, ejemplos meticulosamente seleccionados, figuras que aclaran las ideas y conjuntos de ejercicios que han demostrado ser efectivos son el fundamento del presente libro. Y queremos seguir mejorando el texto atendiendo a los cambios en la preparación y las exigencias de los estudiantes, así como las aplicaciones del cálculo en un mundo dinámico.

Muchos de nuestros alumnos tuvieron un primer contacto con la terminología y los procedimientos del cálculo durante el bachillerato; no obstante, las habilidades adquiridas sobre álgebra y trigonometría suelen ser insuficientes para alcanzar el éxito en un curso de cálculo de nivel universitario. En el presente texto buscamos equilibrar la experiencia de los estudiantes en cálculo con el desarrollo de habilidades algebraicas que podrían necesitar, sin retrasar su progreso en aquella disciplina. Hemos tenido cuidado de presentar suficiente material de repaso (tanto en el texto como en los apéndices), soluciones detalladas, y gran diversidad de ejemplos y ejercicios para lograr una comprensión plena del cálculo por parte de estudiantes de todos los niveles. Presentamos el material de una forma que estimula al alumno a pensar e ir más allá de la simple memorización de fórmulas y procedimientos de rutina. Tan pronto como exponemos los conceptos clave, mostramos cómo generalizarlos. De manera continua se hacen referencias para vincular un concepto nuevo con alguno que se estudió antes, o bien, con algo que se verá más adelante. Después de estudiar este libro, los usuarios habrán desarrollado habilidades de solución y razonamiento de problemas que les servirán considerablemente en varios aspectos importantes de su vida. El dominio de esta hermosa y creativa materia, junto con muchas aplicaciones prácticas en diferentes campos, es en sí mismo una recompensa. Pero el verdadero regalo de estudiar cálculo es adquirir la habilidad de pensar lógica y objetivamente, y aprender a generalizar conceptos. El libro que tienen en sus manos fomenta y apoya el logro de tales metas.

Novedades en la presente edición

En esta nueva edición combinamos el pensamiento conceptual con la lógica y la estructura general del cálculo de una y varias variables. Continuamos mejorando en calidad y precisión, atendiendo las sugerencias de los usuarios de ediciones anteriores. Al mismo tiempo que cuidamos la extensión de la obra, incluimos ejemplos adicionales a lo largo del texto. Se agregaron varios ejercicios nuevos de todos los niveles de dificultad, pero el principal foco de atención fueron los ejercicios de nivel medio. Se reelaboraron varias figuras y se agregaron algunas inéditas para mejorar la visualización. Escribimos una sección nueva

sobre probabilidad, la cual ofrece una aplicación importante de integración en el ámbito de las ciencias biológicas.

Se conservaron la estructura básica de la tabla de contenido y las mejoras de la edición anterior; y en el proceso agregamos algunas otras significativas, las cuales se detallan a continuación:

- **Funciones** En el tema del uso del software para el trabajo de graficación agregamos una breve sección de ajuste de curvas por mínimos cuadrados que permite a los estudiantes aprovechar esta aplicación ampliamente difundida. El material que es prerrequisito para el tema se repasa en los apéndices 1 a 3.
- **Continuidad** Se expusieron con más claridad los conceptos de continuidad asignando el término "puntos extremos" a los intervalos, en lugar de utilizarlos en dominios más generales. La sección referente a la extensión de la continuidad de una función se trasladó al final de la sección acerca de continuidad.
- **Derivadas** Incluimos una breve visión geométrica para justificar la regla de L'Hôpital. También enriquecimos y aclaramos el significado de diferenciabilidad de funciones de varias variables, al tiempo que agregamos el resultado de la regla de la cadena para funciones definidas a lo largo de una trayectoria.
- **Integrales** Escribimos una sección nueva revisando las fórmulas básicas de integración y la regla de sustitución, empleándolas en combinación con identidades trigonométricas y algebraicas, antes de presentar otras técnicas de integración.
- **Probabilidad** Creamos una nueva sección de aplicación de integrales impropias para algunas distribuciones de probabilidad que se utilizan con frecuencia, como las distribuciones exponencial y normal. Muchos ejemplos y ejercicios relacionados se aplican a las ciencias biológicas.
- **Series** Ahora presentamos la idea de convergencia absoluta, antes de introducir los criterios de la razón y la raíz, los cuales se enuncian más adelante de forma más precisa. La convergencia condicional se introduce posteriormente, junto con el criterio de la serie alternante.
- **Cálculo vectorial y de varias variables** Se presenta una visión más geométrica del concepto de integrales múltiples, y enfatizamos el significado del jacobiano en el uso de sustituciones para evaluarlas. El concepto de integrales de superficie de campos vectoriales ahora se presenta de manera paralela a la idea de integrales de línea de campos vectoriales. También mejoró el análisis de divergencia y del rotacional de un campo vectorial.
- **Ejercicios y ejemplos** Una de las características distintivas de este libro es la inclusión de conjuntos de ejercicios de alto nivel, lo cual se fortalece en cada nueva edición. Ahora actualizamos, modificamos y agregamos muchos ejercicios y ejemplos, prestando atención especial a la inclusión de más aplicaciones a las áreas de ciencias biológicas y a problemas contemporáneos. Por ejemplo, se actualizó un ejercicio sobre el producto interno bruto de Estados Unidos; se agregaron ejercicios nuevos relacionados con las dosis de medicamentos y sus concentraciones en el cuerpo humano, la estimación de la tasa a la que se fuga el petróleo de una tubería averiada, y el pronóstico referente al aumento de costos en la inscripción a la universidad.

Características que se conservan

RIGOR El contenido del texto es tan sólido y consistente como en las ediciones anteriores. Continuamos empleando análisis tanto formales como informales, pero dejando en claro sus diferencias. Creemos que iniciar con un enfoque más intuitivo y menos formal ayuda a los estudiantes a entender mejor un concepto nuevo, o difícil, y a apreciar plenamente su significado matemático junto con los resultados. Pusimos atención especial en la definición

de conceptos y en la demostración adecuada de los teoremas a los estudiantes de cálculo, al tiempo que resaltamos temas más profundos o sutiles que podrían encontrar en cursos más avanzados. La organización y las distinciones entre los análisis formales e informales dan al profesor un grado de flexibilidad considerable en cuanto a la profundidad y cobertura de los diferentes temas. Por ejemplo, los teoremas del valor intermedio y del valor extremo para funciones continuas en $a \leq x \leq b$ se demuestran tan sólo después de enunciar los teoremas de manera precisa, ilustrando sus significados con numerosos ejemplos y usándolos para demostrar otros resultados importantes. Asimismo, para los profesores que deseen mayor profundidad en la cobertura, en el apéndice 6 se analiza cómo la validez de dichos teoremas depende de la propiedad de completitud de los números reales.

EJERCICIOS Los ejercicios incluidos a lo largo del texto exigen a los estudiantes explorar y explicar una gran variedad de conceptos y aplicaciones de cálculo. Además, al final de cada capítulo se incluye una lista de preguntas para que los estudiantes repasen y resuman lo que aprendieron. Muchos de estos ejercicios se pueden utilizar como tareas.

PROYECTOS Y REPASO DE FINAL DE CAPÍTULO Además de los problemas que aparecen después de cada sección, todos los capítulos terminan con preguntas de repaso, ejercicios de práctica que cubren todo el capítulo, y una serie de ejercicios adicionales y avanzados que sirven para agregar problemas más desafiantes o de síntesis. La mayoría de los capítulos incluye también descripciones de varios **proyectos de aplicación tecnológica** que los estudiantes pueden trabajar, ya sea individualmente o en equipo, durante un periodo más prolongado. Se trata de proyectos que requieren del uso de una computadora donde corra *Mathematica* o *Maple*, y de material adicional disponible en el sitio web de este libro.

ESCRITURA Y APLICACIONES Como siempre, este texto pretende ser matemáticamente fértil y sencillo de leer; por eso utiliza un tono conversacional. Cada tema nuevo se explica con claridad, se ilustra con ejemplos de fácil comprensión y se refuerza con aplicaciones a problemas reales que resulten de interés para los estudiantes. El sello del presente libro ha sido la aplicación del cálculo a ciencias e ingeniería. Los problemas de aplicación se han actualizado, mejorado y ampliado a lo largo de las últimas ediciones.

TECNOLOGÍA En un curso que utilice este libro, se puede incorporar fácilmente la tecnología según los deseos del profesor. Para ello, cada sección incluye ejercicios que requieren el uso de tecnología, identificándolos con una T cuando sean adecuados para resolverse con la ayuda de una calculadora o una computadora, o bien, se identifican con el título **Exploraciones con computadora** si es necesario un software matemático (como *Maple* o *Mathematica*).

Recursos adicionales

MANUAL DE SOLUCIONES PARA EL PROFESOR (en inglés)

Incluye soluciones completas para todos los ejercicios de este texto, y está disponible de forma gratuita para los profesores que adopten este libro en sus cursos; póngase en contacto con su representante de Pearson o visite **www.pearsonenespañol.com/thomas**

Manuales de recursos tecnológicos (en inglés)

El *Manual de Maple* escrito por Marie Vanisko, de Carroll College, el *Manual de Mathematica* escrito por Marie Vanisko, de Carroll College y el *Manual de la Calculadora TI-Graphing* escrito por Elaine McDonald-Newman, de Sonoma State University, están a la venta en el sitio web del libro en inglés (**http://www.pearsonhighered.com/thomas**); puede consultar versiones preliminares desde nuestro sitio web. Los manuales referidos cubren los programas *Maple* 17, *Mathematica* 8 y las calculadoras TI-83 Plus/TI84 Plus y TI-89, respectivamente. Cada uno ofrece una guía detallada para integrar un paquete específico de software o una calculadora gráfica a lo largo del curso, incluyendo sintaxis y comandos.

SITIO WEB

El sitio web de este libro contiene, entre otros recursos, biografías de personajes relacionados con la historia del cálculo, los manuales de recursos tecnológicos y los **Proyectos de aplicación tecnológica**, que pueden utilizar los estudiantes, ya sea individualmente o en equipo.

MyMathLab en español® (se requiere código de acceso)

Ofrece **resultados comprobados** al ayudar a los estudiantes a obtener éxito individual en la materia.

- Tiene un efecto positivo y consistente en la capacidad de aprendizaje de las matemáticas en el nivel de educación superior. MyMathLab en español se puede implementar con éxito en cualquier ambiente —de laboratorio, híbrido, totalmente en línea o tradicional—, y su uso muestra una diferencia cuantificable en la capacidad de retención de los estudiantes y su éxito posterior.
- La libreta de calificaciones en línea de MyMathLab en español rastrea automáticamente los resultados de los alumnos en exámenes y tareas, así como su avance en el plan de estudios. Puede usar la libreta de calificaciones para intervenir rápidamente si sus alumnos tienen problemas, o para brindarles retroalimentación en un trabajo bien hecho. Los datos de MyMathLab en español se exportan fácilmente a una variedad de programas de hojas de cálculo, como Excel de Microsoft. Usted puede determinar qué datos desea exportar y luego analizar los resultados para medir el éxito.

MyMathLab en español ofrece **atractivas experiencias** que personalizan, estimulan y miden el aprendizaje de cada estudiante.

- **Capítulo acerca de "cómo prepararse"**: Incluye cientos de ejercicios referentes a las habilidades necesarias de álgebra y trigonometría. Cada estudiante puede recibir apoyo en aquellas habilidades donde lo necesite.
- **Ejercicios**: En MyMathLab en español los ejercicios de tarea y práctica están correlacionados con los del texto, y se generan de manera algorítmica para dar oportunidad ilimitada de adquirir práctica y dominio de los temas. El software ofrece retroalimentación inmediata cuando los estudiantes introducen respuestas incorrectas.
- **Apoyo de aprendizaje multimedia**: Los ejercicios incluyen soluciones guiadas, problemas de ejemplo y acceso a eText para apoyo adicional en el momento en que se necesite.
- Utilizar un producto de Pearson significa usar contenido de calidad. Usted tiene la certeza de que nuestros eText son precisos y nuestras herramientas de evaluación funcionan. Debe saber también que estamos comprometidos en hacer MyMathLab tan accesible como sea posible.
- Si usted está iniciando con MyMathLab en español, o tiene alguna pregunta, estaremos gustosos de ayudarle a que conozca nuestra tecnología y sepa cómo incorporarla a su curso.

Para aprender más acerca de cómo MyMathLab combina aplicaciones de aprendizaje con una evaluación poderosa, visite **http://espanol.mymathlabglobal.com/** o póngase en contacto con su representante de Pearson.

Los productos de MyMathLab en español® se pueden adquirir en puntos de venta y en **www.mypearsonshop.com.mx**

TestGen®

Permite a los profesores elaborar, editar, imprimir y administrar exámenes, utilizando un banco de preguntas computarizado, desarrollado para cubrir todos los objetivos del texto. TestGen tiene como base un algoritmo que permite a los profesores crear múltiples versiones, aunque equivalentes, de una misma pregunta o de un examen, con tan sólo hacer clic en un botón. Los profesores también pueden modificar las preguntas del banco de exámenes o agregar nuevas preguntas. Testgen puede descargarse del sitio web de este libro.

Reconocimientos

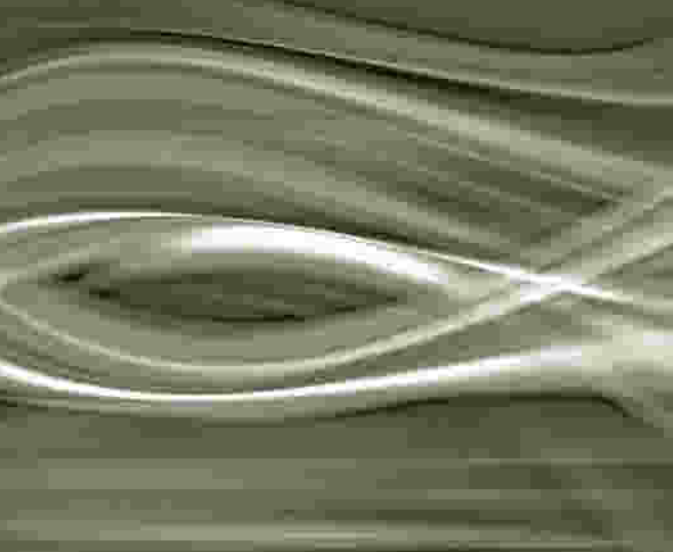
Queremos expresar nuestro agradecimiento a las personas que hicieron muchas e invaluables contribuciones a esta edición conforme se desarrollaba en sus diferentes etapas:

Revisores

Lisa Collette
Patricia Nelson
Tom Wegleitner

Revisores de ediciones recientes

Meighan Dillon, *Southern Polytechnic State University*
Anne Dougherty, *University of Colorado*
Said Fariabi, *San Antonio College*
Klaus Fischer, *George Mason University*
Tim Flood, *Pittsburg State University*
Rick Ford, *California State University—Chico*
Robert Gardner, *East Tennessee State University*
Christopher Heil, *Georgia Institute of Technology*
Joshua Brandon Holden, *Rose-Hulman Institute of Technology*
Alexander Hulpke, *Colorado State University*
Jacqueline Jensen, *Sam Houston State University*
Jennifer M. Johnson, *Princeton University*
Hideaki Kaneko, *Old Dominion University*
Przemo Kranz, *University of Mississippi*
Xin Li, *University of Central Florida*
Maura Mast, *University of Massachusetts—Boston*
Val Mohanakumar, *Hillsborough Community College—Dale Mabry Campus*
Aaron Montgomery, *Central Washington University*
Christopher M. Pavone, *California State University at Chico*
Cynthia Piez, *University of Idaho*
Brooke Quinlan, *Hillsborough Community College—Dale Mabry Campus*
Rebecca A. Segal, *Virginia Commonwealth University*
Andrew V. Sills, *Georgia Southern University*
Alex Smith, *University of Wisconsin—Eau Claire*
Mark A. Smith, *Miami University*
Donald Solomon, *University of Wisconsin—Milwaukee*
John Sullivan, *Black Hawk College*
Maria Terrell, *Cornell University*
Blake Thornton, *Washington University in St. Louis*
David Walnut, *George Mason University*
Adrian Wilson, *University of Montevallo*
Bobby Winters, *Pittsburg State University*
Dennis Wortman, *University of Massachusetts—Boston*



11

Ecuaciones paramétricas y coordenadas polares

INTRODUCCIÓN En este capítulo estudiaremos nuevas formas para definir curvas en el plano. En vez de visualizar una curva como la gráfica de una función o de una ecuación, consideraremos un modo más general para representar una curva: como si se tratara de la trayectoria de una partícula en movimiento, cuya posición cambia con el tiempo. Así, cada una de las coordenadas x y y de la posición de la partícula se convierte en una función de una tercera variable t. También podemos cambiar la forma en que se describen los puntos en el plano usando *coordenadas polares*, en vez del sistema rectangular o cartesiano. Ambas herramientas son útiles para describir movimiento, como el de los planetas y satélites, o el de los proyectiles que se desplazan en el espacio o en un plano. Además, revisaremos las definiciones geométricas y las ecuaciones estándar de parábolas, elipses e hipérbolas. Estas curvas reciben el nombre de *secciones cónicas* o, simplemente, *cónicas* y describen las trayectorias que siguen los proyectiles, los planetas o cualquier otro objeto que se mueva bajo la sola influencia de una fuerza gravitacional o electromagnética.

11.1 Parametrización de curvas planas

En capítulos anteriores estudiamos las curvas como gráficas de funciones o de ecuaciones que incluyen a las dos variables x y y. Ahora presentaremos otra manera de describir una curva, al expresar ambas coordenadas como funciones de una tercera variable t.

Ecuaciones paramétricas

La figura 11.1 muestra la trayectoria de una partícula que se mueve en el plano xy. Observe que la trayectoria no pasa la prueba de la recta vertical, de manera que no se puede describir como la gráfica de una función de la variable x. Sin embargo, algunas veces la trayectoria se describe con un par de ecuaciones, $x = f(t)$ y $y = g(t)$, donde f y g son funciones continuas. Para estudiar el movimiento, t generalmente representa el tiempo. Ecuaciones como éstas describen curvas más generales que las descritas por una sola función y, además de la gráfica de la trayectoria recorrida, indican la posición $(x, y) = (f(t), g(t))$ de la partícula en cualquier tiempo t.

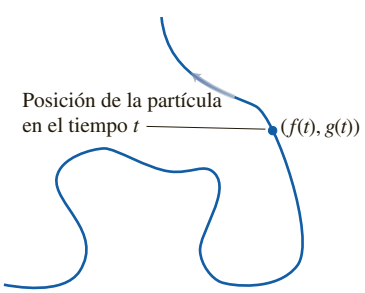


FIGURA 11.1 La curva o trayectoria trazada por una partícula que se mueve en el plano xy no siempre es la gráfica de una función o de una sola ecuación.

DEFINICIÓN Si x y y están expresadas como funciones

$$x = f(t), \qquad y = g(t)$$

en un intervalo I de valores t, entonces, el conjunto de puntos $(x, y) = (f(t), g(t))$ definido por estas ecuaciones es una **curva paramétrica**. Las ecuaciones son **ecuaciones paramétricas** de la curva.

La variable t es un **parámetro** de la curva y su dominio I es el **intervalo del parámetro**. Si I es un intervalo cerrado, $a \le t \le b$, el punto $(f(a), g(a))$ es el **punto inicial** de la curva, y

$(f(b), g(b))$ es el **punto final**. Cuando tenemos ecuaciones paramétricas y un intervalo para el parámetro de la curva, se dice que hemos **parametrizado** la curva. Las ecuaciones y el intervalo, en conjunto, constituyen la **parametrización** de la curva. Una curva determinada puede representarse mediante conjuntos diferentes de ecuaciones paramétricas. (Vea los ejercicios 19 y 20).

EJEMPLO 1 Dibuje la curva definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2, \qquad y = t + 1, \qquad -\infty < t < \infty.$$

Solución Elaboramos una pequeña tabla de valores (tabla 11.1), graficamos los puntos (x, y) y trazamos una curva suave que pase por ellos (figura 11.2). A cada valor de t corresponde un punto (x, y) sobre la curva; por ejemplo, a $t = 1$ le corresponde el punto (1, 2) registrado en la tabla 11.1. Si pensamos que la curva es la trayectoria de una partícula en movimiento, entonces, la partícula se desplaza a lo largo de la curva en la dirección de las flechas que se muestran en la figura 11.2. Si bien los intervalos de tiempo son iguales en la tabla, los puntos consecutivos trazados a lo largo de la curva no están a las mismas distancias sobre el arco de la curva. La razón es que la partícula reduce su velocidad mientras se aproxima al eje y a lo largo de la rama inferior de la curva conforme t aumenta, y luego acelera después de alcanzar el eje y en (0, 1) desplazándose a lo largo de la rama superior. Como el intervalo de valores para t está compuesto por números reales, no existe un punto inicial ni uno final de la curva. ■

TABLA 11.1 Valores de $x = t^2$ y $y = t + 1$ para algunos valores seleccionados de t.

t	x	y
−3	9	−2
−2	4	−1
−1	1	0
0	0	1
1	1	2
2	4	3
3	9	4

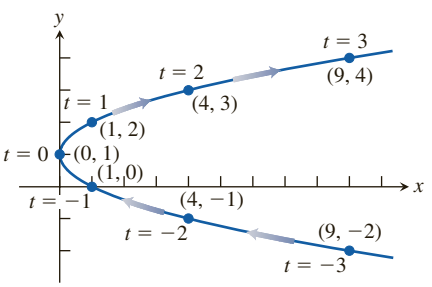


FIGURA 11.2 Curva representada por las ecuaciones paramétricas $x = t^2$ y $y = t + 1$ (ejemplo 1).

EJEMPLO 2 Identifique geométricamente la curva del ejemplo 1 (figura 11.2) eliminando el parámetro t y obteniendo una ecuación algebraica en x y y.

Solución Resolvemos la ecuación $y = t + 1$ despejando el parámetro t y sustituyendo el resultado en la ecuación paramétrica de x. Esto da como resultado $t = y - 1$ y

$$x = t^2 = (y - 1)^2 = y^2 - 2y + 1.$$

La ecuación $x = y^2 - 2y + 1$ representa una parábola, como la mostrada en la figura 11.2. Algunas veces es muy difícil, o incluso imposible, eliminar el parámetro de un par de ecuaciones paramétricas como lo hicimos aquí. ■

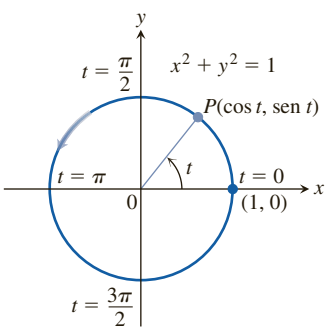


FIGURA 11.3 Las ecuaciones $x = \cos t$ y $y = \text{sen } t$ describen el movimiento sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. La flecha indica la dirección en la que aumenta t (ejemplo 3).

EJEMPLO 3 Grafique las curvas paramétricas

a) $x = \cos t, \qquad y = \text{sen } t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$

b) $x = a \cos t, \qquad y = a \text{ sen } t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$

Solución

a) Puesto que $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \text{sen}^2\, t = 1$, la curva paramétrica se encuentra en la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$. Conforme t aumenta de 0 a 2π, el punto $(x, y) = (\cos t, \text{sen } t)$ inicia su recorrido en (1, 0) y traza la circunferencia completa una sola vez en sentido opuesto al de las manecillas del reloj (figura 11.3).

b) Para $x = a\cos t$, $y = a\operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$, tenemos que $x^2 + y^2 = a^2\cos^2 t + a^2\operatorname{sen}^2 t = a^2$. La parametrización describe un movimiento que inicia en el punto $(a, 0)$, recorre una vez la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ en sentido opuesto al de las manecillas del reloj y regresa a $(a, 0)$ en $t = 2\pi$. La gráfica es un círculo de radio $r = |a|$ con centro en el origen y cuyos puntos tienen coordenadas $(a\cos t, a\operatorname{sen} t)$. ■

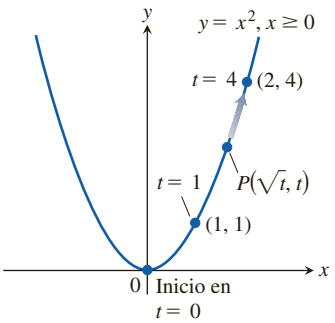


FIGURA 11.4 Las ecuaciones $x = \sqrt{t}$ y $y = t$ y el intervalo $t \ge 0$ describen el movimiento de una partícula que traza la mitad derecha de la parábola $y = x^2$ (ejemplo 4).

EJEMPLO 4 La posición $P(x, y)$ de una partícula que se mueve en el plano xy está dada por las ecuaciones y el intervalo del parámetro siguientes:

$$x = \sqrt{t}, \qquad y = t, \qquad t \ge 0.$$

Identifique la trayectoria trazada por la partícula y describa el movimiento.

Solución Intentamos identificar la trayectoria eliminando t de las ecuaciones $x = \sqrt{t}$ y $y = t$. Tal vez obtengamos una relación algebraica reconocible entre x y y. Encontramos que

$$y = t = \left(\sqrt{t}\right)^2 = x^2.$$

Las coordenadas de la posición de la partícula satisfacen la ecuación $y = x^2$; por lo tanto, la partícula se mueve a lo largo de la parábola $y = x^2$.

Sin embargo, sería un error concluir que la partícula recorre toda la parábola $y = x^2$ en su trayectoria; sólo recorre la mitad de la parábola. La coordenada x de la partícula nunca es negativa. La partícula inicia en $(0, 0)$ cuando $t = 0$ y sube en el primer cuadrante conforme t aumenta (figura 11.4). El intervalo del parámetro es $[0, \infty)$ y no hay punto final. ■

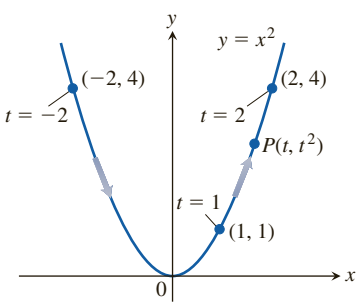


FIGURA 11.5 La trayectoria definida por $x = t$, $y = t^2$, $-\infty < t < \infty$ es la parábola completa $y = x^2$ (ejemplo 5).

La gráfica de cualquier función $y = f(x)$ se obtiene siempre mediante una **parametrización natural** $x = t$ y $y = f(t)$. El dominio del parámetro es, en este caso, el mismo que el dominio de la función f.

EJEMPLO 5 La parametrización de la gráfica de la función $f(x) = x^2$ está dada por

$$x = t, \qquad y = f(t) = t^2, \qquad -\infty < t < \infty.$$

Cuando $t \ge 0$, esta parametrización da como resultado la misma trayectoria en el plano xy que teníamos en el ejemplo 4. Sin embargo, como el parámetro t también puede ser negativo, obtenemos además la porción izquierda de la parábola; es decir, tenemos la curva parabólica completa. Para esta parametrización, no hay un punto inicial ni un punto final (figura 11.5). ■

Observe que una parametrización también especifica (mediante el valor del parámetro) *cuándo* la partícula que se mueve a lo largo de la curva *se ubica* en un punto específico de ésta. En el ejemplo 4, se llega al punto (2, 4) cuando $t = 4$; en el ejemplo 5, el punto se alcanza "antes", cuando $t = 2$. Usted observará las implicaciones de este aspecto de la parametrización cuando considere la posibilidad de que dos objetos colisionen: deben estar exactamente en la misma posición $P(x, y)$ para algunos valores (posiblemente diferentes) de sus respectivos parámetros. Explicaremos más acerca de este aspecto de las parametrizaciones cuando estudiemos el concepto de movimiento en el capítulo 13.

EJEMPLO 6 Obtenga la parametrización de la recta que pasa por el punto (a, b) y que tiene una pendiente m.

Solución La ecuación cartesiana de la recta es $y - b = m(x - a)$. Si establecemos el parámetro $t = x - a$, encontramos que $x = a + t$ y $y - b = mt$. Es decir,

$$x = a + t, \qquad y = b + mt, \qquad -\infty < t < \infty$$

parametrizan la recta. Esta parametrización difiere de la que se obtendría usando la técnica de parametrización natural del ejemplo 5, cuando $t = x$. Sin embargo, ambas dan como resultado la misma recta. ■

TABLA 11.2 Valores de $x = t + (1/t)$ y $y = t - (1/t)$ para algunos valores seleccionados de t.

t	$1/t$	x	y
0.1	10.0	10.1	−9.9
0.2	5.0	5.2	−4.8
0.4	2.5	2.9	−2.1
1.0	1.0	2.0	0.0
2.0	0.5	2.5	1.5
5.0	0.2	5.2	4.8
10.0	0.1	10.1	9.9

EJEMPLO 7 Dibuje e identifique la trayectoria trazada por el punto $P(x, y)$ si

$$x = t + \frac{1}{t}, \qquad y = t - \frac{1}{t}, \qquad t > 0.$$

Solución Elaboramos una tabla de valores (tabla 11.2), graficamos los puntos y trazamos una curva suave que pase por ellos, como en el ejemplo 1. En seguida, eliminamos el parámetro t de las ecuaciones. El procedimiento es más complicado que el del ejemplo 2. Tomando las diferencias entre x y y dadas por las ecuaciones paramétricas, tenemos

$$x - y = \left(t + \frac{1}{t}\right) - \left(t - \frac{1}{t}\right) = \frac{2}{t}.$$

Si sumamos las dos ecuaciones paramétricas, entonces,

$$x + y = \left(t + \frac{1}{t}\right) + \left(t - \frac{1}{t}\right) = 2t.$$

Eliminamos el parámetro t multiplicando estas dos últimas ecuaciones:

$$(x - y)(x + y) = \left(\frac{2}{t}\right)(2t) = 4,$$

o, si multiplicamos los términos del lado izquierdo, obtenemos la ecuación estándar de una hipérbola (un tema que se revisará en la sección 11.6):

$$x^2 - y^2 = 4. \tag{1}$$

Por lo tanto, las coordenadas de todos los puntos $P(x, y)$ descritas por las ecuaciones paramétricas satisfacen la ecuación (1). Sin embargo, la ecuación (1) no requiere que la coordenada x sea positiva. Así que hay puntos (x, y) sobre la hipérbola que no satisfacen la ecuación paramétrica $x = t + (1/t)$, $t > 0$, para la cual x siempre es positiva. Esto es, las ecuaciones paramétricas no generan puntos sobre la rama izquierda de la hipérbola representada por la ecuación (1), es decir, puntos donde la coordenada x sería negativa. Para valores positivos pequeños de t, la trayectoria permanece en el cuarto cuadrante y sube hacia el primer cuadrante conforme t aumenta, cruzando el eje x cuando $t = 1$ (vea la figura 11.6). El dominio del parámetro es $(0, \infty)$ y no hay punto inicial ni punto final de la trayectoria. ■

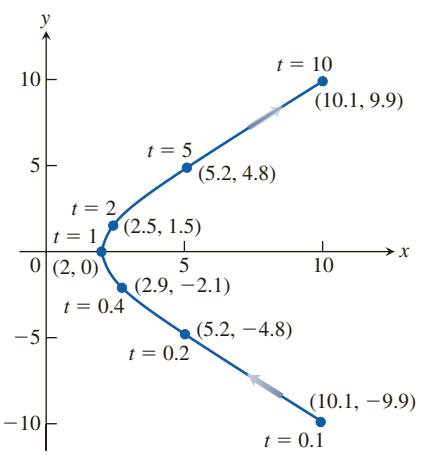


FIGURA 11.6 La curva de $x = t + (1/t)$, $y = t - (1/t)$, $t > 0$ del ejemplo 7. (La parte que se muestra es para $0.1 \le t \le 10$).

Los ejemplos 4, 5 y 6 ilustran que una curva determinada, o una parte de ella, se representan usando diferentes parametrizaciones. En el caso del ejemplo 7, la rama derecha de la hipérbola también se representa mediante la parametrización

$$x = \sqrt{4 + t^2}, \qquad y = t, \qquad -\infty < t < \infty,$$

la cual se obtiene al resolver la ecuación (1) para $x \ge 0$ y dejando que y sea el parámetro. Otra parametrización de la rama derecha de la hipérbola representada por la ecuación 1 es

$$x = 2 \sec t, \qquad y = 2 \tan t, \qquad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

Esta parametrización se obtiene de la identidad trigonométrica $\sec^2 t - \tan^2 t = 1$, de manera que

$$x^2 - y^2 = 4 \sec^2 t - 4 \tan^2 t = 4(\sec^2 t - \tan^2 t) = 4.$$

Conforme t varía entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, $x = \sec t$ se mantiene positiva y $y = \tan t$ varía entre $-\infty$ e ∞, por lo que P recorre la rama derecha de la hipérbola. Viene de la mitad inferior de la rama cuando t tiende a cero por la izquierda, llega a (2, 0) cuando $t = 0$, y entra al primer cuadrante conforme t sigue aumentando hacia $\pi/2$. Ésta es la misma rama de la hipérbola de la cual se muestra una parte en la figura 11.6.

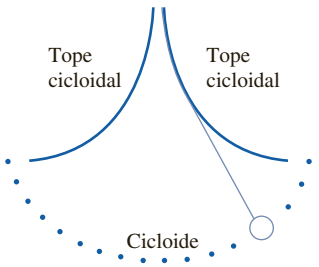


FIGURA 11.7 En el reloj de péndulo de Huygens, la lenteja oscila en una cicloide, de manera que la frecuencia es independiente de la amplitud.

Cicloides

El problema con un reloj de péndulo cuya lenteja oscila en un arco circular es que la frecuencia de la oscilación depende de la amplitud de ésta. Cuanto más amplia sea la oscilación, más tardará la lenteja del péndulo en regresar al centro (su posición más baja).

Esto no sucede si la lenteja oscila siguiendo la trayectoria de una *cicloide*. En 1673 Christian Huygens diseñó un reloj de péndulo cuya lenteja oscilaba en una cicloide, curva que definiremos en el ejemplo 8. Huygens colgó la lenteja de un fino alambre restringido por topes en forma de arco que ocasionaban que ésta se ciñera a ellos cuando oscilaba alejándose del centro (figura 11.7). Describimos la trayectoria paramétrica correspondiente en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8 Una rueda de radio a se mueve a lo largo de una recta horizontal. Obtenga las ecuaciones paramétricas de la trayectoria que recorre un punto P localizado en la circunferencia de la rueda. La trayectoria se llama **cicloide**.

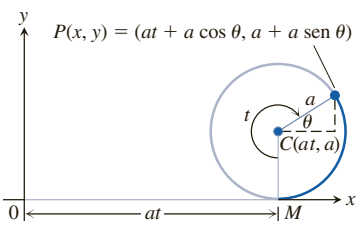


FIGURA 11.8 La posición de $P(x, y)$ en la rueda que gira un ángulo t (ejemplo 8).

Solución Tomamos el eje x como la recta horizontal, marcamos un punto P en la rueda, empezamos a mover esta última con P en el origen y la hacemos girar hacia la derecha. Como parámetro, utilizamos el ángulo t que gira la rueda, medido en radianes. La figura 11.8 muestra la rueda un poco después, cuando su base se encuentra a at unidades del origen. El centro de la rueda C se encuentra en (at, a) y las coordenadas de P son

$$x = at + a\cos\theta, \qquad y = a + a\,\text{sen}\,\theta.$$

Para expresar θ en términos de t, observamos en la figura que $t + \theta = 3\pi/2$, de manera que

$$\theta = \frac{3\pi}{2} - t.$$

Con esto se tiene

$$\cos\theta = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\text{sen}\,t, \qquad \text{sen}\,\theta = \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\cos t.$$

Las ecuaciones que buscamos son

$$x = at - a\,\text{sen}\,t, \qquad y = a - a\cos t.$$

Por lo general, éstas se escriben factorizando a:

$$x = a(t - \text{sen}\,t), \qquad y = a(1 - \cos t). \tag{2}$$

La figura 11.9 muestra el primer arco de la cicloide y parte del siguiente. ■

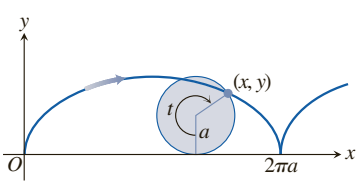


FIGURA 11.9 La curva cicloide $x = a(t - \text{sen}\,t)$, $y = a(1 - \cos t)$, para $t \geq 0$.

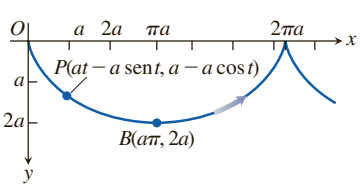


FIGURA 11.10 Al voltear de cabeza la figura 11.9, el eje y apunta en la dirección de la fuerza gravitacional. Las ecuaciones (2) también describen la curva en forma paramétrica.

Braquistocronas y tautocronas

Si volteamos de cabeza la figura 11.9, las ecuaciones (2) siguen siendo válidas y la curva resultante (figura 11.10) tiene dos propiedades físicas interesantes. La primera se relaciona con el origen O y el punto B en la parte inferior del primer arco. De todas las curvas suaves que unen estos puntos, la cicloide es la curva a lo largo de la cual una cuenta (como en un collar), sujeta sólo a la fuerza de la gravedad (sin fricción), se deslizará de O a B en el menor tiempo posible. Esto convierte a la cicloide en una **braquistocrona** o curva de tiempo más corto para estos puntos. La segunda propiedad es que, aunque la cuenta inicie su trayectoria hacia B desde un punto intermedio de la curva, necesitará la misma cantidad de tiempo para llegar a B. Esto hace a la cicloide una **tautocrona**, es decir, la curva con el mismo tiempo para O y B.

¿Existen otras curvas braquistocronas que unan O y B, o la cicloide es la única? Podemos formular esta pregunta desde el punto de vista matemático de la siguiente manera. Al principio, la energía cinética de la cuenta es cero, puesto que su velocidad es cero. El trabajo que efectúa la gravedad cuando la cuenta se mueve de (0, 0) a cualquier otro punto (x, y) en el plano es mgy, y éste debe ser igual al cambio en la energía cinética. (Vea el ejercicio 23, sección 6.5). Es decir,

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m(0)^2.$$

Por lo tanto, cuando la cuenta llega a (x, y), su velocidad tiene que ser

$$v = \sqrt{2gy}.$$

Es decir,

$$\frac{ds}{dT} = \sqrt{2gy}$$

ds es la diferencial de longitud del arco a lo largo de la trayectoria de la cuenta, y T representa el tiempo.

o

$$dT = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}\,dx}{\sqrt{2gy}}. \tag{3}$$

El tiempo T_f que tarda la cuenta en deslizarse a lo largo de una trayectoria particular $y = f(x)$ de O a $B(a\pi, 2a)$ es

$$T_f = \int_{x=0}^{x=a\pi} \sqrt{\frac{1 + (dy/dx)^2}{2gy}}\,dx. \tag{4}$$

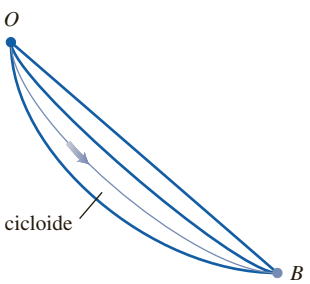


FIGURA 11.11 La cicloide es la única curva que minimiza el tiempo que tarda una cuenta sin fricción en ir del punto O al B.

¿Qué curvas $y = f(x)$, si las hay, minimizan el valor de esta integral?

A primera vista, podríamos suponer que la línea recta que une O y B daría el tiempo más breve, pero quizá no. Podría ser ventajoso que la cuenta cayera verticalmente al principio para incrementar su velocidad más rápido. Con una velocidad mayor, la cuenta podría recorrer una trayectoria más larga y, aún así, llegar primero a B. En realidad, esta idea es correcta. De acuerdo con una rama de las matemáticas conocida como *cálculo de variaciones*, la respuesta es que la cicloide original de O a B es la única braquistocrona para O y B (figura 11.11).

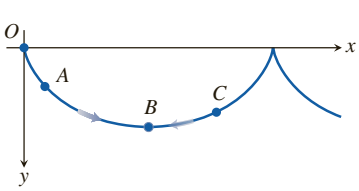


FIGURA 11.12 Las cuentas liberadas de manera simultánea en la cicloide en O, A y C llegarán a B al mismo tiempo.

En la siguiente sección mostraremos cómo encontrar la diferencial de la longitud de arco ds para una curva parametrizada. Una vez que sabemos cómo encontrar ds, podemos calcular el tiempo dado por el lado derecho de la ecuación (4) para la cicloide. Este cálculo indica el tiempo que tarda una cuenta en deslizarse sin fricción por la cicloide hasta B, después que se ha liberado a partir del reposo en O. Este tiempo es $\pi\sqrt{a/g}$, donde a es el radio de la rueda que define la cicloide dada. Además, si el movimiento de la cuenta inicia en algún punto inferior en la cicloide correspondiente a un valor $t_0 > 0$ del parámetro, podemos integrar la forma paramétrica de $ds/\sqrt{2gy}$ en la ecuación (3) sobre el intervalo $[t_0, \pi]$, para encontrar el tiempo que le toma a la cuenta alcanzar el punto B. El cálculo da como resultado el mismo valor del tiempo $T = \pi\sqrt{a/g}$. La cuenta tarda el mismo tiempo para llegar a B, sin importar desde dónde inicie su desplazamiento, lo que convierte a la cicloide en una tautocrona. Las cuentas que inician simultáneamente desde O, A y C en la figura 11.12, por ejemplo, llegarán a B al mismo tiempo. Por esa razón, el movimiento del péndulo del reloj de Huygens, en la figura 11.7, es independiente de la amplitud de la oscilación.

Ejercicios 11.1

Obtención de ecuaciones cartesianas a partir de ecuaciones paramétricas

Los ejercicios 1 a 18 presentan ecuaciones paramétricas e intervalos de parámetros del movimiento de una partícula en el plano xy. Identifique la trayectoria de la partícula determinando una ecuación cartesiana para ello. Grafique la ecuación cartesiana. (La gráfica variará con la ecuación empleada). Indique la porción de la gráfica seguida por la partícula y la dirección del movimiento.

1. $x = 3t, \quad y = 9t^2, \quad -\infty < t < \infty$

2. $x = -\sqrt{t}, \quad y = t, \quad t \geq 0$

3. $x = 2t - 5, \quad y = 4t - 7, \quad -\infty < t < \infty$

4. $x = 3 - 3t, \quad y = 2t, \quad 0 \leq t \leq 1$

5. $x = \cos 2t, \quad y = \operatorname{sen} 2t, \quad 0 \leq t \leq \pi$

6. $x = \cos(\pi - t), \quad y = \operatorname{sen}(\pi - t), \quad 0 \leq t \leq \pi$

7. $x = 4\cos t, \quad y = 2\operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

8. $x = 4\operatorname{sen} t, \quad y = 5\cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

9. $x = \operatorname{sen} t, \quad y = \cos 2t, \quad -\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$

10. $x = 1 + \operatorname{sen} t, \quad y = \cos t - 2, \quad 0 \leq t \leq \pi$

11. $x = t^2, \quad y = t^6 - 2t^4, \quad -\infty < t < \infty$

12. $x = \dfrac{t}{t-1}, \quad y = \dfrac{t-2}{t+1}, \quad -1 < t < 1$

13. $x = t, \quad y = \sqrt{1 - t^2}, \quad -1 \leq t \leq 0$

14. $x = \sqrt{t+1}, \quad y = \sqrt{t}, \quad t \geq 0$

15. $x = \sec^2 t - 1, \quad y = \tan t, \quad -\pi/2 < t < \pi/2$

16. $x = -\sec t, \quad y = \tan t, \quad -\pi/2 < t < \pi/2$

17. $x = -\cosh t, \quad y = \operatorname{senh} t, \quad -\infty < t < \infty$

18. $x = 2\operatorname{senh} t, \quad y = 2\cosh t, \quad -\infty < t < \infty$

Obtención de ecuaciones paramétricas

19. Obtenga las ecuaciones paramétricas y el intervalo del parámetro del movimiento de una partícula que inicia en $(a, 0)$ y sigue la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$

a) una vez en el sentido de las manecillas del reloj.

b) una vez en el sentido opuesto al de las manecillas del reloj.

c) dos veces en el sentido de las manecillas del reloj.

d) dos veces en el sentido opuesto al de las manecillas del reloj.

(Hay muchas maneras de lograrlo, de manera que sus respuestas tal vez sean diferentes de las que se presentan al final del libro).

20. Obtenga las ecuaciones paramétricas y el intervalo del parámetro del movimiento de una partícula que inicia en $(a, 0)$ y que traza la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$

a) una vez en el sentido de las manecillas del reloj.

b) una vez en el sentido opuesto al de las manecillas del reloj.

c) dos veces en el sentido de las manecillas del reloj.

d) dos veces en el sentido opuesto al de las manecillas del reloj.

(Al igual que en el ejercicio 19, hay muchas respuestas correctas).

En los ejercicios 21 a 26, determine la parametrización de la curva.

21. El segmento de recta con extremos en $(-1, -3)$ y $(4, 1)$

22. El segmento de recta con extremos en $(-1, 3)$ y $(3, -2)$

23. La mitad inferior de la parábola $x - 1 = y^2$

24. La mitad izquierda de la parábola $y = x^2 + 2x$

25. El rayo ("la mitad de la recta") que inicia en el punto $(2, 3)$ y que pasa por el punto $(-1, -1)$

26. El rayo ("la semirrecta") que inicia en el punto $(-1, 2)$ y que pasa por el punto $(0, 0)$

27. Obtenga las ecuaciones paramétricas y el intervalo del parámetro del movimiento de una partícula que inicia en $(2, 0)$ y que traza la mitad superior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ cuatro veces.

28. Obtenga las ecuaciones paramétricas y el intervalo del parámetro del movimiento de una partícula que se desplaza a lo largo de la gráfica $y = x^2$ del siguiente modo: inicia en $(0, 0)$, se dirige hacia $(3, 9)$ y luego viaja de ida y vuelta de $(3, 9)$ a $(-3, 9)$ una infinidad de veces.

29. Obtenga las ecuaciones paramétricas del semicírculo

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad y > 0,$$

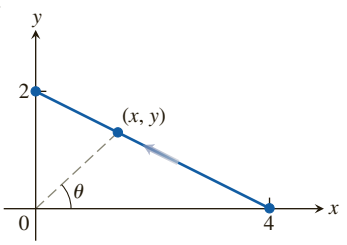
usando como parámetro la pendiente $t = dy/dx$ de la tangente a la curva en (x, y).

30. Obtenga las ecuaciones paramétricas de la circunferencia

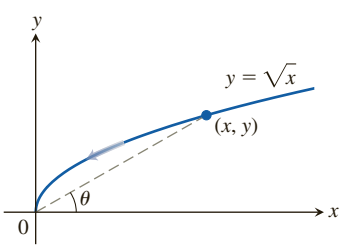
$$x^2 + y^2 = a^2,$$

usando como parámetro la longitud del arco s medida en sentido opuesto al de las manecillas del reloj del punto $(a, 0)$ al punto (x, y).

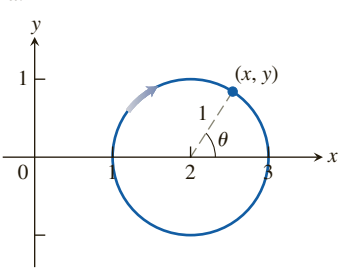
31. Obtenga la parametrización del segmento de recta que une los puntos $(0, 2)$ y $(4, 0)$ usando como parámetro el ángulo θ de la siguiente figura.



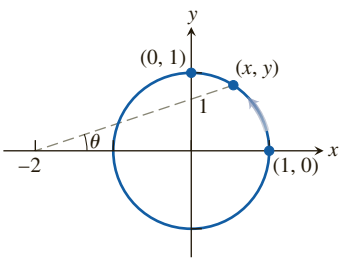
32. Obtenga la parametrización de la curva $y = \sqrt{x}$ con punto final en $(0, 0)$ usando como parámetro el ángulo θ de la siguiente figura.



33. Obtenga la parametrización de la circunferencia $(x-2)^2 + y^2 = 1$ que inicia en $(1, 0)$ y se mueve una vez en el sentido de las manecillas del reloj, usando como parámetro el ángulo central θ de la siguiente figura.



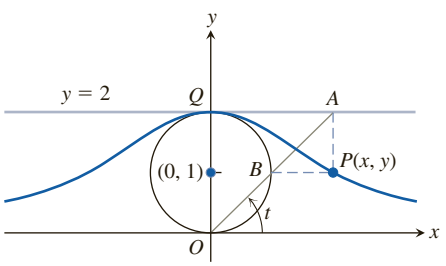
34. Obtenga la parametrización de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ que inicia en (1, 0) y se mueve al punto final (0, 1) en el sentido opuesto al de las manecillas del reloj, usando como parámetro el ángulo θ de la siguiente figura.



35. La bruja de María Agnesi La forma de campana de la curva conocida como bruja de María Agnesi se puede construir del siguiente modo. Inicie con un círculo de radio 1, con centro en el punto (0, 1), como se muestra en la figura. Seleccione un punto A sobre la recta $y = 2$ y únalo con el origen mediante un segmento de recta. Llame B al punto donde el segmento cruza a la circunferencia. Haga que P sea el punto donde la recta vertical que pasa por A cruce la recta horizontal que pasa por B. La bruja es la curva trazada por P conforme A se mueve a lo largo de la recta $y = 2$. Obtenga las ecuaciones paramétricas y el intervalo del parámetro de la bruja, expresando las coordenadas de P en términos de t, el ángulo, medido en radianes, que forma el segmento OA con la parte positiva del eje x. Las siguientes igualdades (que usted debe considerar) serán de gran ayuda.

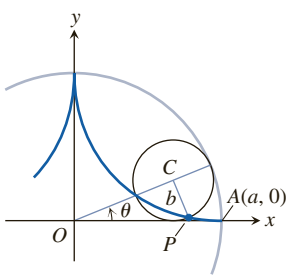
a) $x = AQ$ ***b)*** $y = 2 - AB \operatorname{sen} t$

c) $AB \cdot OA = (AQ)^2$

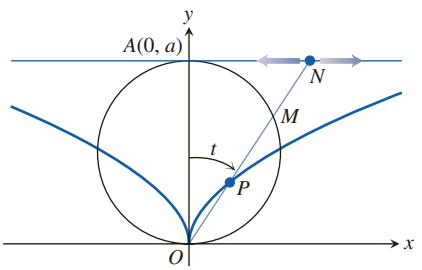


36. Hipocicloide Cuando un círculo rueda dentro de una circunferencia fija, cualquier punto P sobre la circunferencia del círculo que rueda describe una *hipocicloide.* Sea $x^2 + y^2 = a^2$, la circunferencia fija, b el radio del círculo que rueda, y $A(a, 0)$ la posición inicial del punto P que trazará la curva. Obtenga ecuaciones paramétricas para la hipocicloide, usando como parámetro el ángulo θ formado por la parte positiva del eje x y la recta que une los centros de las circunferencias. En particular, si $b = a/4$, como se observa en la figura, demuestre que la hipocicloide es la astroide

$$x = a \cos^3 \theta, \quad y = a \operatorname{sen}^3 \theta.$$



37. A medida que el punto N se mueve a lo largo de la recta $y = a$ en la siguiente figura, P se mueve de tal manera que $OP = MN$. Obtenga las ecuaciones paramétricas para las coordenadas de P como funciones del ángulo t que forma la recta ON con la parte positiva del eje y.



38. Trocoides Una rueda de radio a gira sin patinarse a lo largo de una recta horizontal. Determine ecuaciones paramétricas para la curva que describe el punto P ubicado sobre un rayo de la rueda a b unidades del centro. Como parámetro, utilice el ángulo θ que gira la rueda. La curva se denomina *trocoide* y es una cicloide cuando $b = a$.

Cálculo de distancia mediante ecuaciones paramétricas

39. Determine el punto en la parábola $x = t$, $y = t^2$, $-\infty < t < \infty$, más cercano al punto $(2, 1/2)$. (*Sugerencia:* Minimice el cuadrado de la distancia como una función de t).

40. Encuentre el punto sobre la elipse $x = 2 \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$ más cercano al punto $(3/4, 0)$. (*Sugerencia:* Minimice el cuadrado de la distancia como una función de t).

T EXPLORACIONES GRÁFICAS

Si tiene un graficador de ecuaciones paramétricas, en los ejercicios 41 a 48, grafique las siguientes ecuaciones en los intervalos indicados.

41. Elipse $x = 4 \cos t$, $y = 2 \operatorname{sen} t$, en

a) $0 \le t \le 2\pi$

b) $0 \le t \le \pi$

c) $-\pi/2 \le t \le \pi/2$.

42. Rama de una hipérbola $x = \sec t$ [introdúzcala como $1/\cos(t)$], $y = \tan t$ [introdúzcala como $\operatorname{sen}(t)/\cos(t)$], en

a) $-1.5 \le t \le 1.5$

b) $-0.5 \le t \le 0.5$

c) $-0.1 \le t \le 0.1$.

43. Parábola $x = 2t + 3$, $y = t^2 - 1$, $-2 \le t \le 2$

44. Cicloide $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$, en

a) $0 \le t \le 2\pi$

b) $0 \le t \le 4\pi$

c) $\pi \le t \le 3\pi$.

45. Deltoide

$x = 2 \cos t + \cos 2t$, $y = 2 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t$; $0 \le t \le 2\pi$

¿Qué ocurre si sustituye 2 por -2 en las ecuaciones de x y y? Grafique las nuevas ecuaciones y averígüelo.

46. Una curva bonita

$x = 3 \cos t + \cos 3t$, $y = 3 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 3t$; $0 \le t \le 2\pi$

¿Qué pasa si sustituye 3 por -3 en las ecuaciones de x y y? Grafique las nuevas ecuaciones y averígüelo.

47. ***a*) Epicicloide**

$x = 9\cos t - \cos 9t, \quad y = 9\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 9t; \quad 0 \le t \le 2\pi$

***b*) Hipocicloide**

$x = 8\cos t + 2\cos 4t, \quad y = 8\operatorname{sen} t - 2\operatorname{sen} 4t; \quad 0 \le t \le 2\pi$

***c*) Hipotrocoide**

$x = \cos t + 5\cos 3t, \quad y = 6\cos t - 5\operatorname{sen} 3t; \quad 0 \le t \le 2\pi$

48. ***a***) $x = 6\cos t + 5\cos 3t,\ y = 6\operatorname{sen} t - 5\operatorname{sen} 3t;\ 0 \le t \le 2\pi$

b) $x = 6\cos 2t + 5\cos 6t,\ y = 6\operatorname{sen} 2t - 5\operatorname{sen} 6t;\ 0 \le t \le \pi$

c) $x = 6\cos t + 5\cos 3t,\ y = 6\operatorname{sen} 2t - 5\operatorname{sen} 3t;\ 0 \le t \le 2\pi$

d) $x = 6\cos 2t + 5\cos 6t,\ y = 6\operatorname{sen} 4t - 5\operatorname{sen} 6t;\ 0 \le t \le \pi$

11.2 Cálculo con curvas paramétricas

En esta sección aplicaremos el cálculo a curvas paramétricas. Específicamente, obtendremos pendientes, longitudes y áreas asociadas con curvas parametrizadas.

Tangentes y áreas

La curva parametrizada $x = f(t)$ y $y = g(t)$ es **derivable** en t si f y g son derivables en t. En un punto de una curva parametrizada derivable donde y también es una función derivable de x, las derivadas dy/dt, dx/dt y dy/dx están relacionadas por la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Si $dx/dt \neq 0$, podemos dividir ambos lados de esta ecuación entre dx/dt y despejar dy/dx.

Fórmula paramétrica de dy/dx

Si existen las tres derivadas y $dx/dt \neq 0$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}. \tag{1}$$

Si las ecuaciones paramétricas definen a y como una función dos veces derivable de x, podemos aplicar la ecuación (1) de la función $dy/dx = y'$ para calcular d^2y/dx^2 como una función de t:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dy'/dt}{dx/dt}. \qquad \text{Ecuación (1) con } y' \text{ en vez de } y$$

Fórmula paramétrica de d^2y/dx^2

Si las ecuaciones $x = f(t)$ y $y = g(t)$ definen y como una función dos veces diferenciable de x, entonces, en cualquier punto donde $dx/dt \neq 0$ y $y' = dy/dx$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt}. \tag{2}$$

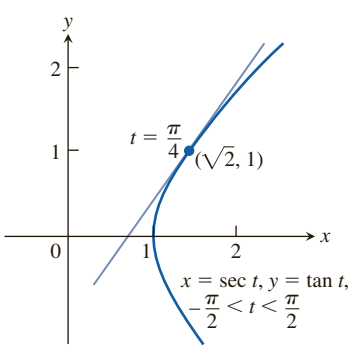


FIGURA 11.13 La curva del ejemplo 1 es la rama derecha de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$.

EJEMPLO 1 Obtenga la tangente a la curva

$$x = \sec t, \qquad y = \tan t, \qquad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2},$$

en el punto $(\sqrt{2}, 1)$, donde $t = \pi/4$ (figura 11.13).

Solución La pendiente de la curva en t es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \tan t} = \frac{\sec t}{\tan t}. \qquad \text{Ecuación (1)}$$

Al igualar t a $\pi/4$, obtenemos

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi/4} = \frac{\sec(\pi/4)}{\tan(\pi/4)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}.$$

La recta tangente es

$$y - 1 = \sqrt{2}\left(x - \sqrt{2}\right)$$
$$y = \sqrt{2}\,x - 2 + 1$$
$$y = \sqrt{2}\,x - 1.$$

■

Obtención de d^2y/dx^2 en términos de t

1. Exprese $y' = dy/dx$ en términos de t.
2. Obtenga dy'/dt.
3. Divida dy'/dt entre dx/dt.

EJEMPLO 2 Obtenga d^2y/dx^2 como una función de t si $x = t - t^2$ y $y = t - t^3$.

Solución

1. Exprese $y' = dy/dx$ en términos de t.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1 - 3t^2}{1 - 2t}$$

2. Derive y' con respecto a t.

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1 - 3t^2}{1 - 2t}\right) = \frac{2 - 6t + 6t^2}{(1 - 2t)^2} \qquad \text{Regla de la derivada del cociente}$$

3. Divida dy'/dt entre dx/dt.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{(2 - 6t + 6t^2)/(1 - 2t)^2}{1 - 2t} = \frac{2 - 6t + 6t^2}{(1 - 2t)^3} \qquad \text{Ecuación (2)}$$

■

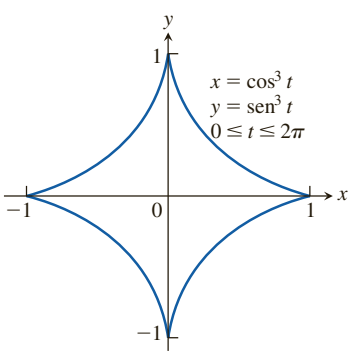


FIGURA 11.14 La astroide del ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Obtenga el área encerrada por la astroide (figura 11.14)

$$x = \cos^3 t, \qquad y = \operatorname{sen}^3 t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Solución Por simetría, el área interior es 4 veces el área bajo la curva en el primer cuadrante, donde $0 \le t \le \pi/2$. Podemos aplicar la fórmula de la integral definida para área del capítulo 5, usando sustitución para expresar la curva y la diferencial dx en términos del parámetro t. Así,

$$A = 4\int_0^1 y\,dx$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 t \cdot 3\cos^2 t \operatorname{sen} t\,dt \qquad \text{Sustituya } y \text{ y } dx$$

$$= 12\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt \qquad \operatorname{sen}^4 t = \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} (1 - 2\cos 2t + \cos^2 2t)(1+\cos 2t)\,dt \qquad \text{Desarrolle el término al cuadrado.}$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t - \cos^2 2t + \cos^3 2t)\,dt \qquad \text{Multiplique los términos.}$$

$$= \frac{3}{2}\left[\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)\,dt - \int_0^{\pi/2}\cos^2 2t\,dt + \int_0^{\pi/2}\cos^3 2t\,dt\right]$$

$$= \frac{3}{2}\left[\left(t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right) - \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t\right) + \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 2t\right)\right]_0^{\pi/2} \qquad \text{Ejemplo 3, sección 8.3}$$

$$= \frac{3}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} - 0 - 0 - 0\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 0\right) + \frac{1}{2}(0 - 0 - 0 + 0)\right] \qquad \text{Evalúe.}$$

$$= \frac{3\pi}{8}. \qquad \blacksquare$$

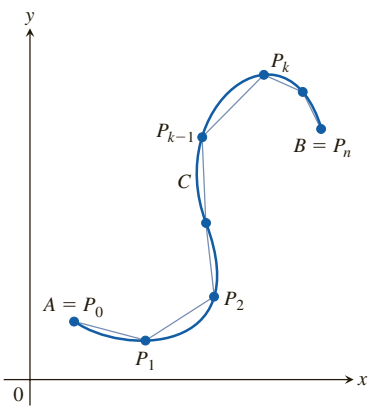


FIGURA 11.15 La longitud de la curva suave C, que va de A a B, es aproximada por la suma de las longitudes de la trayectoria poligonal (segmentos de línea recta) que inicia en $A = P_0$, sigue a P_1 y así sucesivamente, hasta finalizar en $B = P_n$.

Longitud de una curva definida en forma paramétrica

Sea C una curva definida en forma paramétrica por medio de las ecuaciones

$$x = f(t) \qquad \text{y} \qquad y = g(t), \qquad a \le t \le b.$$

Suponemos que las funciones f y g son **continuamente derivables** (es decir, que tienen primeras derivadas continuas) en el intervalo $[a, b]$. También suponemos que las derivadas $f'(t)$ y $g'(t)$ no son simultáneamente iguales a cero, lo cual evita que la curva C tenga esquinas o picos. Una curva como ésta se denomina **curva suave**. Subdividimos la trayectoria (o arco) AB en n partes en los puntos $A = P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n = B$ (figura 11.15). Estos puntos corresponden a una partición del intervalo $[a, b]$ en $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$, donde $P_k = (f(t_k), g(t_k))$. Se unen los puntos sucesivos de esta subdivisión mediante segmentos de recta (figura 11.15). Un segmento representativo tiene longitud

$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$
$$= \sqrt{[\,f(t_k) - f(t_{k-1})\,]^2 + [\,g(t_k) - g(t_{k-1})\,]^2}$$

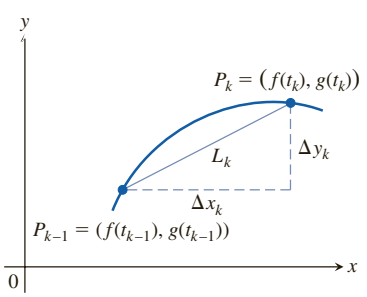


FIGURA 11.16 El arco $P_{k-1}P_k$ se aproxima por el segmento de recta que se muestra aquí, con una longitud de $L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$.

(vea la figura 11.16). Si Δt_k es pequeña, la longitud L_k es aproximadamente igual a la longitud del arco $P_{k-1}P_k$. De acuerdo con el teorema del valor medio, sabemos que existen números t_k^* y t_k^{**} en $[t_{k-1}, t_k]$ tales que

$$\Delta x_k = f(t_k) - f(t_{k-1}) = f'(t_k^*)\,\Delta t_k,$$

$$\Delta y_k = g(t_k) - g(t_{k-1}) = g'(t_k^{**})\,\Delta t_k.$$

Suponiendo que la trayectoria de A a B se recorre exactamente una vez cuando t aumenta de $t = a$ a $t = b$, sin invertir el sentido del movimiento ni pasar dos veces por el mismo punto, una aproximación a la "longitud" (aún por definir) de la curva AB es igual a la suma de todas las longitudes L_k:

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[f'(t_k^*)]^2 + [g'(t_k^{**})]^2}\, \Delta t_k.$$

Aunque la última suma de la derecha no es exactamente una suma de Riemann (ya que f' y g' se evalúan en diferentes puntos), es posible demostrar que su límite, conforme la norma de la partición tiende a cero y el número de segmentos $n \to \infty$, es la integral definida

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[f'(t_k^*)]^2 + [g'(t_k^{**})]^2}\, \Delta t_k = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt.$$

Por lo tanto, es razonable definir la longitud de la curva de A a B como esta integral.

DEFINICIÓN Si una curva C está definida en forma paramétrica por $x = f(t)$ y $y = g(t)$, $a \le t \le b$, donde f' y g' son continuas y no simultáneamente iguales a cero en $[a, b]$, y C se recorre sólo una vez conforme t aumenta de $t = a$ a $t = b$, entonces, la **longitud de C** es la integral definida

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt.$$

Una curva suave C no pasa dos veces por el mismo lugar ni invierte el sentido del movimiento durante el intervalo de tiempo $[a, b]$, puesto que $(f')^2 + (g')^2 > 0$ en todo el intervalo. En un punto donde una curva regresa sobre sí misma, la curva no es derivable, o ambas derivadas deben ser simultáneamente iguales a cero. Examinaremos este fenómeno en el capítulo 13, donde estudiaremos vectores tangentes a las curvas.

Si $x = f(t)$ y $y = g(t)$, y utilizamos la notación de Leibnitz, obtenemos el siguiente resultado para la longitud del arco:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt. \tag{3}$$

Si existen dos parametrizaciones diferentes para una curva C cuya longitud queremos determinar, no tiene importancia cuál utilicemos. Sin embargo, la parametrización que seleccionemos deberá cumplir con las condiciones establecidas en la definición de la longitud de C (vea el ejercicio 41 como ejemplo).

EJEMPLO 4 Con base en la definición, determine la longitud de la circunferencia de radio r definida en forma paramétrica por

$$x = r \cos t \qquad \text{y} \qquad y = r \operatorname{sen} t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Solución A medida que t varía de 0 a 2π, la circunferencia se recorre exactamente una vez; así, el perímetro es

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Encontramos que

$$\frac{dx}{dt} = -r \operatorname{sen} t, \qquad \frac{dy}{dt} = r \cos t$$

y

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = r^2(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t) = r^2.$$

Entonces,

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2}\, dt = r\big[\, t\,\big]_0^{2\pi} = 2\pi r. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 5 Obtenga la longitud de la astroide (figura 11.14)

$$x = \cos^3 t, \qquad y = \operatorname{sen}^3 t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Solución En virtud de la simetría de la curva en relación con los ejes de coordenadas, su longitud es cuatro veces la longitud de la parte en el primer cuadrante. Tenemos

$$\begin{aligned}
x = \cos^3 t, \qquad & y = \operatorname{sen}^3 t \\
\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 &= [3\cos^2 t(-\operatorname{sen} t)]^2 = 9\cos^4 t \operatorname{sen}^2 t \\
\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= [3\operatorname{sen}^2 t(\cos t)]^2 = 9\operatorname{sen}^4 t \cos^2 t \\
\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= \sqrt{9\cos^2 t \operatorname{sen}^2 t \underbrace{(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)}_{1}} \\
&= \sqrt{9\cos^2 t \operatorname{sen}^2 t} \\
&= 3\,|\cos t \operatorname{sen} t| \qquad \cos t \operatorname{sen} t \ge 0 \text{ para } 0 \le t \le \pi/2 \\
&= 3\cos t \operatorname{sen} t.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\text{Longitud de la parte en el primer cuadrante} &= \int_0^{\pi/2} 3\cos t \operatorname{sen} t\, dt \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2t\, dt \qquad \cos t \operatorname{sen} t = (1/2)\operatorname{sen} 2t \\
&= -\frac{3}{4}\cos 2t\Big]_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

La longitud de la astroide es cuatro veces esto: $4(3/2) = 6$. $\blacksquare$

EJEMPLO 6 Determine el perímetro de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Solución En forma paramétrica, representamos a la elipse con las ecuaciones $x = a \operatorname{sen} t$ y $y = b\cos t$, $a > b$ y $0 \le t \le 2\pi$. Entonces,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = a^2\cos^2 t + b^2\operatorname{sen}^2 t$$
$$= a^2 - (a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2 t$$
$$= a^2[\,1 - e^2\operatorname{sen}^2 t\,] \qquad e = 1 - \frac{b^2}{a^2}, \text{ no el número } 2.71828\ldots$$

A partir de la ecuación (3), el perímetro se obtiene mediante

$$P = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1 - e^2\operatorname{sen}^2 t}\,dt.$$

(Investigaremos el significado de e en la sección 11.7). La integral de P es no elemental y se conoce como la *integral elíptica completa de segunda clase*. Podemos calcular su valor con cualquier grado de precisión usando series infinitas de la siguiente manera. A partir del desarrollo binomial para $\sqrt{1 - x}$ en la sección 10.10, tenemos

$$\sqrt{1 - e^2\operatorname{sen}^2 t} = 1 - \frac{1}{2}e^2\operatorname{sen}^2 t - \frac{1}{2\cdot 4}e^4\operatorname{sen}^4 t - \cdots, \qquad |e\operatorname{sen} t| \le e < 1$$

Luego, en cada término de esta última expresión, aplicamos la fórmula integral 157 (que se incluye al final del libro) para $\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^n t\,dt$, con lo que se obtiene el perímetro

$$P = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1 - e^2\operatorname{sen}^2 t}\,dt$$
$$= 4a\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{2}e^2\right)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{1}{2\cdot 4}e^4\right)\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}e^6\right)\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\pi}{2}\right) - \cdots\right]$$
$$= 2\pi a\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{e^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\frac{e^6}{5} - \cdots\right].$$

Como $e < 1$, la serie del lado derecho converge por comparación con la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty}(e^2)^n$. ■

Longitud de una curva $y = f(x)$

La fórmula de la longitud en la sección 6.3 es un caso especial de la ecuación 3. Dada una función continuamente derivable $y = f(x)$, $a \le x \le b$, podemos asignar $x = t$ como un parámetro. Entonces, la gráfica de la función f es la curva C definida paramétricamente por

$$x = t \qquad \text{y} \qquad f(t), \qquad a \le t \le b,$$

un caso especial de lo que consideramos antes. Así,

$$\frac{dx}{dt} = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dt} = f'(t).$$

De la ecuación (1), tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = f'(t),$$

de lo cual obtenemos

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 1 + [\,f'(t)\,]^2$$
$$= 1 + [\,f'(x)\,]^2. \qquad t = x$$

Al sustituir en la ecuación (3), obtenemos la fórmula de la longitud de arco para la gráfica de $y = f(x)$, lo cual es congruente con la ecuación (3) de la sección 6.3.

Diferencial de longitud de arco

De acuerdo con la sección 6.3, podemos definir la función de la longitud del arco de una curva definida paramétricamente $x = f(t)$ y $y = g(t)$, $a \le t \le b$, como

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{[f'(z)]^2 + [g'(z)]^2}\, dz.$$

Así, por el teorema fundamental del cálculo,

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

La diferencial de la longitud del arco es

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt. \tag{4}$$

La ecuación (4) a menudo se abrevia como

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Al igual que en la sección 6.3, podemos integrar la diferencial ds entre los límites adecuados para obtener la longitud total de una curva.

He aquí un ejemplo donde usamos la fórmula de la longitud del arco para obtener el centroide de un arco.

EJEMPLO 7 Obtenga el centroide del arco en el primer cuadrante de la astroide del ejemplo 5.

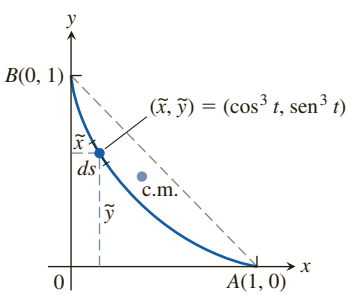


FIGURA 11.17 El centroide (centro de masa, c.m.) del arco de astroide del ejemplo 7.

Solución Suponemos que la densidad de la curva es $\delta = 1$, y calculamos la masa y los momentos de la curva alrededor de los ejes de coordenadas como lo hicimos en la sección 6.6.

La distribución de masa es simétrica con respecto a la recta $y = x$, de manera que $\bar{x} = \bar{y}$. Un segmento típico de la curva (figura 11.17) tiene masa

$$dm = 1 \cdot ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = 3 \cos t \operatorname{sen} t\, dt. \qquad \text{Del ejemplo 5}$$

La masa de la curva es

$$M = \int_0^{\pi/2} dm = \int_0^{\pi/2} 3 \cos t \operatorname{sen} t\, dt = \frac{3}{2}. \qquad \text{Otra vez del ejemplo 5}$$

El momento de la curva alrededor del eje x es

$$M_x = \int \tilde{y}\, dm = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 t \cdot 3 \cos t \operatorname{sen} t\, dt$$

$$= 3 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 t \cos t\, dt = 3 \cdot \frac{\operatorname{sen}^5 t}{5}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{3}{5}.$$

Así, concluimos que

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{3/5}{3/2} = \frac{2}{5}.$$

El centroide es el punto $(2/5, 2/5)$. ■

EJEMPLO 8 Encuentre el tiempo T_c que le toma a una cuenta sin fricción deslizarse a lo largo de la cicloide $x = a(t - \text{sen } t)$, $y = a(1 - \cos t)$ de $t = 0$ a $t = \pi$ (vea la figura 11.12).

Solución Con la ecuación (3) en la sección 11.1, obtenemos el tiempo

$$T_c = \int_{t=0}^{t=\pi} \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$$

para ds y y, expresadas en forma paramétrica en términos del parámetro t. Para la cicloide, $dx/dt = a(1 - \cos t)$ y $dy/dt = a \text{ sen } t$, de manera que

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \\ &= \sqrt{a^2\,(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \text{sen}^2\, t)}\, dt \\ &= \sqrt{a^2\,(2 - 2\cos t)}\, dt. \end{aligned}$$

Al sustituir ds y y en el integrando, se tiene que

$$\begin{aligned} T_c &= \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{a^2(2 - 2\cos t)}{2ga\,(1 - \cos t)}}\, dt \qquad y = a(1 - \cos t) \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{a}{g}}\, dt = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}, \end{aligned}$$

que es el tiempo que tarda la cuenta sin fricción en deslizarse por la cicloide a B, después de que ha partido del reposo en O (vea la figura 11.12). ■

Áreas de superficies de rotación

En la sección 6.4 obtuvimos fórmulas de integrales para el área de una superficie cuando una curva gira alrededor de un eje de coordenadas. Específicamente, encontramos que el área de la superficie es $S = \int 2\pi y\, ds$ cuando la rotación es en torno al eje x, y $S = \int 2\pi x\, ds$ cuando la rotación se efectúa alrededor del eje y. Si la curva está parametrizada por las ecuaciones $x = f(t)$ y $y = g(t)$, $a \le t \le b$, donde f y g son derivables continuamente y $(f')^2 + (g')^2 > 0$ para $[a, b]$, entonces, la diferencial de longitud de arco ds está dada por la ecuación (4). Esta observación conduce a las siguientes fórmulas para el área de superficies de rotación de curvas parametrizadas suaves.

Áreas de superficies de rotación de curvas parametrizadas

Si una curva suave $x = f(t)$ y $y = g(t)$, $a \le t \le b$, se recorre una sola vez a medida que t aumenta de a a b, entonces, las áreas de las superficies generadas al hacer girar la curva alrededor de los ejes de coordenadas son las siguientes.

1. Rotación alrededor del eje x ($y \ge 0$):

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \tag{5}$$

2. Rotación alrededor del eje y ($x \ge 0$):

$$S = \int_a^b 2\pi x \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \tag{6}$$

Al igual que con la longitud, podemos calcular el área de la superficie a partir de cualquier parametrización que cumpla con los criterios establecidos.

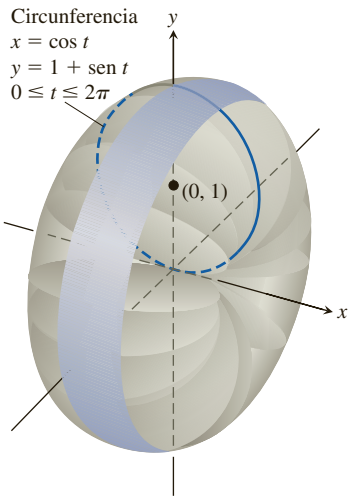


FIGURA 11.18 En el ejemplo 9 se calcula el área de la superficie de revolución barrida por esta curva parametrizada.

EJEMPLO 9 La parametrización estándar de la circunferencia de radio 1, con centro en el punto (0, 1) en el plano xy, es

$$x = \cos t, \qquad y = 1 + \operatorname{sen} t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Utilice esta parametrización para obtener el área de la superficie barrida al hacer girar la circunferencia alrededor del eje x (figura 11.18).

Solución Evaluamos la fórmula

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

La ecuación (5) para rotación alrededor del eje x; $y = 1 + \operatorname{sen} t \ge 0$

$$= \int_0^{2\pi} 2\pi(1 + \operatorname{sen} t)\sqrt{\underbrace{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2}_{1}}\, dt$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} (1 + \operatorname{sen} t)\, dt$$

$$= 2\pi \Big[t - \cos t \Big]_0^{2\pi} = 4\pi^2.$$

■

Ejercicios 11.2

Tangentes a curvas parametrizadas

En los ejercicios 1 a 14, determine la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto definido por el valor dado de t. Además, determine el valor de d^2y/dx^2 en este punto.

1. $x = 2\cos t, \quad y = 2\operatorname{sen} t, \quad t = \pi/4$
2. $x = \operatorname{sen} 2\pi t, \quad y = \cos 2\pi t, \quad t = -1/6$
3. $x = 4\operatorname{sen} t, \quad y = 2\cos t, \quad t = \pi/4$
4. $x = \cos t, \quad y = \sqrt{3}\cos t, \quad t = 2\pi/3$
5. $x = t, \quad y = \sqrt{t}, \quad t = 1/4$
6. $x = \sec^2 t - 1, \quad y = \tan t, \quad t = -\pi/4$
7. $x = \sec t, \quad y = \tan t, \quad t = \pi/6$
8. $x = -\sqrt{t+1}, \quad y = \sqrt{3t}, \quad t = 3$
9. $x = 2t^2 + 3, \quad y = t^4, \quad t = -1$
10. $x = 1/t, \quad y = -2 + \ln t, \quad t = 1$
11. $x = t - \operatorname{sen} t, \quad y = 1 - \cos t, \quad t = \pi/3$
12. $x = \cos t, \quad y = 1 + \operatorname{sen} t, \quad t = \pi/2$
13. $x = \dfrac{1}{t+1}, \quad y = \dfrac{t}{t-1}, \quad t = 2$
14. $x = t + e^t, \quad y = 1 - e^t, \quad t = 0$

Parametrizaciones definidas implícitamente

Suponiendo que las ecuaciones de los ejercicios 15 a 20 definen a x y y implícitamente como funciones derivables $x = f(t)$ y $y = g(t)$, determine la pendiente de la curva $x = f(t)$ y $y = g(t)$ para el valor dado de t.

15. $x^3 + 2t^2 = 9, \quad 2y^3 - 3t^2 = 4, \quad t = 2$
16. $x = \sqrt{5 - \sqrt{t}}, \quad y(t-1) = \sqrt{t}, \quad t = 4$
17. $x + 2x^{3/2} = t^2 + t, \quad y\sqrt{t+1} + 2t\sqrt{y} = 4, \quad t = 0$
18. $x\operatorname{sen} t + 2x = t, \quad t\operatorname{sen} t - 2t = y, \quad t = \pi$
19. $x = t^3 + t, \quad y + 2t^3 = 2x + t^2, \quad t = 1$
20. $t = \ln(x - t), \quad y = te^t, \quad t = 0$

Área

21. Obtenga el área bajo un arco de la cicloide
$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t).$$
22. Obtenga el área acotada por el eje y y la curva
$$x = t - t^2, \qquad y = 1 - e^{-t}.$$
23. Obtenga el área encerrada por la elipse
$$x = a\cos t, \qquad y = b\operatorname{sen} t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$
24. Obtenga el área debajo de $y = x^3$ sobre [0, 1], usando las siguientes parametrizaciones.
   a) $x = t^2, \quad y = t^6$ ***b)*** $x = t^3, \quad y = t^9$

Longitudes de curvas

Obtenga las longitudes de las curvas de los ejercicios 25 a 30.

25. $x = \cos t, \quad y = t + \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le \pi$
26. $x = t^3, \quad y = 3t^2/2, \quad 0 \le t \le \sqrt{3}$
27. $x = t^2/2, \quad y = (2t+1)^{3/2}/3, \quad 0 \le t \le 4$
28. $x = (2t+3)^{3/2}/3, \quad y = t + t^2/2, \quad 0 \le t \le 3$
29. $x = 8\cos t + 8t\operatorname{sen} t, \quad y = 8\operatorname{sen} t - 8t\cos t, \quad 0 \le t \le \pi/2$
30. $x = \ln(\sec t + \tan t) - \operatorname{sen} t, \quad y = \cos t, \quad 0 \le t \le \pi/3$

Área de superficies

En los ejercicios 31 a 34, encuentre las áreas de las superficies generadas por la rotación de las curvas alrededor de los ejes indicados.

31. $x = \cos t, \quad y = 2 + \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2p;$ eje x

32. $x = (2/3)t^{3/2}, \quad y = 2\sqrt{t}, \quad 0 \le t \le \sqrt{3}$; eje y

33. $x = t + \sqrt{2}, \quad y = (t^2/2) + \sqrt{2}t, \quad -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$; eje y

34. $x = \ln(\sec t + \tan t) - \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$, $0 \le t \le \pi/3$; eje x

35. Cono truncado El segmento de recta que une los puntos (0, 1) y (2, 2) se hace girar alrededor del eje x para generar un cono truncado. Determine el área de la superficie del cono truncado por medio de la parametrización $x = 2t$, $y = t + 1$, $0 \le t \le 1$. Verifique su resultado con la fórmula geométrica: Área $= \pi(r_1 + r_2)$ (longitud de la generatriz).

36. Un cono El segmento de recta que une el origen con el punto (h, r) se hace girar alrededor del eje x para generar un cono de altura h y y radio de la base r. Encuentre el área de la superficie del cono con las ecuaciones paramétricas $x = ht$, $y = rt$, $0 \le t \le 1$. Compruebe su respuesta con la fórmula geométrica: Área $= \pi r$ (longitud de la generatriz).

Centroides

37. Obtenga las coordenadas del centroide de la curva

$$x = \cos t + t \operatorname{sen} t, \quad y = \operatorname{sen} t - t \cos t, \quad 0 \le t \le \pi/2.$$

38. Obtenga las coordenadas del centroide de la curva

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le \pi.$$

39. Obtenga las coordenadas del centroide de la curva

$$x = \cos t, \quad y = t + \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le \pi.$$

T **40.** La mayoría de los cálculos de centroides para curvas se efectúan con la ayuda de una calculadora o computadora que permitan calcular integrales. Como ejemplo, determine, con precisión de centésimas, las coordenadas del centroide de la curva

$$x = t^3, \quad y = 3t^2/2, \quad 0 \le t \le \sqrt{3}.$$

Teoría y ejemplos

41. La longitud es independiente de la parametrización Para ilustrar el hecho de que los números que obtenemos para la longitud son independientes de la manera en que parametrizamos las curvas (excepto por restricciones menores que evitan el regreso mencionado anteriormente), calcule la longitud del semicírculo $y = \sqrt{1 - x^2}$ con estas dos parametrizaciones diferentes:

a) $x = \cos 2t, \quad y = \operatorname{sen} 2t, \; 0 \le t \le \pi/2.$

b) $x = \operatorname{sen} \pi t, \quad y = \cos \pi t, \; -1/2 \le t \le 1/2.$

42. ***a)*** Demuestre que la fórmula cartesiana

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

para la longitud de la curva $x = g(y)$, $c \le y \le d$ (sección 6.3, ecuación 4), es un caso especial de la fórmula paramétrica de longitud

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Emplee este resultado para obtener la longitud de cada curva.

b) $x = y^3/2$, $0 \le y \le 4/3$

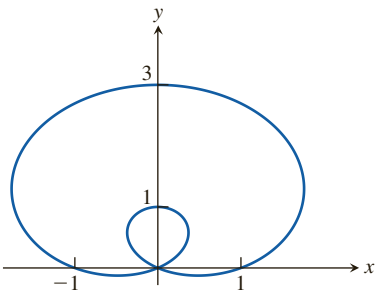
c) $x = \frac{3}{2}y^2/3$, $0 \le y \le 1$

43. La curva con ecuaciones paramétricas

$$x = (1 + 2 \operatorname{sen} \theta) \cos \theta, \quad y = (1 + 2 \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \theta$$

se llama *limaçon* (del francés, caracol) y se muestra en la siguiente figura. Determine los puntos (x, y) y las pendientes de las rectas tangentes a estos puntos para

a) $\theta = 0$. ***b)*** $\theta = \pi/2$. ***c)*** $\theta = 4\pi/3$.

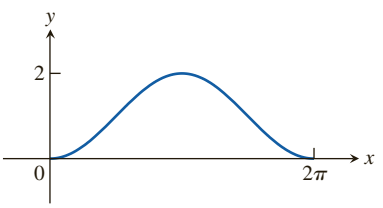


44. La curva con ecuaciones paramétricas

$$x = t, \quad y = 1 - \cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

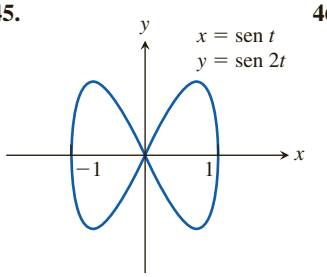
se llama *sinusoide* y se muestra en la siguiente figura. Obtenga el punto (x, y), donde la pendiente de la recta tangente es

a) la más grande. ***b)*** la más pequeña.

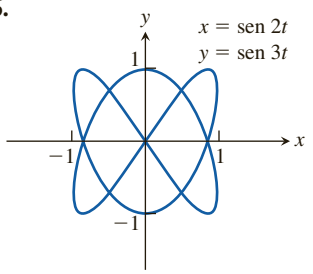


T Las curvas de los ejercicios 45 y 46 se llaman *curvas de Bowditch* o *figuras de Lissajous*. En cada caso, determine el punto en el interior del primer cuadrante donde la tangente a la curva es horizontal, así como la ecuación para las dos tangentes en el origen.

45.



46.



47. Cicloide

a) Obtenga la longitud de un arco de la cicloide

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

b) Obtenga el área de la superficie generada al hacer girar un arco de la cicloide del inciso *a)* alrededor del eje x para $a = 1$.

48. Volumen Obtenga el volumen generado al hacer girar la región acotada por el eje x y un arco de la cicloide

$$x = t - \operatorname{sen} t, \qquad y = 1 - \cos t$$

alrededor del eje x.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 49 a 52, utilice un software matemático y realice los siguientes pasos para la curva y el intervalo cerrado dados.

a) Grafique la curva junto con las poligonales que la aproximan cuando se consideran puntos de partición $n = 2, 4, 8$ en el intervalo. (Vea la figura 11.15).

b) Obtenga la aproximación correspondiente a la longitud de la curva sumando las longitudes de los segmentos de recta.

c) Calcule la longitud de la curva usando una integral. Compare sus aproximaciones para $n = 2, 4, 8$ con el valor real de la longitud dado por la integral. ¿Cómo se compara la longitud real con las aproximaciones cuando n aumenta? Explique su respuesta.

49. $x = \frac{1}{3}t^3, \quad y = \frac{1}{2}t^2, \quad 0 \le t \le 1$

50. $x = 2t^3 - 16t^2 + 25t + 5, \quad y = t^2 + t - 3, \quad 0 \le t \le 6$

51. $x = t - \cos t, \quad y = 1 + \operatorname{sen} t, \quad -\pi \le t \le \pi$

52. $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le \pi$

11.3 Coordenadas polares

En esta sección estudiaremos las coordenadas polares y su relación con las coordenadas cartesianas. Verá que las coordenadas polares son muy útiles cuando se calculan muchas de las integrales múltiples que se estudiarán en el capítulo 15.

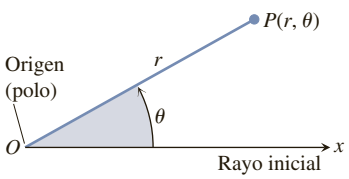


FIGURA 11.19 Para definir las coordenadas polares en el plano, iniciamos con un origen, llamado polo, y un rayo inicial.

Definición de las coordenadas polares

Para definir las coordenadas polares, primero fijamos un **origen** O (llamado **polo**) y un **rayo inicial** desde O (figura 11.19). Por lo regular, se elige el eje positivo x como el rayo inicial. Luego, se puede localizar cada punto P asignándole un **par de coordenadas polares** (r, θ), donde r es la distancia dirigida de O a P, y θ es el ángulo dirigido del rayo inicial al rayo OP. Así, el punto P se representa como

$$P(r, \theta)$$

Distancia dirigida de O a P — Ángulo dirigido del rayo inicial a OP

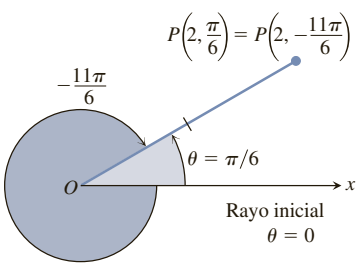


FIGURA 11.20 Las coordenadas polares no son únicas.

Al igual que en trigonometría, θ es positivo cuando se mide en sentido contrario al de las manecillas del reloj, y negativo cuando se mide en el sentido en que se mueven éstas. El ángulo asociado con un punto dado no es único. Mientras que un punto en el plano se identifica solamente con un par de coordenadas cartesianas, tiene un número infinito de pares de coordenadas polares. Por ejemplo, el punto a 2 unidades del origen a lo largo del rayo $\theta = \pi/6$ tiene coordenadas polares $r = 2$, $\theta = \pi/6$, pero también tiene coordenadas $r = 2$, $\theta = -11\pi/6$ (figura 11.20). En algunas situaciones permitimos que r sea negativa. Por esta razón, usamos la distancia dirigida en la definición de $P(r, \theta)$. El punto $P(2, 7\pi/6)$ puede obtenerse girando $7\pi/6$ radianes en sentido contrario al de las manecillas del reloj a partir del rayo inicial y dos unidades hacia delante (figura 11.21). También puede alcanzarse girando $\pi/6$ radianes en sentido contrario al de las manecillas del reloj a partir del rayo inicial y *retrocediendo* dos unidades. Así, el punto también tiene coordenadas polares $r = -2$, $\theta = \pi/6$.

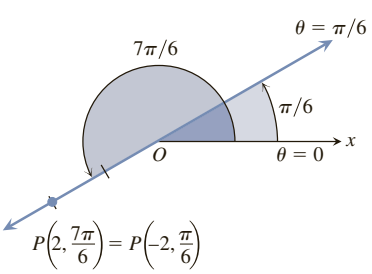


FIGURA 11.21 Las coordenadas polares pueden tener valores de r negativos.

EJEMPLO 1 Obtenga todas las coordenadas polares del punto $P(2, \pi/6)$.

Solución Trazamos el rayo inicial del sistema de coordenadas, dibujamos el rayo desde el origen que forma un ángulo de $\pi/6$ radianes con el rayo inicial, y marcamos el punto $(2, \pi/6)$ (figura 11.22). Después, encontramos los ángulos para los otros pares de coordenadas de P en los cuales $r = 2$ y $r = -2$.

Para $r = 2$, la lista completa de los ángulos es

$$\frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{6} \pm 2\pi, \quad \frac{\pi}{6} \pm 4\pi, \quad \frac{\pi}{6} \pm 6\pi, \ldots$$

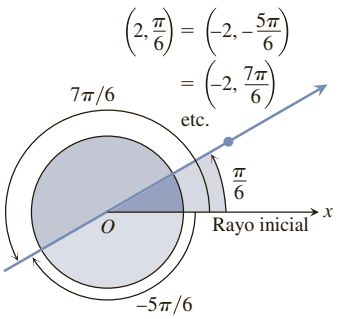


FIGURA 11.22 El punto $P(2, \pi/6)$ tiene un número infinito de pares de coordenadas polares (ejemplo 1).

Para $r = -2$, la lista de ángulos es

$$-\frac{5\pi}{6}, \quad -\frac{5\pi}{6} \pm 2\pi, \quad -\frac{5\pi}{6} \pm 4\pi, \quad -\frac{5\pi}{6} \pm 6\pi, \ldots$$

Los correspondientes pares de coordenadas de P son

$$\left(2, \frac{\pi}{6} + 2n\pi\right), \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

y

$$\left(-2, -\frac{5\pi}{6} + 2n\pi\right), \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Cuando $n = 0$, las fórmulas dan $(2, \pi/6)$ y $(-2, -5\pi/6)$. Cuando $n = 1$, dan $(2, 13\pi/6)$ y $(-2, 7\pi/6)$, y así sucesivamente. ■

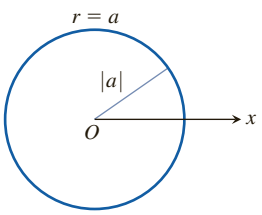


FIGURA 11.23 La ecuación polar de una circunferencia es $r = a$.

Ecuaciones polares y gráficas

Si se mantiene r fija en un valor constante $r = a \neq 0$, el punto $P(r, \theta)$ permanecerá a $|a|$ unidades del origen O. Como θ varía sobre cualquier intervalo de longitud 2π, P describe una circunferencia de radio $|a|$ con centro en O (figura 11.23).

Si mantenemos θ fijo en un valor constante $\theta = \theta_0$ y dejamos que r varíe entre $-\infty$ y ∞, el punto $P(r, \theta)$ describe una recta que pasa por O y que forma un ángulo de magnitud θ_0 con el rayo inicial. (Vea un ejemplo en la figura 11.21).

EJEMPLO 2 Una circunferencia o una recta pueden tener más de una ecuación polar.

a) $r = 1$ y $r = -1$ son las ecuaciones para la circunferencia de radio 1 centrada en O.

b) $\theta = \pi/6$, $\theta = 7\pi/6$ y $\theta = -5\pi/6$ son ecuaciones para la recta de la figura 11.22. ■

Las ecuaciones de la forma $r = a$ y $\theta = \theta_0$ pueden combinarse para definir regiones, segmentos y rayos.

EJEMPLO 3 Grafique los conjuntos de puntos cuyas coordenadas polares satisfacen las siguientes condiciones.

a) $1 \leq r \leq 2$ y $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$

b) $-3 \leq r \leq 2$ y $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

c) $\dfrac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \dfrac{5\pi}{6}$ (no hay restricción sobre r)

Solución Las gráficas se presentan en la figura 11.24. ■

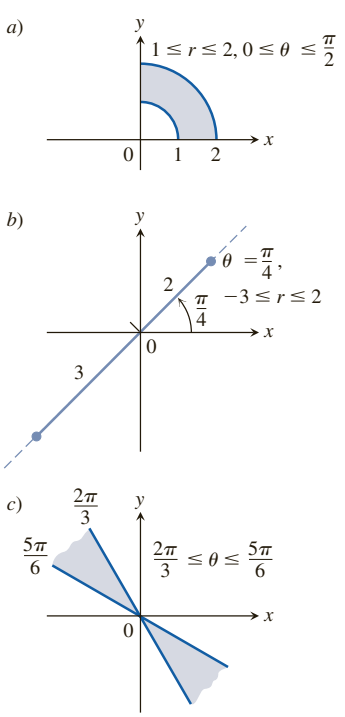


FIGURA 11.24 Las gráficas de desigualdades típicas en r y θ (ejemplo 3).

Relación entre coordenadas polares y cartesianas

Cuando usamos tanto el sistema de coordenadas polares como el de coordenadas cartesianas en un plano, colocamos los dos orígenes juntos y tomamos el rayo polar inicial como el eje x positivo. El rayo $\theta = \pi/2$, $r > 0$, se convierte en la parte positiva del eje y (figura

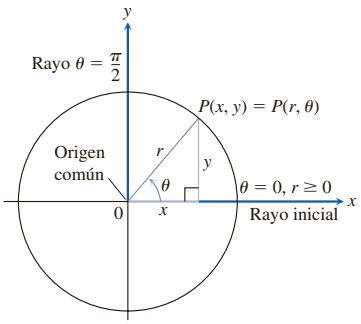


FIGURA 11.25 La manera usual de relacionar coordenadas polares y cartesianas.

11.25). Entonces, los dos sistemas de coordenadas están relacionados por las siguientes ecuaciones.

Ecuaciones que relacionan las coordenadas polares y cartesianas

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta, \qquad r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

Las primeras dos ecuaciones determinan unívocamente las coordenadas cartesianas x y y dadas las coordenadas polares r y θ. Por otro lado, si se conocen x y y, la tercera ecuación da dos posibles elecciones de r (un valor positivo y otro negativo). Para cada $(x, y) \neq (0, 0)$, existe un único $\theta \in [0, 2\pi)$ que satisface las dos primeras ecuaciones, cada una de las cuales da una representación en coordenadas polares del punto cartesiano (x, y). Las otras representaciones en coordenadas polares para el punto pueden determinarse a partir de estas dos, como en el ejemplo 1.

EJEMPLO 4 He aquí algunas curvas expresadas en términos tanto de coordenadas polares como cartesianas.

Ecuación polar	Equivalente cartesiano
$r\cos\theta = 2$	$x = 2$
$r^2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta = 4$	$xy = 4$
$r^2\cos^2\theta - r^2\,\text{sen}^2\,\theta = 1$	$x^2 - y^2 = 1$
$r = 1 + 2r\cos\theta$	$y^2 - 3x^2 - 4x - 1 = 0$
$r = 1 - \cos\theta$	$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2x^3 + 2xy^2 - y^2 = 0$

Algunas curvas se expresan mejor en coordenadas polares; otras no. ■

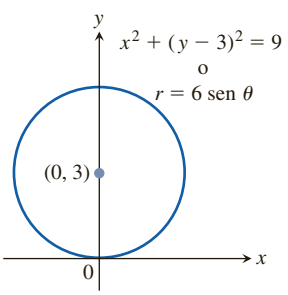


FIGURA 11.26 La circunferencia del ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Determine la ecuación polar para la circunferencia $x^2 + (y - 3)^2 = 9$ (figura 11.26).

Solución Aplicamos las ecuaciones que relacionan las coordenadas polares con las cartesianas:

$$\begin{aligned} x^2 + (y - 3)^2 &= 9 \\ x^2 + y^2 - 6y + 9 &= 9 && \text{Desarrolle } (y - 3)^2. \\ x^2 + y^2 - 6y &= 0 && \text{Cancelación} \\ r^2 - 6r\,\text{sen}\,\theta &= 0 && x^2 + y^2 = r^2,\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ r = 0 \quad \text{o} \quad r - 6\,\text{sen}\,\theta &= 0 \\ r &= 6\,\text{sen}\,\theta && \text{Incluye ambas posibilidades.} \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6 Sustituya las siguientes ecuaciones polares por ecuaciones cartesianas equivalentes e identifique sus gráficas.

a) $r\cos\theta = -4$

b) $r^2 = 4r\cos\theta$

c) $r = \dfrac{4}{2\cos\theta - \text{sen}\,\theta}$

Solución Usamos las sustituciones $r\cos\theta = x$, $r\,\text{sen}\,\theta = y$ y $r^2 = x^2 + y^2$.

a) $r\cos\theta = -4$

La ecuación cartesiana es:

$$\begin{aligned} r\cos\theta &= -4 \\ x &= -4 && \text{Sustitución} \end{aligned}$$

La gráfica es: Recta vertical que pasa por $x = -4$ en el eje x

b) $r^2 = 4r\cos\theta$

La ecuación cartesiana es:

$$\begin{aligned} r^2 &= 4r\cos\theta \\ x^2 + y^2 &= 4x && \text{Sustitución} \\ x^2 - 4x + y^2 &= 0 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 &= 4 && \text{Complete el cuadrado} \\ (x-2)^2 + y^2 &= 4 && \text{Factorice} \end{aligned}$$

La gráfica es: Circunferencia, radio 2, centro $(h, k) = (2, 0)$

c) $r = \dfrac{4}{2\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}$

La ecuación cartesiana es:

$$\begin{aligned} r(2\cos\theta - \operatorname{sen}\theta) &= 4 \\ 2r\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta &= 4 && \text{Multiplique por } r \\ 2x - y &= 4 && \text{Sustitución} \\ y &= 2x - 4 && \text{Despeje } y. \end{aligned}$$

La gráfica es: Recta, pendiente $m = 2$, intersección en y, $b = -4$ ■

Ejercicios 11.3

Coordenadas polares

1. ¿Cuáles pares de coordenadas polares representan el mismo punto?

a) $(3, 0)$ ***b)*** $(-3, 0)$ ***c)*** $(2, 2\pi/3)$

d) $(2, 7\pi/3)$ ***e)*** $(-3, \pi)$ ***f)*** $(2, \pi/3)$

g) $(-3, 2\pi)$ ***h)*** $(-2, -\pi/3)$

2. ¿Cuáles pares de coordenadas polares representan el mismo punto?

a) $(-2, \pi/3)$ ***b)*** $(2, -\pi/3)$ ***c)*** (r, θ)

d) $(r, \theta + \pi)$ ***e)*** $(-r, \theta)$ ***f)*** $(2, -2\pi/3)$

g) $(-r, \theta + \pi)$ ***h)*** $(-2, 2\pi/3)$

3. Grafique los siguientes puntos (dados en coordenadas polares). Luego, determine todas las coordenadas polares de cada punto.

a) $(2, \pi/2)$ ***b)*** $(2, 0)$

c) $(-2, \pi\ \ 2)$ ***d)*** $(-2, 0)$

4. Grafique los siguientes puntos (dados en coordenadas polares). Luego, determine todas las coordenadas polares de cada punto.

a) $(3, \pi/4)$ ***b)*** $(-3, \pi/4)$

c) $(3, -\pi/4)$ ***d)*** $(-3, -\pi/4)$

Conversión de coordenadas polares a cartesianas

5. Encuentre las coordenadas cartesianas de los puntos del ejercicio 1.

6. Obtenga las coordenadas cartesianas de los siguientes puntos (identificados con coordenadas polares).

a) $\left(\sqrt{2}, \pi/4\right)$ ***b)*** $(1, 0)$

c) $(0, \pi/2)$ ***d)*** $\left(-\sqrt{2}, \pi/4\right)$

e) $(-3, 5\pi/6)$ ***f)*** $(5, \tan^{-1}(4/3))$

g) $(-1, 7\pi)$ ***h)*** $\left(2\sqrt{3}, 2\pi/3\right)$

Conversión de coordenadas cartesianas a polares

7. Obtenga las coordenadas polares, $0 \le \theta < 2\pi$ y $r \ge 0$, de los siguientes puntos dados en coordenadas cartesianas.

a) $(1, 1)$ ***b)*** $(-3, 0)$

c) $\left(\sqrt{3}, -1\right)$ ***d)*** $(-3, 4)$

8. Obtenga las coordenadas polares, $-\pi \le \theta < \pi$ y $r \ge 0$, de los siguientes puntos dados en coordenadas cartesianas.

a) $(-2, -2)$ ***b)*** $(0, 3)$

c) $\left(-\sqrt{3}, 1\right)$ ***d)*** $(5, -12)$

9. Determine las coordenadas polares, $0 \le \theta < 2\pi$ y $r \le 0$, de los siguientes puntos dados en coordenadas cartesianas.

a) $(3, 3)$ ***b)*** $(-1, 0)$

c) $\left(-1, \sqrt{3}\right)$ ***d)*** $(4, -3)$

10. Obtenga las coordenadas polares, $-\pi \le \theta < 2\pi$ y $r \le 0$, de los siguientes puntos dados en coordenadas cartesianas.

a) $(-2, 0)$ ***b)*** $(1, 0)$

c) $(0, -3)$ ***d)*** $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

Gráficas de puntos en coordenadas polares

Grafique los conjuntos de puntos cuyas coordenadas polares satisfacen las ecuaciones y desigualdades de los ejercicios 11 a 26.

11. $r = 2$ **12.** $0 \le r \le 2$

13. $r \ge 1$ **14.** $1 \le r \le 2$

15. $0 \le \theta \le \pi/6, \quad r \ge 0$ **16.** $\theta = 2\pi/3, \quad r \le -2$

17. $\theta = \pi/3, \quad -1 \le r \le 3$ **18.** $\theta = 11\pi/4, \quad r \ge -1$

19. $\theta = \pi/2, \quad r \ge 0$ **20.** $\theta = \pi/2, \quad r \le 0$

21. $0 \le \theta \le \pi, \quad r = 1$ **22.** $0 \le \theta \le \pi, \quad r = -1$

23. $\pi/4 \le \theta \le 3\pi/4, \quad 0 \le r \le 1$

24. $-\pi/4 \le \theta \le \pi/4, \quad -1 \le r \le 1$

25. $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2, \quad 1 \le r \le 2$

26. $0 \le \theta \le \pi/2, \quad 1 \le |r| \le 2$

Conversión de ecuaciones polares a cartesianas

Sustituya las ecuaciones polares de los ejercicios 27 a 52 por las ecuaciones cartesianas equivalentes. Luego, describa o identifique la gráfica.

27. $r \cos \theta = 2$ **28.** $r \operatorname{sen} \theta = -1$

29. $r \operatorname{sen} \theta = 0$ **30.** $r \cos \theta = 0$

31. $r = 4 \csc \theta$ **32.** $r = -3 \sec \theta$

33. $r \cos \theta + r \operatorname{sen} \theta = 1$ **34.** $r \operatorname{sen} \theta = r \cos \theta$

35. $r^2 = 1$ **36.** $r^2 = 4r \operatorname{sen} \theta$

37. $r = \dfrac{5}{\operatorname{sen} \theta - 2 \cos \theta}$ **38.** $r^2 \operatorname{sen} 2\theta = 2$

39. $r = \cot \theta \csc \theta$ **40.** $r = 4 \tan \theta \sec \theta$

41. $r = \csc \theta \, e^{r \cos \theta}$ **42.** $r \operatorname{sen} \theta = \ln r + \ln \cos \theta$

43. $r^2 + 2r^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta = 1$ **44.** $\cos^2 \theta = \operatorname{sen}^2 \theta$

45. $r^2 = -4r \cos \theta$ **46.** $r^2 = -6r \operatorname{sen} \theta$

47. $r = 8 \operatorname{sen} \theta$ **48.** $r = 3 \cos \theta$

49. $r = 2 \cos \theta + 2 \operatorname{sen} \theta$ **50.** $r = 2 \cos \theta - \operatorname{sen} \theta$

51. $r \operatorname{sen}\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) = 2$ **52.** $r \operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi}{3} - \theta\right) = 5$

Conversión de ecuaciones cartesianas a polares

Sustituya las ecuaciones cartesianas de los ejercicios 53 a 66 por las ecuaciones polares equivalentes.

53. $x = 7$ **54.** $y = 1$ **55.** $x = y$

56. $x - y = 3$ **57.** $x^2 + y^2 = 4$ **58.** $x^2 - y^2 = 1$

59. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ **60.** $xy = 2$

61. $y^2 = 4x$ **62.** $x^2 + xy + y^2 = 1$

63. $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ **64.** $(x - 5)^2 + y^2 = 25$

65. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$ **66.** $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 16$

67. Obtenga todas las coordenadas polares del origen.

68. Rectas verticales y horizontales

a) Demuestre que toda recta vertical en el plano xy tiene una ecuación polar de la forma $r = a \sec \theta$.

b) Determine la ecuación polar análoga de las rectas horizontales en el plano xy.

11.4 Gráficas de ecuaciones en coordenadas polares

Con frecuencia es útil graficar una ecuación, expresada en coordenadas polares, en el plano cartesiano xy. Esta sección describe algunas técnicas para graficar estas ecuaciones usando simetrías y tangentes a la gráfica.

Simetría

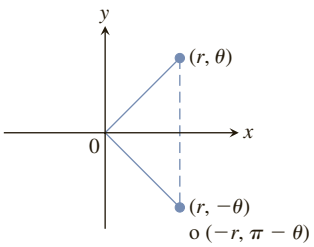
La figura 11.27 ilustra las pruebas estándar de simetría para coordenadas polares. El siguiente resumen señala cómo se relacionan los puntos simétricos.

Pruebas de simetría para gráficas polares en el plano cartesiano xy

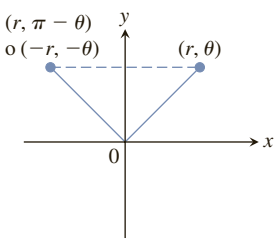
1. *Simetría con respecto al eje x:* Si el punto (r, θ) está en la gráfica, entonces, el punto $(r, -\theta)$ o $(-r, \pi - \theta)$ se halla sobre la gráfica (figura 11.27*a*).

2. *Simetría con respecto al eje y:* Si el punto (r, θ) se encuentra sobre la gráfica, entonces, el punto $(r, \pi - \theta)$ o $(-r, -\theta)$ se halla sobre la gráfica (figura 11.27*b*).

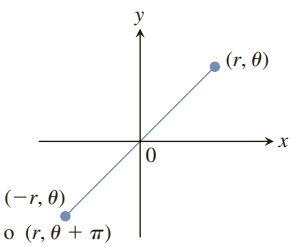
3. *Simetría con respecto al origen:* Si el punto (r, θ) se encuentra sobre la gráfica, entonces, el punto $(-r, \theta)$ o $(r, \theta + \pi)$ se halla sobre la gráfica (figura 11.27*c*).



a) Con respecto al eje x



b) Con respecto al eje y



c) Con respecto al origen

FIGURA 11.27 Tres pruebas para la simetría en coordenadas polares.

Pendiente

La pendiente de una curva polar $r = f(\theta)$ en el plano xy está dada por dy/dx, que no es $r' = df/d\theta$. Para entender por qué, piense en la gráfica de f como la gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta = f(\theta)\,\text{sen}\,\theta.$$

Si f es una función derivable de θ, entonces, también lo son x y y, y cuando $dx/d\theta \neq 0$, podemos calcular dy/dx con la fórmula paramétrica

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$$ Sección 11.2, ecuación (1) con $t = \theta$

$$= \frac{\dfrac{d}{d\theta}(f(\theta)\cdot\,\text{sen}\,\theta)}{\dfrac{d}{d\theta}(f(\theta)\cdot\cos\theta)}$$

$$= \frac{\dfrac{df}{d\theta}\,\text{sen}\,\theta + f(\theta)\cos\theta}{\dfrac{df}{d\theta}\cos\theta - f(\theta)\,\text{sen}\,\theta}$$ Regla de productos para derivadas

Así, vemos que dy/dx no es lo mismo que $df/d\theta$.

Pendiente de la curva $r = f(\theta)$ en el plano cartesiano xy

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(r,\,\theta)} = \frac{f'(\theta)\,\text{sen}\,\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\,\text{sen}\,\theta}$$

siempre y cuando $dx/d\theta \neq 0$ en (r, θ).

Si la curva $r = f(\theta)$ pasa por el origen cuando $\theta = \theta_0$, entonces, $f(\theta_0) = 0$, y la ecuación para la pendiente da

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,\,\theta_0)} = \frac{f'(\theta_0)\,\text{sen}\,\theta_0}{f'(\theta_0)\cos\theta_0} = \tan\theta_0.$$

Si la gráfica de $r = f(\theta)$ pasa por el origen cuando $\theta = \theta_0$, la pendiente de la curva ahí es $\tan\theta_0$. La razón por la que decimos "pendiente en $(0, \theta_0)$" y no sólo "pendiente en el origen" es que una curva polar puede pasar por el origen (o cualquier punto) más de una vez, con pendientes diferentes para distintos valores de θ. Sin embargo, éste no es el caso de nuestro primer ejemplo.

EJEMPLO 1 Grafique la curva $r = 1 - \cos\theta$ en el plano cartesiano xy.

Solución La curva es simétrica con respecto al eje x porque

$$(r, \theta) \text{ en la gráfica, } \Rightarrow r = 1 - \cos\theta$$
$$\Rightarrow r = 1 - \cos(-\theta) \qquad \cos\theta = \cos(-\theta)$$
$$\Rightarrow (r, -\theta) \text{ en la gráfica.}$$

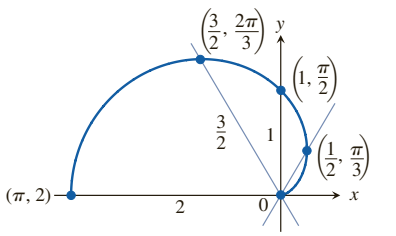
A medida que θ aumenta de 0 a π, $\cos\theta$ disminuye de 1 a -1, y $r = 1 - \cos\theta$ aumenta de un valor mínimo de 0 a un valor máximo de 2. Conforme θ se incrementa de π a 2π, $\cos\theta$ aumenta de -1 a 1 y r decrece de 2 a 0. La curva comienza a repetirse cuando $\theta = 2\pi$ porque el coseno tiene un periodo de 2π.

La curva deja el origen con pendiente $\tan(0) = 0$ y regresa al origen con pendiente $\tan(2\pi) = 0$.

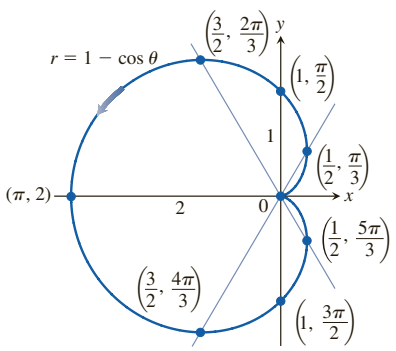
Elaboramos una tabla de valores de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$, graficamos los puntos, trazamos una curva suave que pase por ellos con una tangente horizontal en el origen, y reflejamos la curva con respecto al eje x para completar la gráfica (figura 11.28). La curva se llama *cardioide* debido a su forma de corazón. ■

θ	$r = 1 - \cos\theta$
0	0
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3}{2}$
π	2

a)



b)



c)

FIGURA 11.28 Los pasos al graficar la cardioide $r = 1 - \cos\theta$ (ejemplo 1). La flecha señala la dirección de aumento de θ.

EJEMPLO 2 Grafique la curva $r^2 = 4\cos\theta$ en el plano cartesiano xy.

Solución La ecuación $r^2 = 4\cos\theta$ requiere que $\cos\theta \geq 0$, de manera que obtenemos toda la gráfica completa variando θ de $-\pi/2$ a $\pi/2$. La curva es simétrica con respecto al eje x porque

$$\begin{aligned}(r, \theta) \text{ en la gráfica} &\Rightarrow r^2 = 4\cos\theta \\ &\Rightarrow r^2 = 4\cos(-\theta) \qquad \cos\theta = \cos(-\theta) \\ &\Rightarrow (r, -\theta) \text{ en la gráfica.}\end{aligned}$$

La curva también es simétrica con respecto al origen porque

$$\begin{aligned}(r, \theta) \text{ en la gráfica} &\Rightarrow r^2 = 4\cos\theta \\ &\Rightarrow (-r)^2 = 4\cos\theta \\ &\Rightarrow (-r, \theta) \text{ en la gráfica.}\end{aligned}$$

Estas dos simetrías juntas implican simetría con respecto al eje y.

La curva pasa por el origen cuando $\theta = -\pi/2$ y $\theta = \pi/2$. Tiene una tangente vertical en ambos casos porque $\tan\theta$ es infinita.

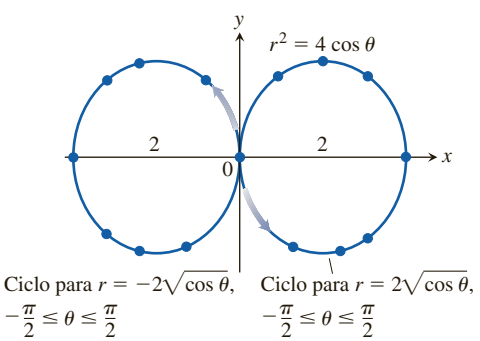
Para cada valor de θ en el intervalo entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, la fórmula $r^2 = 4\cos\theta$ da dos valores para r:

$$r = \pm 2\sqrt{\cos\theta}.$$

Elaboramos una pequeña tabla de valores, graficamos los puntos correspondientes y usamos como guía la información acerca de la simetría y las tangentes para unir los puntos mediante una curva suave (figura 11.29).

θ	$\cos\theta$	$r = \pm 2\sqrt{\cos\theta}$
0	1	± 2
$\pm\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\approx \pm 1.9$
$\pm\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\approx \pm 1.7$
$\pm\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\approx \pm 1.4$
$\pm\frac{\pi}{2}$	0	0

a)



b)

FIGURA 11.29 La gráfica de $r^2 = 4\cos\theta$. Las flechas indican la dirección de aumento de θ. Los valores de r en la tabla están redondeados (ejemplo 2). ■

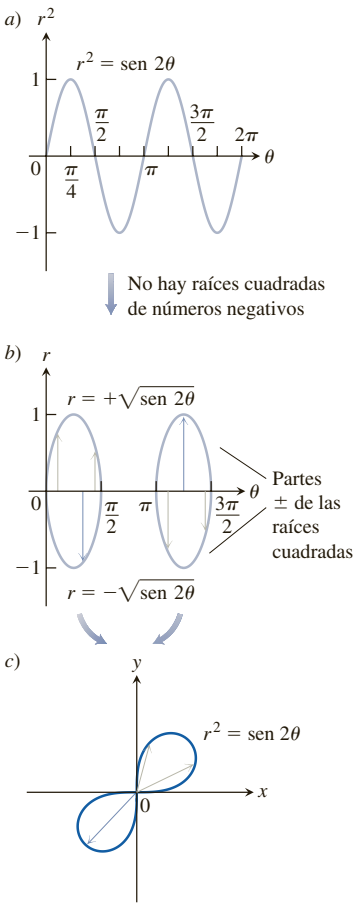


FIGURA 11.30 Para trazar $r = f(\theta)$ en el plano cartesiano $r\theta$ en *b*), primero trazamos $r^2 = \text{sen } 2\theta$ en el plano $r^2\theta$ en *a*) y, luego, ignoramos los valores de θ para los cuales sen 2θ es negativo. Los radios del dibujo en *b*) cubren la gráfica polar de la lemniscata en *c*) dos veces (ejemplo 3).

Convertir una gráfica del plano $r\theta$ al xy

Una manera de graficar una ecuación polar $r = f(\theta)$ en el plano xy consiste en elaborar una tabla de valores (r, θ), graficar los puntos correspondientes y unirlos en orden creciente de θ. Esto puede funcionar bien si hay suficientes puntos para revelar todos los lazos y las depresiones en la gráfica. Otro método de graficación es el siguiente:

1. Primero, grafique $r = f(\theta)$ en el plano *cartesiano* $r\theta$.
2. Luego, use la gráfica cartesiana como una "tabla" y guía para bosquejar la gráfica en coordenadas *polares* en el plano xy.

En ocasiones, este método es mejor que graficar primero los puntos, porque la gráfica cartesiana, aunque se dibuje de prisa, revela de inmediato dónde r es positiva, negativa y dónde no existe, así como dónde r es creciente o decreciente. He aquí un ejemplo.

EJEMPLO 3 Grafique la curva *lemniscata* $r^2 = \text{sen } 2\theta$ en el plano cartesiano xy.

Solución Empezamos por graficar r^2 (no r) como una función de θ en el plano cartesiano $r^2\theta$. Observe la figura 11.30*a*). Pasamos de allí a la gráfica de $r = \pm\sqrt{\text{sen } 2\theta}$ en el plano $r\theta$ (figura 11.30*b*), y luego trazamos la gráfica polar (figura 11.30*c*). La gráfica en la figura 11.30*b*) "cubre" dos veces la gráfica polar final de la figura 11.30*c*). Podríamos haber usado cualquier ciclo, o bien, las dos mitades superiores o las dos mitades inferiores de la gráfica. Sin embargo, la cobertura doble no está de más al graficar y, de este modo, aprendemos un poco más acerca del comportamiento de la función. ■

USO DE LA TECNOLOGÍA **Graficación de curvas polares en forma paramétrica**

En el caso de curvas polares complicadas, sería recomendable utilizar una calculadora graficadora o una computadora para obtener la curva. Si el dispositivo no traza gráficas polares directamente, podemos convertir $r = f(\theta)$ a la forma paramétrica usando las ecuaciones

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta = f(\theta)\,\text{sen}\,\theta.$$

Luego, usamos el dispositivo para obtener una curva parametrizada en el plano cartesiano xy. Tal vez sea necesario usar el parámetro t en vez de θ para el dispositivo de graficación.

Ejercicios 11.4

Simetrías y gráficas polares

Identifique las simetrías de las curvas en los ejercicios 1 a 12. Luego, trace las curvas.

1. $r = 1 + \cos\theta$
2. $r = 2 - 2\cos\theta$
3. $r = 1 - \text{sen}\,\theta$
4. $r = 1 + \text{sen}\,\theta$
5. $r = 2 + \text{sen}\,\theta$
6. $r = 1 + 2\,\text{sen}\,\theta$
7. $r = \text{sen}\,(\theta/2)$
8. $r = \cos(\theta/2)$
9. $r^2 = \cos\theta$
10. $r^2 = \text{sen}\,\theta$
11. $r^2 = -\text{sen}\,\theta$
12. $r^2 = -\cos\theta$

Grafique las lemniscatas de los ejercicios 13 a 16. ¿Qué simetrías tienen estas curvas?

13. $r^2 = 4\cos 2\theta$
14. $r^2 = 4\,\text{sen}\,2\theta$
15. $r^2 = -\text{sen}\,2\theta$
16. $r^2 = -\cos 2\theta$

Pendientes de curvas polares en el plano xy

Obtenga las pendientes de las curvas de los ejercicios 17 a 20 en los puntos dados. Trace las curvas con sus tangentes en estos puntos.

17. Cardioide $r = -1 + \cos\theta$; $\theta = \pm\pi/2$
18. Cardioide $r = -1 + \text{sen}\,\theta$; $\theta = 0, \pi$
19. Rosa de cuatro pétalos $r = \text{sen}\,2\theta$; $\theta = \pm\pi/4, \pm 3\pi/4$
20. Rosa de cuatro pétalos $r = \cos 2\theta$; $\theta = 0, \pm\pi/2, \pi$

Gráficas de limaçones

Grafique los limaçones de los ejercicios 21 a 24. Limaçon (la ç se pronuncia como *s*) es un arcaísmo francés que quiere decir caracol. Usted entenderá el motivo del nombre cuando grafique los limaçones del ejercicio 21. Las ecuaciones para los limaçones tienen la forma $r = a \pm b\cos\theta$ o $r = a \pm b\,\text{sen}\,\theta$. Hay cuatro formas básicas.

21. Limaçones con un lazo interior

a) $r = \frac{1}{2} + \cos\theta$ ***b)*** $r = \frac{1}{2} + \text{sen}\,\theta$

22. Cardioides

a) $r = 1 - \cos\theta$ ***b)*** $r = -1 + \text{sen}\,\theta$

23. Limaçones con concavidades

a) $r = \frac{3}{2} + \cos\theta$ ***b)*** $r = \frac{3}{2} - \text{sen}\,\theta$

24. Limaçones ovalados

a) $r = 2 + \cos\theta$ ***b)*** $r = -2 + \text{sen}\,\theta$

Gráficas de curvas y regiones polares en el plano *xy*

25. Trace la región definida por las desigualdades $-1 \le r \le 2$ y $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$.

26. Trace la región definida por las desigualdades $0 \le r \le 2\sec\theta$ y $-\pi/4 \le \theta \le \pi/4$.

En los ejercicios 27 y 28, bosqueje la región definida por la desigualdad.

27. $0 \le r \le 2 - 2\cos\theta$ **28.** $0 \le r^2 \le \cos\theta$

T **29.** ¿Cuál de las siguientes ecuaciones tiene la misma gráfica que $r = 1 - \cos\theta$?

a) $r = -1 - \cos\theta$ ***b)*** $r = 1 + \cos\theta$

Confirme su respuesta algebraicamente.

T **30.** ¿Cuál de las siguientes ecuaciones tiene la misma gráfica que $r = \cos 2\theta$?

a) $r = -\text{sen}\,(2\theta + \pi/2)$ ***b)*** $r = -\cos(\theta/2)$

Confirme su respuesta algebraicamente.

T **31. Una rosa dentro de una rosa** Grafique la ecuación $r = 1 - 2\,\text{sen}\,3\theta$.

T **32. La nefroide de Freeth** Grafique la nefroide de Freeth:

$$r = 1 + 2\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}.$$

T **33. Rosas** Grafique las rosas $r = \cos m\theta$ para $m = 1/3$, 2, 3 y 7.

T **34. Espirales** Las coordenadas polares son ideales para definir las espirales. Grafique las siguientes espirales.

a) $r = \theta$

b) $r = -\theta$

c) *Una espiral logarítmica*: $r = e^{\theta/10}$

d) *Una espiral hiperbólica*: $r = 8/\theta$

e) *Una hipérbola equilátera*: $r = \pm 10/\sqrt{\theta}$

(Use diferentes colores para las dos ramas).

T **35.** Grafique la ecuación $r = \text{sen}\left(\frac{8}{7}\theta\right)$ para $0 \le \theta \le 14\pi$.

T **36.** Grafique la ecuación

$$r = \text{sen}^2(2.3\theta) + \cos^4(2.3\theta)$$

para $0 \le \theta \le 10\pi$.

11.5 Áreas y longitudes en coordenadas polares

Esta sección muestra cómo calcular el área de regiones planas y longitudes de curvas en coordenadas polares. Las ideas detrás de las definiciones son las mismas que antes, pero las fórmulas son diferentes para coordenadas polares y para coordenadas cartesianas.

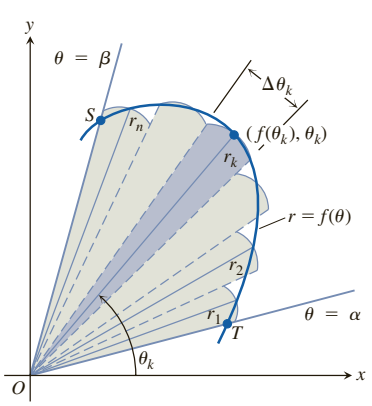


FIGURA 11.31 Para deducir una fórmula para el área de la región *OTS*, aproximamos la región con sectores circulares en forma de abanico.

Área en el plano

La región *OTS* de la figura 11.31 está acotada por los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ y la curva $r = f(\theta)$. Aproximamos la región con n sectores circulares en forma de abanico y que no se traslapan, con base en una partición P del ángulo TOS. El sector típico tiene un radio $r_k = f(\theta_k)$ y un ángulo central de $\Delta\theta_k$ radianes. Su área es $\Delta\theta_k/2\pi$ veces el área de una circunferencia de radio r_k, o

$$A_k = \frac{1}{2}r_k^2\,\Delta\theta_k = \frac{1}{2}\big(f(\theta_k)\big)^2\,\Delta\theta_k.$$

El área de la región *OTS* es aproximadamente

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\big(f(\theta_k)\big)^2\,\Delta\theta_k.$$

Si f es continua, esperamos que las aproximaciones mejoren conforme la norma de la partición P tiende a cero, donde la norma de P es el valor más grande de $\Delta\theta_k$. Esto nos lleva a la siguiente fórmula que define el área de la región:

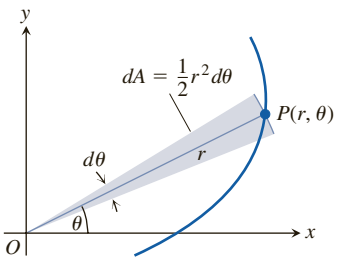


FIGURA 11.32 La diferencial del área dA para la curva $r = f(\theta)$.

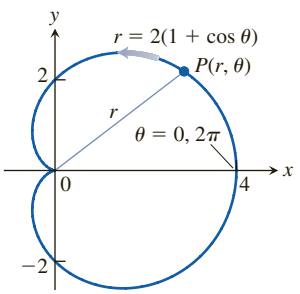


FIGURA 11.33 La cardioide del ejemplo 1.

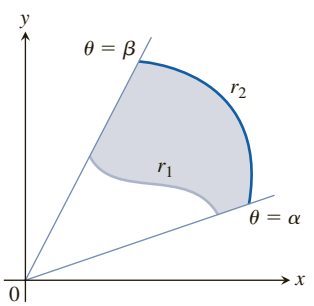


FIGURA 11.34 El área de la región sombreada se calcula restando el área de la región entre r_1 y el origen del área de la región entre r_2 y el origen.

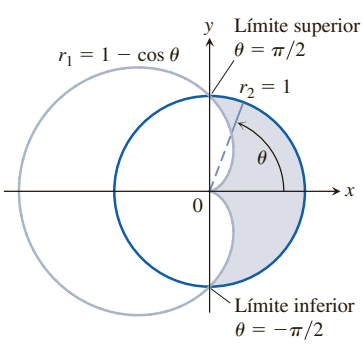


FIGURA 11.35 La región y los límites de integración del ejemplo 2.

$$A = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\big(f(\theta_k)\big)^2\,\Delta\theta_k$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}\big(f(\theta)\big)^2\,d\theta.$$

Área de la región en forma de abanico entre el origen y la curva $r = f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}r^2\,d\theta$$

Ésta es la integral de la **diferencial del área** (figura 11.32)

$$dA = \frac{1}{2}r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\big(f(\theta)\big)^2 d\theta.$$

EJEMPLO 1 Encuentre el área de la región en el plano xy, acotada por la cardioide $r = 2(1 + \cos\theta)$.

Solución Graficamos la cardioide (figura 11.33) y determinamos que el radio OP barre la región exactamente una vez cuando θ varía de 0 a 2π. Por lo tanto, el área es

$$\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{1}{2}r^2\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\cdot 4(1 + \cos\theta)^2\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} 2(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(2 + 4\cos\theta + 2\cdot\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= \left[3\theta + 4\,\text{sen}\,\theta + \frac{\text{sen}\,2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 6\pi - 0 = 6\pi. \quad \blacksquare$$

Para hallar el área de la región como la de la figura 11.34, la cual se encuentra entre dos curvas polares $r_1 = r_1(\theta)$ y $r_2 = r_2(\theta)$ desde $\theta = \alpha$ hasta $\theta = \beta$, restamos la integral de $(1/2)r_1^2\,d\theta$ de la integral $(1/2)r_2^2\,d\theta$. Esto conduce a la siguiente fórmula.

Área de la región $0 \le r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}r_2^2\,d\theta - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}r_1^2\,d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}\big(r_2^2 - r_1^2\big)\,d\theta \qquad (1)$$

EJEMPLO 2 Obtenga el área de la región que se encuentra dentro de la circunferencia $r = 1$ y fuera de la cardioide $r = 1 - \cos\theta$.

Solución Trazamos la región para determinar sus fronteras y obtener los límites de integración (figura 11.35). La curva exterior es $r_2 = 1$, la curva interior es $r_1 = 1 - \cos\theta$, y θ varía de $-\pi/2$ a $\pi/2$. El área, a partir de la ecuación (1), es

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(r_2^2 - r_1^2\right) d\theta$$

$$= 2\int_{0}^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(r_2^2 - r_1^2\right) d\theta \qquad \text{Simetría}$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} (1 - (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta))\, d\theta \qquad \text{Cuadrado de } r_1.$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} (2\cos\theta - \cos^2\theta)\, d\theta = \int_{0}^{\pi/2} \left(2\cos\theta - \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \left[2\,\text{sen}\,\theta - \frac{\theta}{2} - \frac{\text{sen}\,2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = 2 - \frac{\pi}{4}. \quad \blacksquare$$

El hecho de que podamos representar un punto de diferentes maneras en coordenadas polares demanda mayor cuidado para identificar cuando un punto está en la gráfica de una ecuación polar, y para determinar los puntos en los cuales las gráficas polares se intersecan. (En el ejemplo 2 necesitamos los puntos de intersección). En coordenadas cartesianas, siempre podemos obtener los puntos donde dos curvas se cruzan resolviendo simultáneamente sus ecuaciones. En el caso de las coordenadas polares, es diferente. Las soluciones simultáneas pueden revelar algunos puntos de intersección y otros no, de manera que algunas veces es difícil obtener todos los puntos de intersección de dos curvas polares. Una manera de identificar todos ellos es graficar las ecuaciones.

Longitud de una curva polar

Podemos obtener una fórmula en coordenadas polares para la longitud de una curva $r = f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$, parametrizando la curva como

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta = f(\theta)\,\text{sen}\,\theta, \qquad \alpha \le \theta \le \beta. \tag{2}$$

La fórmula paramétrica de longitud, la ecuación (3) de la sección 11.2, da entonces la longitud como

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

Esta ecuación se convierte en

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

cuando x y y se sustituyen por las ecuaciones (2) (ejercicio 29).

Longitud de una curva polar

Si $r = f(\theta)$ tiene una primera derivada continua para $\alpha \le \theta \le \beta$ y si el punto $P(r, \theta)$ traza la curva $r = f(\theta)$ exactamente una sola vez al variar θ de α a β, entonces, la longitud de la curva es

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta. \tag{3}$$

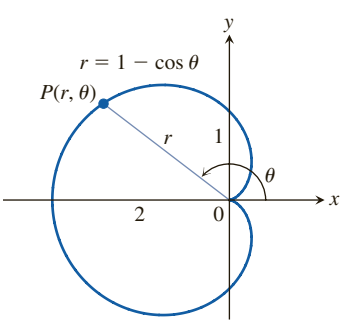


FIGURA 11.36 Cálculo de la longitud de una cardioide (ejemplo 3).

EJEMPLO 3 Obtenga la longitud de la cardioide $r = 1 - \cos\theta$.

Solución Dibujamos la cardioide para determinar los límites de integración (figura 11.36). El punto $P(r, \theta)$ traza la curva una sola vez, en sentido contrario al de las manecillas del reloj, conforme θ va de 0 a 2π, de manera que éstos son los valores que tomamos para α y β.

Con

$$r = 1 - \cos\theta, \qquad \frac{dr}{d\theta} = \operatorname{sen}\theta,$$

tenemos

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = (1 - \cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta)^2$$
$$= 1 - 2\cos\theta + \underbrace{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}_{1} = 2 - 2\cos\theta$$

y

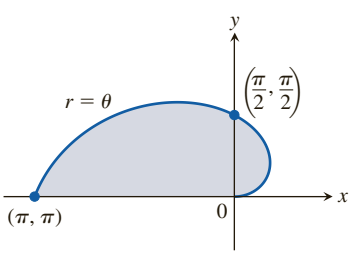
$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos\theta}\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta \qquad 1 - \cos\theta = 2\operatorname{sen}^2(\theta/2)$$
$$= \int_0^{2\pi} 2\left|\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right| d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\, d\theta \qquad \operatorname{sen}(\theta/2) \geq 0 \quad \text{para} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$
$$= \left[-4\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 4 + 4 = 8. \qquad \blacksquare$$

Ejercicios 11.5

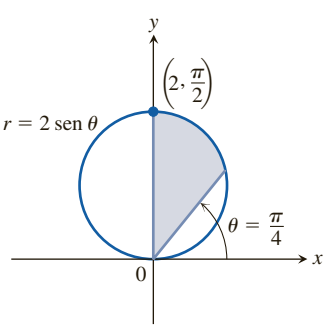
Obtención de áreas polares

Obtenga las áreas de las regiones de los ejercicios 1 a 8.

1. Región limitada por la espiral $r = \theta$ para $0 \leq \theta \leq \pi$



2. Región limitada por la circunferencia $r = 2\operatorname{sen}\theta$ para $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$

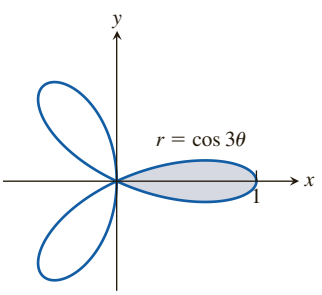


3. Región dentro del óvalo del limaçon $r = 4 + 2\cos\theta$

4. Región dentro de la cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$, $a > 0$

5. Región dentro de un pétalo de una rosa de cuatro pétalos $r = \cos 2\theta$

6. Región dentro de un pétalo de una rosa de tres pétalos $r = \cos 3\theta$



7. Región dentro de un lazo de la lemniscata $r^2 = 4\operatorname{sen} 2\theta$

8. Región dentro de una rosa de seis pétalos $r^2 = 2\operatorname{sen} 3\theta$

Obtenga las áreas de las regiones en los ejercicios 9 a 18.

9. Región compartida por las circunferencias $r = 2\cos\theta$ y $r = 2\operatorname{sen}\theta$

10. Región compartida por las circunferencias $r = 1$ y $r = 2\operatorname{sen}\theta$

11. Región compartida por la circunferencia $r = 2$ y la cardioide $r = 2(1 - \cos\theta)$

12. Región compartida por las cardioides $r = 2(1 + \cos\theta)$ y $r = 2(1 - \cos\theta)$

13. Región dentro de la lemniscata $r^2 = 6\cos 2\theta$ y fuera de la circunferencia $r = \sqrt{3}$

14. Región dentro de la circunferencia $r = 3a \cos\theta$ y fuera de la cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$, $a > 0$

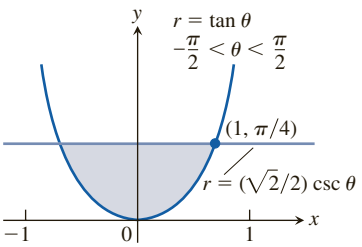
15. Región dentro de la circunferencia $r = -2\cos\theta$ y fuera de la circunferencia $r = 1$

16. Región dentro de la circunferencia $r = 6$ y sobre la recta $r = 3\csc\theta$

17. Región dentro de la circunferencia $r = 4\cos\theta$ y a la derecha de la recta vertical $r = \sec\theta$

18. Región dentro de la circunferencia $r = 4 \operatorname{sen}\theta$ y debajo de la recta horizontal $r = 3\csc\theta$

19. ***a)*** Obtenga el área de la región sombreada en la siguiente figura.



b) Parece que la gráfica de $r = \tan\theta$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ es asintótica a las rectas $x = 1$ y $x = -1$. ¿Es así? Explique las razones de su respuesta.

20. El área de la región que se encuentra dentro de la curva cardioide $r = \cos\theta + 1$ y fuera de la circunferencia $r = \cos\theta$ no es

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(\cos\theta + 1)^2 - \cos^2\theta]\, d\theta = \pi.$$

¿Por qué no? ¿Cuál *es* el área? Fundamente sus respuestas.

Obtención de longitudes de curvas polares

Determine las longitudes de las curvas de los ejercicios 21 a 28.

21. La espiral $r = \theta^2$, $0 \le \theta \le \sqrt{5}$

22. La espiral $r = e^\theta/\sqrt{2}$, $0 \le \theta \le \pi$

23. La cardiode $r = 1 + \cos\theta$

24. La curva $r = a \operatorname{sen}^2(\theta/2)$, $0 \le \theta \le \pi$, $a > 0$

25. El segmento parabólico $r = 6/(1 + \cos\theta)$, $0 \le \theta \le \pi/2$

26. El segmento parabólico $r = 2/(1 - \cos\theta)$, $\pi/2 \le \theta \le \pi$

27. La curva $r = \cos^3(\theta/3)$, $0 \le \theta \le \pi/4$

28. La curva $r = \sqrt{1 + \operatorname{sen} 2\theta}$, $0 \le \theta \le \pi\sqrt{2}$

29. Longitud de la curva $r = f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$ Suponiendo que las derivadas que sean necesarias son continuas, demuestre cómo las sustituciones

$$x = f(\theta)\cos\theta, \quad y = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

(ecuaciones 2 en el texto) transforman

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

en

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

30. Perímetros de círculos Como es usual, cuando vemos una nueva fórmula, es buena idea aplicarla a objetos familiares para asegurarnos de que produce resultados congruentes con la experiencia. Emplee la fórmula de la longitud de la ecuación (3) para calcular el perímetro de los siguientes círculos ($a > 0$).

a) $r = a$ ***b)*** $r = a\cos\theta$ ***c)*** $r = a \operatorname{sen}\theta$

Teoría y ejemplos

31. Valor promedio Si f es continua, el valor promedio de la coordenada polar r sobre la curva $r = f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$, con respecto a θ está dado por la fórmula

$$r_{\text{prom}} = \frac{1}{\beta - \alpha}\int_\alpha^\beta f(\theta)\, d\theta.$$

Use esta fórmula para encontrar el valor promedio de r con respecto a θ sobre las siguientes curvas ($a > 0$).

a) La cardioide $r = a(1 - \cos\theta)$

b) La circunferencia $r = a$

c) La circunferencia $r = a\cos\theta$, $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$

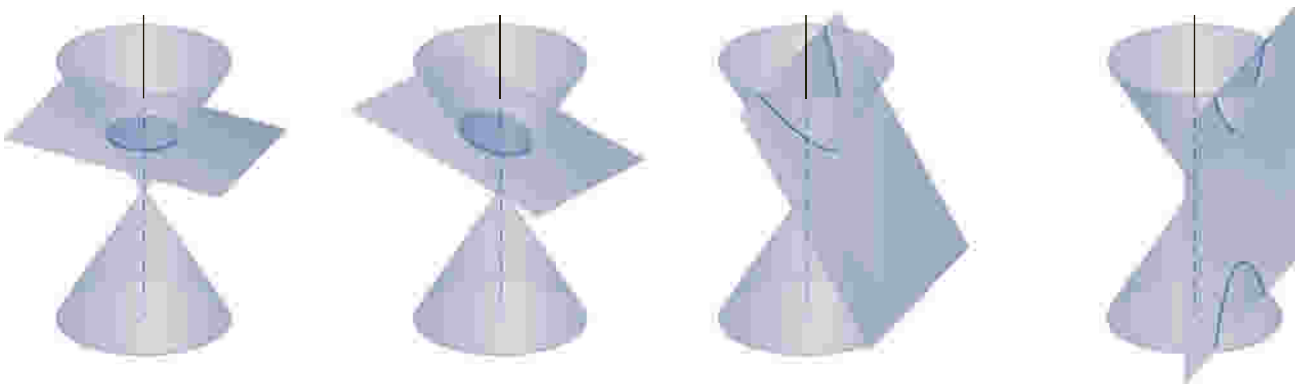
32. $r = f(\theta)$ *versus* $r = 2f(\theta)$ ¿Es posible establecer alguna relación entre las longitudes de las curvas $r = f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$, y $r = 2f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$? Fundamente su respuesta.

11.6 Secciones cónicas

En esta sección revisaremos y definiremos geométricamente las parábolas, las elipses y las hipérbolas, y deduciremos sus ecuaciones cartesianas estándar. Estas curvas se llaman *secciones cónicas*, o simplemente *cónicas*, porque se forman al cortar un cono doble con un plano (figura 11.37). Este método geométrico era la única manera que tenían los matemáticos griegos para describirlas, pues no contaban con nuestras herramientas de coordenadas cartesianas o polares. En la siguiente sección expresaremos las cónicas en coordenadas polares.

Parábolas

DEFINICIONES El conjunto formado por todos los puntos en un plano que equidistan de un punto fijo y de una recta fija, dados en el plano, es una **parábola**. El punto fijo es el **foco** de la parábola. La recta fija es la **directriz**.



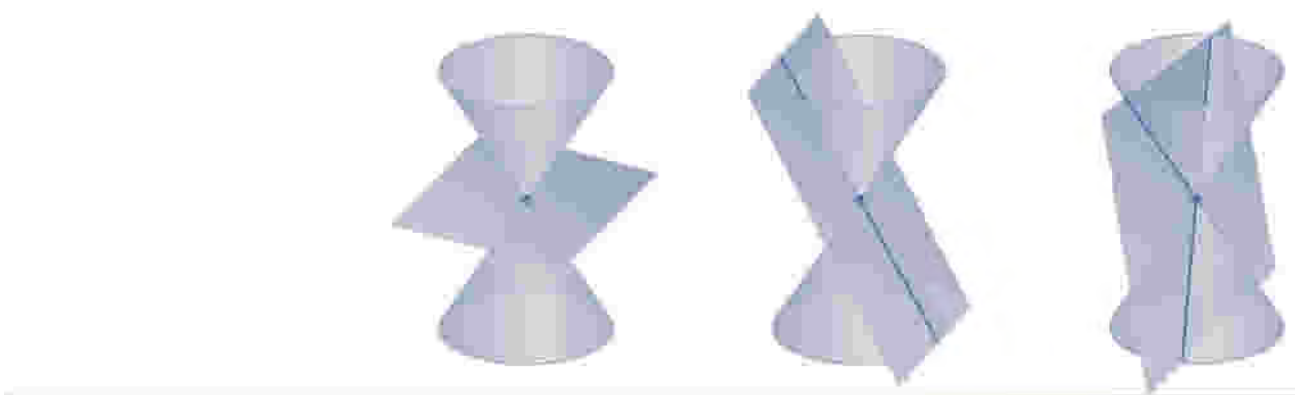
Circunferencia: plano perpendicular al eje del cono

Elipse: plano oblicuo al eje del cono

Parábola: plano paralelo al lado del cono

Hipérbola: plano paralelo al eje del cono

a)



Punto: plano que pasa sólo a través del vértice del cono

Una sola recta: el plano es tangente al cono

Par de rectas que se intersecan

b)

FIGURA 11.37 Las secciones cónicas estándar *a*) son las curvas en las cuales un plano corta un cono *doble*. Las hipérbolas constan de dos partes, llamadas *ramas*. El punto y las rectas que se obtienen al hacer pasar el plano por el vértice del cono *b*) son secciones cónicas *degeneradas*.

Si el foco F está en la directriz L, la parábola es la recta que pasa por F y es perpendicular a L. Esto se considera un caso degenerado y, de aquí en adelante, se supondrá que F no está en L.

La ecuación más sencilla para una parábola se obtiene cuando su foco se encuentra en uno de los ejes y su directriz es perpendicular a éste. Por ejemplo, suponga que el foco se localiza en el punto $F(0, p)$ en la parte positiva del eje y, y que la directriz es la recta $y = -p$ (figura 11.38). En la notación de la figura, un punto $P(x, y)$ está en la parábola si y sólo si $PF = PQ$. A partir de la fórmula de la distancia,

$$PF = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - p)^2} = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}$$
$$PQ = \sqrt{(x - x)^2 + (y - (-p))^2} = \sqrt{(y + p)^2}.$$

Cuando igualamos estas expresiones, elevamos al cuadrado y simplificamos, obtenemos

$$y = \frac{x^2}{4p} \quad \text{o} \quad x^2 = 4py. \qquad \text{Forma estándar} \qquad (1)$$

Estas ecuaciones revelan la simetría de la parábola con respecto al eje y. A este último lo llamamos **eje** de la parábola (una forma abreviada de "eje de simetría").

El punto donde una parábola cruza su eje es el **vértice**. El vértice de la parábola $x^2 = 4py$ está en el origen (figura 11.38). El número positivo p es la **distancia focal** de la parábola.

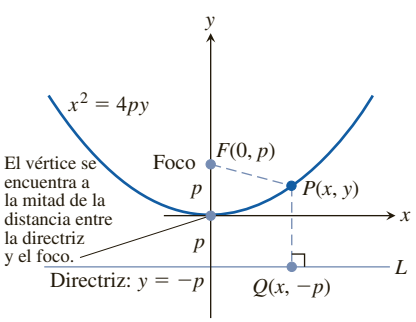


FIGURA 11.38 Forma estándar de la parábola $x^2 = 4py$, $p > 0$.

Si la parábola abre hacia abajo, con su foco en $(0, -p)$ y con directriz en la recta $y = p$, entonces, las ecuaciones (1) se convierten en

$$y = -\frac{x^2}{4p} \qquad \text{y} \qquad x^2 = -4py.$$

Intercambiando las variables x y y, obtenemos ecuaciones similares para parábolas que se abren a la derecha o a la izquierda (figura 11.39).

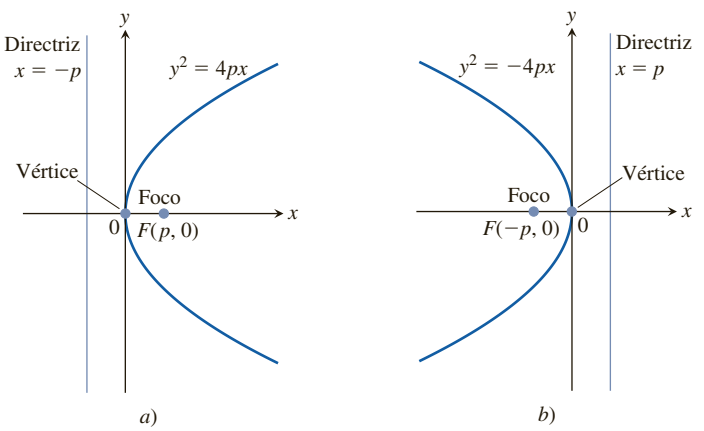


FIGURA 11.39 *a*) La parábola $y^2 = 4px$. *b*) La parábola $y^2 = -4px$.

EJEMPLO 1 Obtenga el foco y la directriz de la parábola $y^2 = 10x$.

Solución Determinamos el valor de p en la ecuación estándar de la parábola $y^2 = 4px$:

$$4p = 10, \qquad \text{de manera que} \qquad p = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

Luego, determinamos el foco y la directriz para este valor de p:

$$\text{Foco:} \qquad (p, 0) = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$$

$$\text{Directriz:} \qquad x = -p \qquad \text{o} \qquad x = -\frac{5}{2}.$$

■

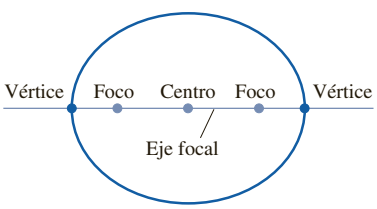


FIGURA 11.40 Puntos en el eje focal de una elipse.

Elipses

DEFINICIONES Una **elipse** es el conjunto de puntos en un plano cuyas distancias a dos puntos fijos en el plano tienen una suma constante. Los dos puntos fijos son los **focos** de la elipse.

La recta que pasa por los focos de una elipse es el **eje focal**. El punto que se localiza en el eje a la mitad de la distancia entre los focos es el **centro**. Los puntos donde el eje focal y la elipse se cruzan son los **vértices** de la elipse (figura 11.40).

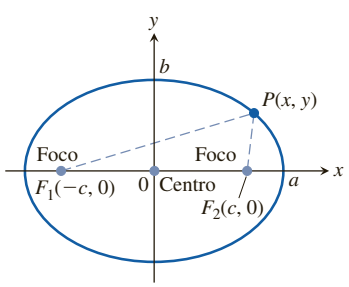


FIGURA 11.41 La elipse definida por la ecuación $PF_1 + PF_2 = 2a$ es la gráfica de la ecuación $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, donde $b^2 = a^2 - c^2$.

Si los focos son $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ (figura 11.41), y $PF_1 + PF_2$ se denota con $2a$, entonces, las coordenadas de un punto P sobre la elipse satisfacen la ecuación

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a.$$

Para simplificar esta ecuación, movemos el segundo radical al lado derecho, elevamos al cuadrado, despejamos el radical que queda y elevamos otra vez al cuadrado para obtener

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \tag{2}$$

Puesto que $PF_1 + PF_2$ es mayor que la longitud F_1F_2 (por la desigualdad del triángulo para el triángulo PF_1F_2), el número $2a$ es mayor que $2c$. De acuerdo con esto, $a > c$ y el número $a^2 - c^2$ en la ecuación (2) es positivo.

Los pasos algebraicos que conducen a la ecuación (2) se pueden revertir para demostrar que todos los puntos P cuyas coordenadas satisfacen una ecuación de esta forma con $0 < c < a$ también satisfacen la ecuación $PF_1 + PF_2 = 2a$. Por lo tanto, un punto se encuentra en la elipse si y sólo si sus coordenadas satisfacen la ecuación (2).

Si

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}, \tag{3}$$

entonces, $a^2 - c^2 = b^2$ y la ecuación (2) toma la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

La ecuación (4) indica que esta elipse es simétrica con respecto al origen y a ambos ejes de coordenadas. Además, permanece dentro del rectángulo acotado por las rectas $x = \pm a$ y $y = \pm b$. La elipse cruza los ejes en los puntos $(\pm a, 0)$ y $(0, \pm b)$. Las tangentes en estos puntos son perpendiculares a los ejes porque

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$ Obtenida de la ecuación (4) por medio de la derivación implícita

es cero si $x = 0$, e infinita si $y = 0$.

El **eje mayor** de la elipse en la ecuación (4) es el segmento de recta de longitud $2a$ que une los puntos $(\pm a, 0)$. El **eje menor** es el segmento de recta de longitud $2b$ que une los puntos $(0, \pm b)$. El mismo número a es el **semieje mayor**, y el número b es el **semieje menor**. El número c, obtenido de la ecuación (3) como

$$c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

es la **distancia del centro al foco** de la elipse. Si $a = b$, la elipse en realidad no es tal, sino se trata de una circunferencia.

EJEMPLO 2 La elipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \tag{5}$$

(figura 11.42) tiene

Semieje mayor: $a = \sqrt{16} = 4$, Semieje menor: $b = \sqrt{9} = 3$

Distancia del centro al foco: $c = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$

Focos: $(\pm c, 0) = (\pm\sqrt{7}, 0)$

Vértices: $(\pm a, 0) = (\pm 4, 0)$

Centro: $(0, 0)$. ■

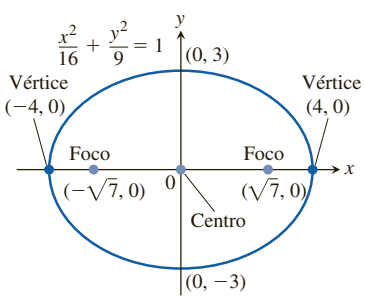


FIGURA 11.42 Una elipse con su eje mayor horizontal (ejemplo 2).

Si intercambiamos x y y en la ecuación (5), tenemos la ecuación

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1. \tag{6}$$

El eje mayor de esta elipse es ahora vertical en vez de horizontal, con los focos y vértices en el eje y. No hay confusión en el análisis de las ecuaciones (5) y (6). Si encontramos las intersecciones en los ejes de coordenadas, sabremos cuál es el eje mayor porque es el más grande de los dos.

Ecuaciones en forma estándar para las elipses con centro en el origen

Focos sobre el eje x: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b)$

Distancia del centro al foco: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Focos: $(\pm c, 0)$

Vértices: $(\pm a, 0)$

Focos sobre el eje y: $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1 \quad (a > b)$

Distancia del centro al foco: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Focos: $(0, \pm c)$

Vértices: $(0, \pm a)$

En cada caso, a es el semieje mayor y b es el semieje menor.

Hipérbolas

DEFINICIONES Una **hipérbola** es el conjunto de puntos en un plano, cuyas distancias a dos puntos fijos del plano tienen diferencia constante. Los dos puntos fijos son los **focos** de la hipérbola.

La recta que pasa por los focos de una hipérbola es el **eje focal**. El punto que está en el eje focal a la mitad de la distancia entre los focos es el **centro** de la hipérbola. Los puntos donde el eje focal y la hipérbola se cruzan son los **vértices** (figura 11.43).

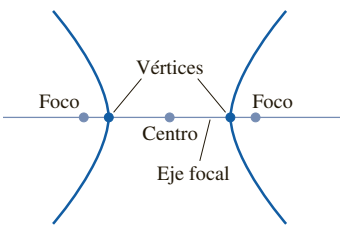


FIGURA 11.43 Puntos en el eje focal de una hipérbola.

Si los focos son $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ (figura 11.44) y la diferencia constante es $2a$, entonces, el punto (x, y) se localiza en la hipérbola si y sólo si

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a. \tag{7}$$

Para simplificar esta ecuación, movemos el segundo radical al lado derecho, elevamos al cuadrado, despejamos el radical que queda y elevamos otra vez al cuadrado, para obtener

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \tag{8}$$

Hasta el momento, esta ecuación se parece a la de la elipse. Pero ahora $a^2 - c^2$ es negativa porque $2a$, al ser la diferencia de dos lados del triángulo PF_1F_2, es menor que $2c$, el tercer lado.

Los pasos algebraicos que conducen a la ecuación (8) se pueden revertir para demostrar que todo punto P cuyas coordenadas satisfacen una ecuación de esta forma con $0 < a < c$ también satisfacen la ecuación (7). Por lo tanto, un punto está en la hipérbola si y sólo si sus coordenadas satisfacen la ecuación (8).

Si denotamos con b a la raíz cuadrada positiva de $c^2 - a^2$,

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \tag{9}$$

entonces, $a^2 - c^2 = -b^2$ y la ecuación (8) se escribiría en forma compacta como

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{10}$$

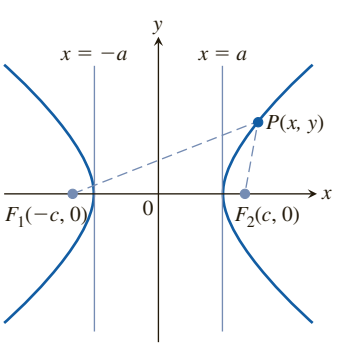


FIGURA 11.44 Las hipérbolas tienen dos ramas. Para puntos en la rama derecha de la hipérbola mostrada aquí, $PF_1 - PF_2 = 2a$. Para los puntos en la rama izquierda de la hipérbola mostrada aquí, $PF_2 - PF_1 = 2a$. Entonces, consideramos $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Las diferencias entre la ecuación (10) y la ecuación de una elipse (ecuación 4) son el signo menos y la nueva relación

$$c^2 = a^2 + b^2. \qquad \text{De la ecuación (9)}$$

Al igual que la elipse, la hipérbola es simétrica con respecto al origen y a los ejes de coordenadas. Cruza el eje x en los puntos $(\pm a, 0)$. Las tangentes en estos puntos son verticales porque

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y} \qquad \text{Obtenida de la ecuación (10) por medio de derivación implícita}$$

es infinita cuando $y = 0$. La hipérbola no tiene intersecciones con el eje y; de hecho, ninguna parte de la curva se encuentra entre las rectas $x = -a$ y $x = a$.

Las rectas

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

son las dos **asíntotas** de la hipérbola definida por la ecuación (10). La manera más rápida de determinar las ecuaciones de las asíntotas es sustituir el 1 en la ecuación (10) por 0, y despejar y en la nueva ecuación:

$$\underbrace{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}_{\text{hipérbola}} \rightarrow \underbrace{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0}_{\text{0 para 1}} \rightarrow \underbrace{y = \pm \frac{b}{a} x.}_{\text{asíntotas}}$$

EJEMPLO 3 La ecuación

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1 \tag{11}$$

es la ecuación (10) con $a^2 = 4$ y $b^2 = 5$ (figura 11.45). Tenemos

Distancia entre el centro y el foco: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 5} = 3$

Focos: $(\pm c, 0) = (\pm 3, 0)$, Vértices: $(\pm a, 0) = (\pm 2, 0)$

Centro: $(0, 0)$

Asíntotas: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 0$ o $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} x.$ ■

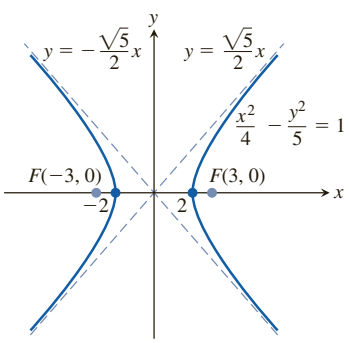


FIGURA 11.45 La hipérbola del ejemplo 3 y sus asíntotas.

Si intercambiamos x y y en la ecuación (11), los focos y los vértices de la hipérbola resultante estarán en el eje y. Encontraremos las asíntotas del mismo modo que antes, pero ahora sus ecuaciones serán $y = \pm 2x/\sqrt{5}$.

Ecuaciones en forma estándar para las hipérbolas con centro en el origen

Focos en el eje x: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Distancia entre el centro y el foco: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Focos: $(\pm c, 0)$

Vértices: $(\pm a, 0)$

Asíntotas: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ o $y = \pm \frac{b}{a} x$

Focos en el eje y: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

Distancia entre el centro y el foco: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Focos: $(0, \pm c)$

Vértices: $(0, \pm a)$

Asíntotas: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 0$ o $y = \pm \frac{a}{b} x$

Observe la diferencia en las ecuaciones para las asíntotas (b/a en la primera, a/b en la segunda).

Cambiamos las cónicas usando los principios revisados en la sección 1.2, sustituyendo x por $x+h$ y y por $y+k$.

EJEMPLO 4 Demuestre que la ecuación $x^2 - 4y^2 + 2x + 8y - 7 = 0$ representa una hipérbola. Encuentre su centro, asíntotas y focos.

Solución Reducimos la ecuación a la forma estándar completando el cuadrado en x y y como sigue:

$$(x^2 + 2x) - 4(y^2 - 2y) = 7$$

$$(x^2 + 2x + 1) - 4(y^2 - 2y + 1) = 7 + 1 - 4$$

$$\frac{(x+1)^2}{4} - (y-1)^2 = 1.$$

Ésta es la forma estándar de la ecuación (10) de una hipérbola con x sustituida por $x+1$ y y reemplazada por $y-1$. La hipérbola se desplaza una unidad a la izquierda y una unidad hacia arriba, y tiene su centro en $x+1=0$ y $y-1=0$, o $x=-1$ y $y=1$. Aún más,

$$a^2 = 4, \qquad b^2 = 1, \qquad c^2 = a^2 + b^2 = 5,$$

de manera que las asíntotas son las dos rectas

$$\frac{x+1}{2} - (y-1) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{x+1}{2} + (y-1) = 0,$$

o bien,

$$y - 1 = \pm\frac{1}{2}(x+1).$$

Los focos trasladados tienen coordenadas $\left(-1 \pm \sqrt{5}, 1\right)$. ■

Ejercicios 11.6

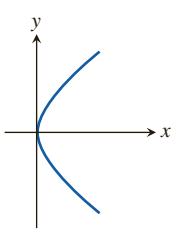
Identificación de gráficas

Relacione las parábolas de los ejercicios 1 a 4 con las siguientes ecuaciones:

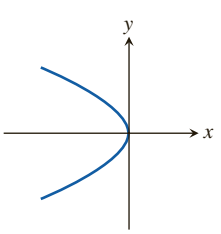
$$x^2 = 2y, \quad x^2 = -6y, \quad y^2 = 8x, \quad y^2 = -4x.$$

Luego, determine el foco y la directriz de cada parábola.

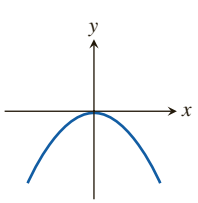
1.



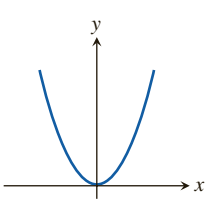
2.



3.



4.



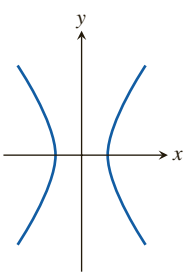
Relacione cada una de las secciones cónicas de los ejercicios 5 a 8 con una de las siguientes ecuaciones:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \qquad \frac{x^2}{2} + y^2 = 1,$$

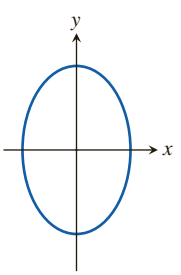
$$\frac{y^2}{4} - x^2 = 1, \qquad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Luego, determine los focos y vértices de las secciones cónicas. Si la sección cónica es una hipérbola, determine también sus asíntotas.

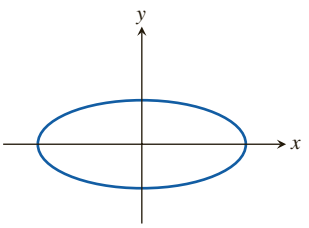
5.



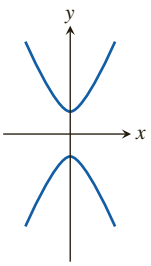
6.



7.



8.



Parábolas

En los ejercicios 9 a 16 se presentan ecuaciones de parábolas. Obtenga el foco y la directriz de cada parábola. Luego, dibuje la gráfica correspondiente, incluyendo el foco y la directriz.

9. $y^2 = 12x$ **10.** $x^2 = 6y$ **11.** $x^2 = -8y$

12. $y^2 = -2x$ **13.** $y = 4x^2$ **14.** $y = -8x^2$

15. $x = -3y^2$ **16.** $x = 2y^2$

Elipses

Los ejercicios 17 a 24 presentan ecuaciones de elipses. Exprese cada ecuación en su forma estándar. Luego, dibuje la elipse, incluyendo los focos.

17. $16x^2 + 25y^2 = 400$ **18.** $7x^2 + 16y^2 = 112$

19. $2x^2 + y^2 = 2$ **20.** $2x^2 + y^2 = 4$

21. $3x^2 + 2y^2 = 6$ **22.** $9x^2 + 10y^2 = 90$

23. $6x^2 + 9y^2 = 54$ **24.** $169x^2 + 25y^2 = 4225$

Los ejercicios 25 y 26 dan información acerca de los focos y vértices de elipses con centro en el origen del plano xy. En cada caso, determine la ecuación en la forma estándar a partir de la información disponible.

25. Focos: $(\pm\sqrt{2}, 0)$ Vértices: $(\pm 2, 0)$

26. Focos: $(0, \pm 4)$ Vértices: $(0, \pm 5)$

Hipérbolas

Los ejercicios 27 a 34 presentan ecuaciones de hipérbolas. Exprese cada ecuación en su forma estándar y determine las asíntotas de las hipérbolas. Luego, dibuje la hipérbola, incluyendo sus asíntotas y focos.

27. $x^2 - y^2 = 1$ **28.** $9x^2 - 16y^2 = 144$

29. $y^2 - x^2 = 8$ **30.** $y^2 - x^2 = 4$

31. $8x^2 - 2y^2 = 16$ **32.** $y^2 - 3x^2 = 3$

33. $8y^2 - 2x^2 = 16$ **34.** $64x^2 - 36y^2 = 2304$

Los ejercicios 35 a 38 dan información acerca de los focos, los vértices y las asíntotas de hipérbolas con centro en el origen del plano xy. En todos los casos, determine la ecuación en forma estándar de la hipérbola a partir de la información disponible.

35. Focos: $\left(0, \pm\sqrt{2}\right)$

Asíntonas: $y = \pm x$

36. Focos: $(\pm 2, 0)$

Asíntonas: $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$

37. Vértices: $(\pm 3, 0)$

Asíntonas: $y = \pm\dfrac{4}{3}x$

38. Vértices: $(0, \pm 2)$

Asíntonas: $y = \pm\dfrac{1}{2}x$

Desplazamiento de secciones cónicas

Sería útil que revisara la sección 1.2 antes de resolver los ejercicios 39 a 56.

39. La parábola $y^2 = 8x$ se desplaza 2 unidades hacia abajo y 1 unidad a la derecha para generar la parábola $(y + 2)^2 = 8(x - 1)$.

a) Obtenga el vértice, el foco y la directriz de la nueva parábola.

b) Grafique el vértice, el foco y la directriz nuevos, y bosqueje la parábola.

40. La parábola $x^2 = -4y$ se desplaza 1 unidad hacia la izquierda y 3 unidades hacia arriba para generar la parábola $(x + 1)^2 = -4(y - 3)$.

a) Determine el vértice, el foco y la directriz de la nueva parábola.

b) Trace el vértice, el foco y la directriz nuevos, y bosqueje la parábola.

41. La elipse $(x^2/16) + (y^2/9) = 1$ se desplaza 4 unidades hacia la derecha y 3 unidades hacia arriba para generar la elipse

$$\frac{(x - 4)^2}{16} + \frac{(y - 3)^2}{9} = 1.$$

a) Obtenga los focos, los vértices y el centro de la nueva elipse.

b) Trace los nuevos focos y vértices, y bosqueje la elipse.

42. La elipse $(x^2/9) + (y^2/25) = 1$ se desplaza 3 unidades hacia la izquierda y 2 unidades hacia abajo para generar la elipse

$$\frac{(x + 3)^2}{9} + \frac{(y + 2)^2}{25} = 1.$$

a) Obtenga los focos, los vértices y el centro de la nueva elipse.

b) Trace los focos, los vértices y el centro nuevos, y bosqueje la elipse.

43. La hipérbola $(x^2/16) - (y^2/9) = 1$ se desplaza 2 unidades hacia la derecha para generar la hipérbola

$$\frac{(x - 2)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

a) Determine el centro, los focos, los vértices y las asíntotas de la nueva hipérbola.

b) Grafique el centro, los focos, los vértices y las asíntotas nuevos, y bosqueje la hipérbola.

44. La hipérbola $(y^2/4) - (x^2/5) = 1$ se desplaza 2 unidades hacia abajo para generar la hipérbola

$$\frac{(y + 2)^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1.$$

a) Obtenga el centro, los focos, los vértices y las asíntotas de la nueva hipérbola.

b) Trace el centro, los focos, los vértices y las asíntotas nuevos, y bosqueje la hipérbola.

Los ejercicios 45 a 48 incluyen ecuaciones de parábolas e indican cuántas unidades hacia arriba o hacia abajo y a la derecha o a la izquierda se desplaza cada parábola. Determine la ecuación para la parábola nueva y encuentre el vértice, el foco y la directriz nuevos.

45. $y^2 = 4x$, izquierda 2, abajo 3

46. $y^2 = -12x$, derecha 4, arriba 3

47. $x^2 = 8y$, derecha 1, abajo 7

48. $x^2 = 6y$, izquierda 3, abajo 2

Los ejercicios 49 a 52 presentan ecuaciones de elipses e indican cuántas unidades hacia arriba o hacia abajo y a la derecha o a la izquierda se desplaza cada elipse. Determine una ecuación para la nueva elipse y encuentre los focos, los vértices y el centro nuevos.

49. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{9} = 1$, izquierda 2, abajo 1

50. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, derecha 3, arriba 4

51. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$, derecha 2, arriba 3

52. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$, izquierda 4, abajo 5

Los ejercicios 53 a 56 presentan ecuaciones de hipérbolas e indican cuántas unidades hacia arriba o hacia abajo y a la derecha o a la izquierda se desplaza cada hipérbola. Determine una ecuación para la hipérbola nueva y encuentre el centro, los focos, los vértices y las asíntotas nuevos.

53. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$, derecha 2, arriba 2

54. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, izquierda 2, abajo 1

55. $y^2 - x^2 = 1$, izquierda 1, abajo 1

56. $\frac{y^2}{3} - x^2 = 1$, derecha 1, arriba 3

Obtenga el centro, los focos, los vértices, las asíntotas y el radio, según proceda, de las secciones cónicas de los ejercicios 57 a 68.

57. $x^2 + 4x + y^2 = 12$

58. $2x^2 + 2y^2 - 28x + 12y + 114 = 0$

59. $x^2 + 2x + 4y - 3 = 0$

60. $y^2 - 4y - 8x - 12 = 0$

61. $x^2 + 5y^2 + 4x = 1$

62. $9x^2 + 6y^2 + 36y = 0$

63. $x^2 + 2y^2 - 2x - 4y = -1$

64. $4x^2 + y^2 + 8x - 2y = -1$

65. $x^2 - y^2 - 2x + 4y = 4$

66. $x^2 - y^2 + 4x - 6y = 6$

67. $2x^2 - y^2 + 6y = 3$

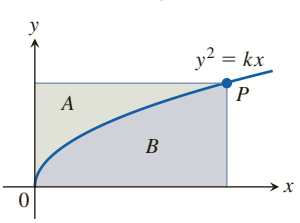
68. $y^2 - 4x^2 + 16x = 24$

Teoría y ejemplos

69. Si se dibujan rectas paralelas a los ejes de coordenadas que pasen por un punto P sobre la parábola $y^2 = kx$, $k > 0$, la parábola divide la región rectangular acotada por estas rectas y los ejes en dos pequeñas regiones, A y B.

a) Si las dos regiones más pequeñas giran alrededor del eje y, demuestre que generan sólidos cuyos volúmenes tienen una proporción de 4:1.

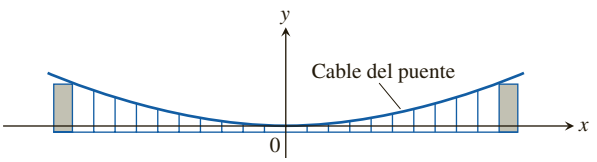
b) ¿Cuál es la razón de los volúmenes generados cuando las regiones giran alrededor del eje x?



70. Los cables de los puentes colgantes describen parábolas El cable del puente colgante ilustrado en la figura soporta una carga uniforme de w libras por pie horizontal. Es posible demostrar que si H es la tensión horizontal del cable en el origen, entonces, la curva del cable satisface la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w}{H}x.$$

Demuestre que el cable cuelga en forma de parábola, resolviendo esta ecuación diferencial sujeta a la condición inicial $y = 0$ cuando $x = 0$.



71. Anchura de una parábola en el foco Demuestre que el número $4p$ es el *ancho* de la parábola $x^2 = 4py$ $(p > 0)$ en el foco, comprobando que la recta $y = p$ corta la parábola en puntos que están separados $4p$ unidades.

72. Las asíntotas de $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ Demuestre que la distancia vertical entre la recta $y = (b/a)x$ y la mitad superior de la rama derecha $y = (b/a)\sqrt{x^2 - a^2}$ de la hipérbola $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ tiende a cero, comprobando que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right) = \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) = 0.$$

Resultados análogos se obtienen para las partes restantes de la hipérbola y las rectas $y = \pm(b/a)x$.

73. Área Obtenga las dimensiones del rectángulo de mayor área que se puede inscribir en la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ con sus lados paralelos a los ejes de coordenadas. ¿Cuál es el área del rectángulo?

74. Volumen Obtenga el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ alrededor de ***a)*** el eje x, ***b)*** el eje y.

75. Volumen La región "triangular" en el primer cuadrante acotada por el eje x, la recta $x = 4$ y la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$ gira alrededor del eje x para generar un sólido. Determine el volumen de ese sólido.

76. Tangentes Demuestre que las tangentes a la curva $y^2 = 4px$ desde cualquier punto de la recta $x = -p$ son perpendiculares.

77. Tangentes Determine las ecuaciones para las tangentes a la circunferencia $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ en los puntos donde la circunferencia cruza los ejes de coordenadas.

78. Volumen La región acotada a la izquierda por el eje y, a la derecha por la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$, y arriba y abajo por las rectas $y = \pm 3$ gira alrededor del eje x para generar un sólido. Obtenga el volumen del sólido.

79. Centroide Determine el centroide de la región acotada por abajo por el eje x y por arriba por la elipse $(x^2/9) + (y^2/16) = 1$.

80. Área de superficies La curva $y = \sqrt{x^2 + 1}$, $0 \le x \le \sqrt{2}$, que es parte de la rama superior de la hipérbola $y^2 - x^2 = 1$, se hace girar alrededor del eje x para generar una superficie. Obtenga el área de la superficie.

81. Propiedad de reflexión de las parábolas En la figura se muestra un punto típico $P(x_0, y_0)$ en la parábola $y_z = 4px$. La recta L es tangente a la parábola en P. El foco de la parábola es $F(p, 0)$. El rayo L' que se extiende de P hacia la derecha es paralelo al eje x. Para comprobar que la luz que va de F a P se reflejará a lo largo de L', hay que demostrar que β es igual a α. Establezca esta igualdad realizando los siguientes pasos.

a) Demuestre que $\tan \beta = 2p/y_0$.

b) Demuestre que $\tan \phi = y_0/(x_0 - p)$.

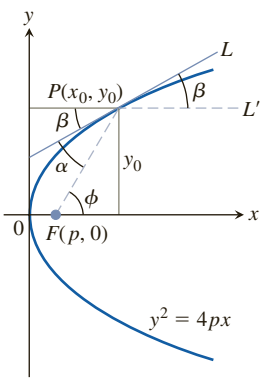
c) Emplee la identidad

$$\tan \alpha = \frac{\tan \phi - \tan \beta}{1 + \tan \phi \tan \beta}$$

para demostrar que $\tan \alpha = 2p/y_0$.

Puesto que α y β son agudos, $\tan \beta = \tan \alpha$ implica que $\beta = \alpha$.

Esta propiedad de reflexión de las parábolas se usa en aplicaciones como faros para automóviles, radiotelescopios y antenas satelitales de televisión.



11.7 Secciones cónicas en coordenadas polares

Las coordenadas polares son especialmente importantes en astronomía e ingeniería astronáutica porque las elipses, parábolas e hipérbolas que se obtienen como trayectorias del movimiento de satélites, lunas, planetas y cometas pueden describirse con una sola ecuación coordenada polar relativamente sencilla. Desarrollaremos aquí esa ecuación después de presentar el concepto de *excentricidad* de una sección cónica. La excentricidad revela el tipo de sección cónica (circunferencia, elipse, parábola o hipérbola) y el grado al cual se aplasta o aplana.

Excentricidad

Aun cuando la distancia c entre el centro y el foco no aparece en la ecuación cartesiana

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (a > b)$$

de una elipse, podemos determinar c a partir de la ecuación $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Si fijamos a y variamos c sobre el intervalo $0 \le c \le a$, las elipses resultantes variarán de forma. Si $c = 0$, son circunferencias (pues $a = b$) y se aplanan, volviéndose oblongas, cuando c aumenta. Si $c = a$, los focos y vértices se traslapan y la elipse degenera en un segmento de recta. Ahora vamos a considerar la razón $e = c/a$. También usamos esta razón con las hipérbolas; sólo que en este caso, c es igual a $\sqrt{a^2 + b^2}$, y no a $\sqrt{a^2 - b^2}$. Definimos estas razones con el término *excentricidad.*

DEFINICIÓN

La **excentricidad** de la elipse $(x^2/a^2) + (y_2/b^2) = 1$ $(a > b)$ es

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

La **excentricidad** de la hipérbola $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ es

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

La **excentricidad** de una parábola es $e = 1$.

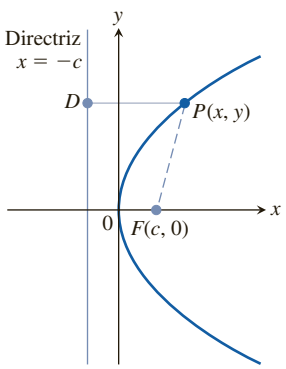


FIGURA 11.46 La distancia del foco F a cualquier punto P en una parábola es igual a la distancia de P al punto más cercano D en la directriz, de manera que $PF = PD$.

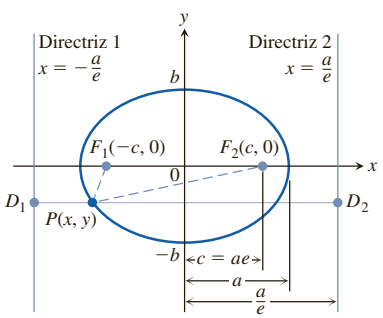


FIGURA 11.47 Focos y directrices de la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$. La directriz 1 corresponde al foco F_1, y la directriz 2 al foco F_2.

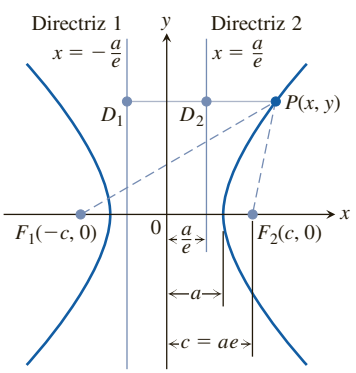


FIGURA 11.48 Focos y directrices de la hipérbola $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$. Sin importar dónde esté P en la hipérbola, $PF_1 = e \cdot PD_1$ y $PF_2 = e \cdot PD_2$.

Mientras que una parábola tiene un foco y una directriz, cada **elipse** tiene dos focos y dos **directrices**. Éstas son las rectas perpendiculares al eje mayor a distancias $\pm a/e$ del centro. La parábola tiene la propiedad de que

$$PF = 1 \cdot PD \tag{1}$$

para cualquier punto P en ella, donde F es el foco y D es el punto más cercano a P en la directriz. Para una elipse, es posible demostrar que las ecuaciones que sustituyen a la ecuación (1) son

$$PF_1 = e \cdot PD_1, \qquad PF_2 = e \cdot PD_2. \tag{2}$$

Aquí, e es la excentricidad, P es cualquier punto en la elipse, F_1 y F_2 son los focos, y D_1 y D_2 son los puntos en las directrices más cercanos a P (figura 11.47).

En ambas ecuaciones (2) la directriz y el foco deben corresponder; es decir, si usamos la distancia de P a F_1, también debemos usar la distancia de P a la directriz del mismo extremo de la elipse. La directriz $x = -a/e$ corresponde a $F_1(-c, 0)$, y la directriz $x = a/e$ corresponde a $F_2(c, 0)$.

Al igual que en el caso de la elipse, es posible demostrar que las rectas $x = \pm a/e$ actúan como **directrices** de la **hipérbola** y que

$$PF_1 = e \cdot PD_1 \qquad \text{y} \qquad PF_2 = e \cdot PD_2. \tag{3}$$

Aquí, P es cualquier punto en la hipérbola, F_1 y F_2 son los focos, y D_1 y D_2 son los puntos más cercanos a P en las directrices (figura 11.48).

Tanto en la elipse como en la hipérbola, la excentricidad es la razón de la distancia entre los focos y la distancia entre los vértices (porque $c/a = 2c/2a$).

$$\text{Excentricidad} = \frac{\text{distancia entre los focos}}{\text{distancia entre los vértices}}$$

En una elipse, los focos están más cerca entre sí que los vértices, y la razón es menor que 1. En una hipérbola, los focos están más lejos entre sí que los vértices, y la razón es mayor que 1.

La ecuación "foco-directriz" $PF = e \cdot PD$ unifica la parábola, la elipse y la hipérbola de la siguiente manera: suponga que la distancia PF entre un punto P y un punto fijo F (el foco) es un múltiplo constante de su distancia a una recta fija (la directriz). Es decir, suponga que

$$PF = e \cdot PD, \tag{4}$$

donde e es la constante de proporcionalidad. Así, la trayectoria seguida por P es

a) una *parábola* si $e = 1$,

b) una *elipse* de excentricidad e si $e < 1$ y

c) una *hipérbola* de excentricidad e si $e > 1$.

A medida que e aumenta ($e \to 1^-$), las elipses serán más oblongas, esto es, más alargadas horizontalmente, y cuando ($e \to \infty$) las hipérbolas se aplanan hacia las dos rectas paralelas a la directriz. No hay coordenadas en la ecuación (4) y, cuando tratamos de expresarla con coordenadas cartesianas, el resultado varía dependiendo de la magnitud de e. Sin embargo, como veremos, en coordenadas polares la ecuación $PF = e \cdot PD$ se traduce en una sola ecuación sin importar el valor de e.

Dados el foco y la directriz correspondiente de una hipérbola con centro en el origen y focos sobre el eje x, podemos usar las dimensiones que se especifican en la figura 11.48 para determinar e.

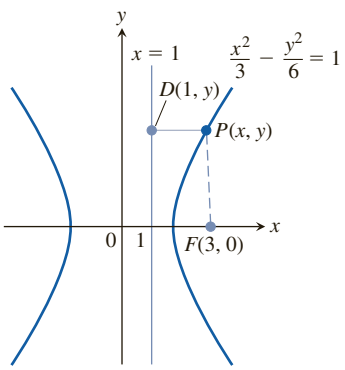


FIGURA 11.49 La hipérbola y directriz del ejemplo 1.

Al conocer e, podemos deducir la ecuación cartesiana para la hipérbola a partir de la ecuación $PF = e \cdot PD$, como en el siguiente ejemplo. Podemos encontrar las ecuaciones para elipses con centro en el origen y los focos en el eje x de un modo similar, por medio de las dimensiones que se muestran en la figura 11.47.

EJEMPLO 1 Determine la ecuación cartesiana para la hipérbola con centro en el origen que tiene un foco en (3, 0) y la recta $x = 1$ como la directriz correspondiente.

Solución Primero usamos las dimensiones mostradas en la figura 11.48 para determinar la excentricidad de la hipérbola. El foco es (vea la figura 11.49)

$$(c, 0) = (3, 0), \qquad \text{por lo que} \qquad c = 3.$$

De nuevo a partir de la figura 11.48, la directriz es la recta

$$x = \frac{a}{e} = 1, \qquad \text{por lo tanto,} \qquad a = e.$$

Cuando se combina con la ecuación $e = c/a$, que define la excentricidad, resulta

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{e}, \qquad \text{de manera que} \quad e^2 = 3 \quad \text{y} \quad e = \sqrt{3}.$$

Conociendo e podemos deducir la ecuación que necesitamos a partir de la ecuación $PF = e \cdot PD$. En la notación de la figura 11.49, tenemos

$$PF = e \cdot PD \qquad \text{Ecuación (4)}$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{3}\,|x-1| \qquad e = \sqrt{3}$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 3(x^2 - 2x + 1) \qquad \text{Eleve al cuadrado ambos lados.}$$

$$2x^2 - y^2 = 6$$

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1. \qquad \blacksquare$$

Ecuaciones polares

Para obtener ecuaciones polares de elipses, parábolas e hipérbolas, colocamos un foco en el origen y la directriz correspondiente a la derecha del origen a lo largo de la recta vertical $x = k$ (figura 11.50). En coordenadas polares, esto hace que

$$PF = r$$

y

$$PD = k - FB = k - r\cos\theta.$$

La ecuación foco-directriz de la cónica $PF = e \cdot PD$ se convierte entonces en

$$r = e(k - r\cos\theta),$$

de la cual se puede despejar r para obtener la siguiente expresión.

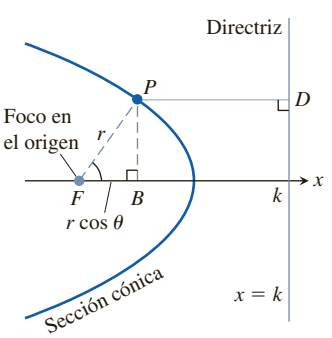


FIGURA 11.50 Si se coloca una sección cónica con su foco en el origen y la directriz perpendicular al rayo inicial y a la derecha del origen, podemos obtener su ecuación polar a partir de la ecuación foco-directriz de la cónica.

Ecuación polar de una cónica con excentricidad e

$$r = \frac{ke}{1 + e\cos\theta}, \qquad (5)$$

donde $x = k > 0$ es la directriz vertical.

EJEMPLO 2 Tenemos aquí ecuaciones polares de tres cónicas. Los valores de la excentricidad que identifican a la cónica son los mismos tanto para las coordenadas polares como para las coordenadas cartesianas.

$$e = \frac{1}{2}: \quad \text{elipse} \qquad r = \frac{k}{2 + \cos\theta}$$

$$e = 1: \quad \text{parábola} \qquad r = \frac{k}{1 + \cos\theta}$$

$$e = 2: \quad \text{hipérbola} \qquad r = \frac{2k}{1 + 2\cos\theta}$$

■

Usted puede ver variaciones de la ecuación (5), dependiendo de la ubicación de la directriz. Si la directriz es la recta $x = -k$ a la izquierda del origen (el origen es un foco), sustituimos la ecuación (5) por

$$r = \frac{ke}{1 - e\cos\theta}.$$

Ahora, el denominador tiene un signo $-$ en vez de un $+$. Si la directriz es una de las rectas $y = k$ o $y = -k$, las ecuaciones tendrán funciones seno en vez de coseno, como se muestra en la figura 11.51.

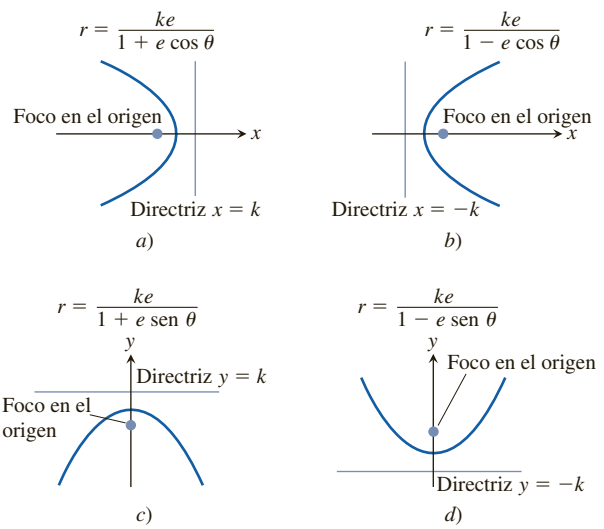


FIGURA 11.51 Ecuaciones para secciones cónicas con excentricidad $e > 0$, pero diferentes posiciones de la directriz. Las gráficas muestran una parábola, de manera que $e = 1$.

EJEMPLO 3 Obtenga la ecuación para la hipérbola con excentricidad $3/2$ y directriz $x = 2$.

Solución Usamos la ecuación (5) con $k = 2$ y $e = 3/2$:

$$r = \frac{2(3/2)}{1 + (3/2)\cos\theta} \quad \text{o} \quad r = \frac{6}{2 + 3\cos\theta}.$$

■

EJEMPLO 4 Obtenga la directriz de la parábola

$$r = \frac{25}{10 + 10\cos\theta}.$$

Solución Dividimos el numerador y el denominador entre 10 para dar a la ecuación la forma polar estándar:

$$r = \frac{5/2}{1 + \cos\theta}.$$

Ésta es la ecuación

$$r = \frac{ke}{1 + e\cos\theta},$$

donde $k = 5/2$ y $e = 1$. La ecuación para la directriz es $x = 5/2$. ■

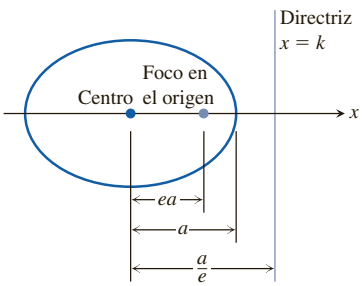


FIGURA 11.52 En una elipse con semieje mayor a, la distancia del foco a la directriz es $k = (a/e) - ea$, de manera que $ke = a(1 - e^2)$.

A partir del diagrama de la elipse de la figura 11.52, vemos que k está relacionada con la excentricidad e y el semieje mayor a por la ecuación

$$k = \frac{a}{e} - ea.$$

A partir de ésta podemos obtener $ke = a(1 - e^2)$. Sustituyendo ke en la ecuación (5) por $a(1 - e^2)$, encontramos la ecuación polar estándar de una elipse.

Ecuación polar de una elipse con excentricidad e y semieje mayor a

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta} \tag{6}$$

Observe que cuando $e = 0$, la ecuación (6) se convierte en $r = a$, lo cual representa una circunferencia.

Rectas

Supongamos que la perpendicular del origen a la recta L encuentra a L en el punto $P_0(r_0, \theta_0)$, con $r_0 \geq 0$ (figura 11.53). Entonces, si $P(r, \theta)$ es otro punto cualquiera sobre L, los puntos P, P_0 y O son los vértices de un triángulo rectángulo del cual podemos obtener la relación

$$r_0 = r\cos(\theta - \theta_0).$$

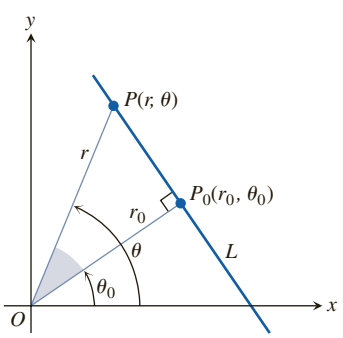


FIGURA 11.53 Podemos obtener una ecuación polar de la recta L interpretando la relación $r_0 = r\cos(\theta - \theta_0)$ en el triángulo rectángulo OP_0P.

La ecuación polar estándar para rectas

Si el punto $P_0(r_0, \theta_0)$ es el pie de la perpendicular del origen a la recta L y $r_0 \geq 0$, entonces, una ecuación para L es

$$r\cos(\theta - \theta_0) = r_0. \tag{7}$$

Por ejemplo, si $\theta_0 = \pi/3$ y $r_0 = 2$, encontramos que

$$r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 2$$

$$r\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = 2$$

$$\frac{1}{2}r\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}r\operatorname{sen}\theta = 2, \qquad \text{o} \qquad x + \sqrt{3}y = 4.$$

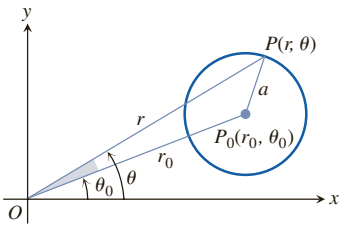


FIGURA 11.54 Podemos obtener la ecuación polar para esta circunferencia aplicando la ley de los cosenos al triángulo OP_0P.

Circunferencias

Para obtener la ecuación polar de una circunferencia de radio a con centro en $P_0(r_0, \theta_0)$, consideramos que $P(r, \theta)$ es un punto sobre la circunferencia y aplicamos la ley de los cosenos al triángulo OP_0P (figura 11.54). Esto da

$$a^2 = r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos(\theta - \theta_0).$$

Si la circunferencia pasa por el origen, entonces, $r_0 = a$ y esta ecuación se simplifica a

$$a^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos(\theta - \theta_0)$$
$$r^2 = 2ar \cos(\theta - \theta_0)$$
$$r = 2a \cos(\theta - \theta_0).$$

Si el centro de la circunferencia se encuentra sobre la parte positiva del eje x, $\theta_0 = 0$ y obtenemos una mayor simplificación

$$r = 2a \cos\theta. \tag{8}$$

Si el centro de la circunferencia se encuentra sobre la parte positiva del eje y, $\theta = \pi/2$, $\cos(\theta - \pi/2) = \operatorname{sen}\theta$, y la ecuación $r = 2a\cos(\theta - \theta_0)$ se convierte en

$$r = 2a \operatorname{sen}\theta. \tag{9}$$

Las ecuaciones para circunferencias que pasen por el origen con centros sobre la parte negativa de los ejes x y y se pueden obtener sustituyendo r por $-r$ en las ecuaciones anteriores.

EJEMPLO 5 Aquí hay varias ecuaciones polares dadas por las ecuaciones (8) y (9) para circunferencias que pasan por el origen y tienen sus centros sobre los ejes x o y.

Radio	Centro (coordenadas polares)	Ecuación polar
3	$(3, 0)$	$r = 6\cos\theta$
2	$(2, \pi/2)$	$r = 4\operatorname{sen}\theta$
$1/2$	$(-1/2, 0)$	$r = -\cos\theta$
1	$(-1, \pi/2)$	$r = -2\operatorname{sen}\theta$

■

Ejercicios 11.7

Elipses y excentricidad

En los ejercicios 1 a 8, determine la excentricidad de la elipse. Luego, encuentre y grafique los focos y las directrices de la elipse.

1. $16x^2 + 25y^2 = 400$
2. $7x^2 + 16y^2 = 112$
3. $2x^2 + y^2 = 2$
4. $2x^2 + y^2 = 4$
5. $3x^2 + 2y^2 = 6$
6. $9x^2 + 10y^2 = 90$
7. $6x^2 + 9y^2 = 54$
8. $169x^2 + 25y^2 = 4225$

En los ejercicios 9 a 12 se indican los focos o vértices y las excentricidades de elipses con centro en el origen del plano xy. En cada caso, determine la ecuación estándar de la elipse en coordenadas cartesianas.

9. Focos: $(0, \pm 3)$
Excentricidad: 0.5

10. Focos: $(\pm 8, 0)$
Excentricidad: 0.2

11. Vértices: $(0, \pm 70)$
Excentricidad: 0.1

12. Vértices: $(\pm 10, 0)$
Excentricidad: 0.24

En los ejercicios 13 a 16 se indican los focos y las directrices correspondientes de elipses centradas en el origen del plano xy. En cada caso, considere las dimensiones de la figura 11.47 para encontrar la excentricidad de la elipse. Luego, determine la ecuación estándar de la elipse en coordenadas cartesianas.

13. Foco: $\left(\sqrt{5}, 0\right)$
Directriz: $x = \dfrac{9}{\sqrt{5}}$

14. Foco: $(4, 0)$
Directriz: $x = \dfrac{16}{3}$

15. Foco: $(-4, 0)$
Directriz: $x = -16$

16. Foco: $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$
Directriz: $x = -2\sqrt{2}$

Hipérbolas y excentricidad

En los ejercicios 17 a 24, determine la excentricidad de la hipérbola. Luego, encuentre y grafique los focos y las directrices de la hipérbola.

17. $x^2 - y^2 = 1$ **18.** $9x^2 - 16y^2 = 144$

19. $y^2 - x^2 = 8$ **20.** $y^2 - x^2 = 4$

21. $8x^2 - 2y^2 = 16$ **22.** $y^2 - 3x^2 = 3$

23. $8y^2 - 2x^2 = 16$ **24.** $64x^2 - 36y^2 = 2304$

En los ejercicios 25 a 28 se indican las excentricidades y los vértices o focos de hipérbolas con centro en el origen del plano xy. En cada caso, determine la ecuación estándar de la hipérbola en coordenadas cartesianas.

25. Excentricidad: 3
Vértices: $(0, \pm 1)$

26. Excentricidad: 2
Vértices: $(\pm 2, 0)$

27. Excentricidad: 3
Focos: $(\pm 3, 0)$

28. Excentricidad: 1.25
Focos: $(0, \pm 5)$

Excentricidad y directrices

En los ejercicios 29 a 36 se indican las excentricidades de secciones cónicas con un foco en el origen junto con la directriz correspondiente a ese foco. Obtenga la ecuación polar de cada sección cónica.

29. $e = 1, \quad x = 2$ **30.** $e = 1, \quad y = 2$

31. $e = 5, \quad y = -6$ **32.** $e = 2, \quad x = 4$

33. $e = 1/2, \quad x = 1$ **34.** $e = 1/4, \quad x = -2$

35. $e = 1/5, \quad y = -10$ **36.** $e = 1/3, \quad y = 6$

Parábolas y elipses

Trace las parábolas y las elipses de los ejercicios 37 a 44. Incluya la directriz que corresponde al foco en el origen. Marque los vértices con las coordenadas polares adecuadas y marque también los centros de las elipses.

37. $r = \dfrac{1}{1 + \cos\theta}$ **38.** $r = \dfrac{6}{2 + \cos\theta}$

39. $r = \dfrac{25}{10 - 5\cos\theta}$ **40.** $r = \dfrac{4}{2 - 2\cos\theta}$

41. $r = \dfrac{400}{16 + 8\,\text{sen}\,\theta}$ **42.** $r = \dfrac{12}{3 + 3\,\text{sen}\,\theta}$

43. $r = \dfrac{8}{2 - 2\,\text{sen}\,\theta}$ **44.** $r = \dfrac{4}{2 - \text{sen}\,\theta}$

Rectas

Dibuje las rectas de los ejercicios 45 a 48 y encuentre las ecuaciones cartesianas correspondientes.

45. $r\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ **46.** $r\cos\left(\theta + \dfrac{3\pi}{4}\right) = 1$

47. $r\cos\left(\theta - \dfrac{2\pi}{3}\right) = 3$ **48.** $r\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = 2$

Obtenga la ecuación polar de la forma $r\cos(\theta - \theta_0) = r_0$ para cada una de las rectas de los ejercicios 49 a 52.

49. $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 6$ **50.** $\sqrt{3}x - y = 1$

51. $y = -5$ **52.** $x = -4$

Circunferencias

Trace las circunferencias de los ejercicios 53 a 56. Obtenga las coordenadas polares de sus centros e identifique sus radios.

53. $r = 4\cos\theta$ **54.** $r = 6\,\text{sen}\,\theta$

55. $r = -2\cos\theta$ **56.** $r = -8\,\text{sen}\,\theta$

Obtenga las ecuaciones polares de las circunferencias en los ejercicios 57 a 64. Trace todas las circunferencias en el plano de coordenadas y anote junto a ellas tanto sus ecuaciones cartesianas como las polares.

57. $(x - 6)^2 + y^2 = 36$ **58.** $(x + 2)^2 + y^2 = 4$

59. $x^2 + (y - 5)^2 = 25$ **60.** $x^2 + (y + 7)^2 = 49$

61. $x^2 + 2x + y^2 = 0$ **62.** $x^2 - 16x + y^2 = 0$

63. $x^2 + y^2 + y = 0$ **64.** $x^2 + y^2 - \dfrac{4}{3}y = 0$

Ejemplos de ecuaciones polares

T Grafique las rectas y secciones cónicas de los ejercicios 65 a 74.

65. $r = 3\sec(\theta - \pi/3)$ **66.** $r = 4\sec(\theta + \pi/6)$

67. $r = 4\,\text{sen}\,\theta$ **68.** $r = -2\cos\theta$

69. $r = 8/(4 + \cos\theta)$ **70.** $r = 8/(4 + \text{sen}\,\theta)$

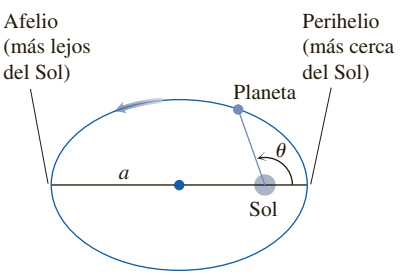
71. $r = 1/(1 - \text{sen}\,\theta)$ **72.** $r = 1/(1 + \cos\theta)$

73. $r = 1/(1 + 2\,\text{sen}\,\theta)$ **74.** $r = 1/(1 + 2\cos\theta)$

75. Perihelio y afelio Un planeta viaja alrededor de su sol en una trayectoria elíptica cuyo semieje mayor tiene una longitud a. (Vea la figura más adelante).

a) Demuestre que $r = a(1 - e)$ cuando el planeta está más cerca del sol y que $r = a(1 + e)$ cuando está más lejos del sol.

b) Considere los datos de la tabla del ejercicio 76 para encontrar qué tan cerca pasa del Sol cada planeta de nuestro Sistema Solar, y qué tanto se aleja de él.



76. Órbitas planetarias Considere los datos de la siguiente tabla y la ecuación (6) para obtener las ecuaciones polares de las órbitas de los planetas.

Planeta	Semieje mayor (unidades astronómicas)	Excentricidad
Mercurio	0.3871	0.2056
Venus	0.7233	0.0068
Tierra	1.000	0.0167
Marte	1.524	0.0934
Júpiter	5.203	0.0484
Saturno	9.539	0.0543
Urano	19.18	0.0460
Neptuno	30.06	0.0082

Capítulo 11 Preguntas de repaso

1. ¿Qué es una parametrización de una curva en el plano xy? ¿Una función $y = f(x)$ siempre tiene parametrización? ¿Son únicas las parametrizaciones de una curva? Dé ejemplos.
2. Indique algunas parametrizaciones típicas de rectas, circunferencias, parábolas, elipses e hipérbolas. ¿Cómo podría diferir la curva parametrizada de la gráfica de su ecuación cartesiana?
3. ¿Qué es una cicloide? ¿Cuáles son las ecuaciones paramétricas típicas de las cicloides? ¿Qué propiedades físicas hacen importantes a las cicloides?
4. ¿Cuál es la fórmula de la pendiente dy/dx de una curva parametrizada $x = f(t)$, $y = g(t)$? ¿Cuándo se aplica la fórmula? ¿Cuándo se espera encontrar d^2y/dx^2 también? Dé ejemplos.
5. ¿Cómo puede encontrar el área acotada por una curva parametrizada y uno de los ejes de coordenadas?
6. ¿Cómo se obtiene la longitud de una curva parametrizada suave $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t \le b$? ¿Qué tiene que ver la suavidad con la longitud? ¿Qué más necesita saber acerca de la parametrización para obtener la longitud de la curva? Dé ejemplos.
7. ¿Cuál es la función de longitud de arco para una curva parametrizada suave? ¿Cuál es su diferencial de longitud de arco?
8. ¿En qué condiciones puede encontrar el área de la superficie generada por la rotación de una curva $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t \le b$, alrededor del eje x? ¿Y alrededor del eje y? Dé ejemplos.
9. ¿Qué son las coordenadas polares? ¿Cuáles ecuaciones relacionan las coordenadas polares con las coordenadas cartesianas? ¿Por qué desearía cambiar de un sistema de coordenadas al otro?
10. ¿Qué consecuencias tiene la falta de unicidad de las coordenadas polares para graficar? Dé un ejemplo.
11. ¿Cómo grafica las ecuaciones en coordenadas polares? Incluya en su explicación la simetría, la pendiente, el comportamiento en el origen y el uso de gráficas cartesianas. Dé ejemplos.
12. ¿Cómo obtiene el área de una región $0 \le r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$, en el plano de coordenadas polares? Dé ejemplos.
13. ¿En qué condiciones puede encontrar la longitud de una curva $r = f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$, en el plano de coordenadas polares? Dé el ejemplo de un cálculo típico.
14. ¿Qué es una parábola? ¿Cuáles son las ecuaciones cartesianas de las parábolas cuyos vértices se encuentran en el origen y sus focos están en los ejes de coordenadas? ¿Cómo puede encontrar el foco y la directriz de tal parábola a partir de su ecuación?
15. ¿Qué es una elipse? ¿Cuáles son las ecuaciones cartesianas de las elipses con centro en el origen y focos en uno de los ejes de coordenadas? ¿Cómo obtendría los focos, los vértices y las directrices de tales elipses a partir de su ecuación?
16. ¿Qué es una hipérbola? ¿Cuáles son las ecuaciones cartesianas de las hipérbolas con centro en el origen y focos en uno de los ejes de coordenadas? ¿Cómo obtendría los focos, los vértices y las directrices de tales hipérbolas a partir de su ecuación?
17. ¿Qué es la excentricidad de una sección cónica? ¿Cómo clasificaría las cónicas de acuerdo con su excentricidad? ¿Cómo cambia la excentricidad con la forma de las elipses y las hipérbolas?
18. Explique la ecuación $PF = e \cdot PD$.
19. ¿Cuáles son las ecuaciones estándar para rectas y secciones cónicas en coordenadas polares? Dé ejemplos.

Capítulo 11 Ejercicios de práctica

Identificación de ecuaciones paramétricas en el plano

En los ejercicios 1 a 6 se incluyen las ecuaciones paramétricas y los intervalos del parámetro para el movimiento de una partícula en el plano xy. Identifique la trayectoria de la partícula, obteniendo para ello una ecuación cartesiana. Grafique la ecuación cartesiana e indique la dirección del movimiento y la parte de la trayectoria trazada por la partícula.

1. $x = t/2, \quad y = t + 1; \quad -\infty < t < \infty$
2. $x = \sqrt{t}, \quad y = 1 - \sqrt{t}; \quad t \ge 0$
3. $x = (1/2)\tan t, \quad y = (1/2)\sec t; \quad -\pi/2 < t < \pi/2$
4. $x = -2\cos t, \quad y = 2\operatorname{sen} t; \quad 0 \le t \le \pi$
5. $x = -\cos t, \quad y = \cos^2 t; \quad 0 \le t \le \pi$
6. $x = 4\cos t, \quad y = 9\operatorname{sen} t; \quad 0 \le t \le 2\pi$

Obtención de ecuaciones paramétricas y rectas tangentes

7. Obtenga las ecuaciones paramétricas y el intervalo del parámetro del movimiento de una partícula en el plano xy que traza la elipse $16x^2 + 9y^2 = 144$ una sola vez en sentido contrario al de las manecillas del reloj. (Hay muchas maneras de lograrlo).
8. Obtenga las ecuaciones paramétricas y el intervalo del parámetro del desplazamiento de una partícula que inicia en el punto $(-2, 0)$ en el plano xy y traza la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ tres veces en el sentido de las manecillas del reloj. (Hay muchas maneras de lograrlo).

En los ejercicios 9 y 10, determine la ecuación para la recta en el plano xy que es tangente a una curva en el punto correspondiente al valor dado de t. También determine el valor de d^2y/dx^2 en ese punto.

9. $x = (1/2)\tan t, \quad y = (1/2)\sec t; \quad t = \pi/3$
10. $x = 1 + 1/t^2, \quad y = 1 - 3/t; \quad t = 2$
11. Elimine el parámetro para expresar la curva en la forma $y = f(x)$.
    a) $x = 4t^2, \quad y = t^3 - 1$
    b) $x = \cos t, \quad y = \tan t$
12. Obtenga las ecuaciones paramétricas de las siguientes curvas.
    a) Recta que pasa por $(1, -2)$ con pendiente 3
    b) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$
    c) $y = 4x^2 - x$
    d) $9x^2 + 4y^2 = 36$

Longitudes de curvas

Obtenga las longitudes de las curvas de los ejercicios 13 a 19.

13. $y = x^{1/2} - (1/3)x^{3/2}, \quad 1 \le x \le 4$

14. $x = y^{2/3}, \quad 1 \le y \le 8$

15. $y = (5/12)x^{6/5} - (5/8)x^{4/5}, \quad 1 \le x \le 32$

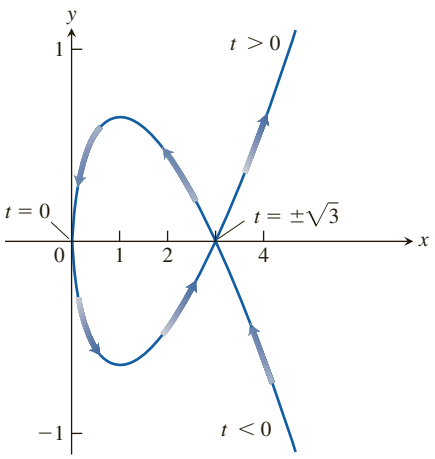
16. $x = (y^3/12) + (1/y), \quad 1 \le y \le 2$

17. $x = 5\cos t - \cos 5t, \quad y = 5\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 5t, \quad 0 \le t \le \pi/2$

18. $x = t^3 - 6t^2, \quad y = t^3 + 6t^2, \quad 0 \le t \le 1$

19. $x = 3\cos\theta, \quad y = 3\operatorname{sen}\theta, \quad 0 \le \theta \le \dfrac{3\pi}{2}$

20. Obtenga la longitud del lazo acotado por $x = t^2, y = (t^3/3) - t$ que se muestra en la figura. El lazo inicia en $t = -\sqrt{3}$ y termina en $t = \sqrt{3}$.



Áreas de superficies

Obtenga las áreas de las superficies generadas por la rotación de las curvas de los ejemplos 21 y 22 alrededor de los ejes indicados.

21. $x = t^2/2, \quad y = 2t, \quad 0 \le t \le \sqrt{5}$; eje x

22. $x = t^2 + 1/(2t), \quad y = 4\sqrt{t}, \quad 1/\sqrt{2} \le t \le 1$; eje y

Conversión de ecuaciones polares a cartesianas

Trace las rectas de los ejercicios 23 a 28. También determine la ecuación cartesiana para cada recta.

23. $r\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}$

24. $r\cos\left(\theta - \dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

25. $r = 2\sec\theta$

26. $r = -\sqrt{2}\sec\theta$

27. $r = -(3/2)\csc\theta$

28. $r = \left(3\sqrt{3}\right)\csc\theta$

Determine las ecuaciones cartesianas de las circunferencias de los ejercicios 29 a 32. Trace cada circunferencia en el plano de coordenadas y anote sus ecuaciones cartesiana y polar.

29. $r = -4\operatorname{sen}\theta$

30. $r = 3\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta$

31. $r = 2\sqrt{2}\cos\theta$

32. $r = -6\cos\theta$

Conversión de ecuaciones cartesianas a polares

Obtenga las ecuaciones polares de las circunferencias de los ejercicios 33 a 36. Trace cada circunferencia en el plano de coordenadas y anote sus ecuaciones cartesiana y polar.

33. $x^2 + y^2 + 5y = 0$

34. $x^2 + y^2 - 2y = 0$

35. $x^2 + y^2 - 3x = 0$

36. $x^2 + y^2 + 4x = 0$

Gráficas en coordenadas polares

Grafique las regiones definidas por las desigualdades en coordenadas polares de los ejercicios 37 y 38.

37. $0 \le r \le 6\cos\theta$

38. $-4\operatorname{sen}\theta \le r \le 0$

Relacione cada gráfica de los ejercicios 39 a 46 con la ecuación adecuada eligiendo entre los incisos *a*) a *l*). Hay más ecuaciones que gráficas, de manera que algunas ecuaciones no tendrán gráfica correspondiente.

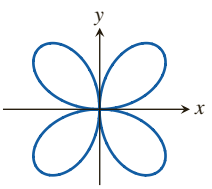
a) $r = \cos 2\theta$ ***b)*** $r\cos\theta = 1$ ***c)*** $r = \dfrac{6}{1 - 2\cos\theta}$

d) $r = \operatorname{sen} 2\theta$ ***e)*** $r = \theta$ ***f)*** $r^2 = \cos 2\theta$

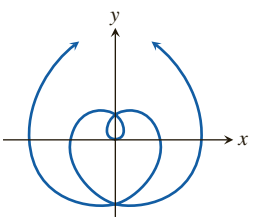
g) $r = 1 + \cos\theta$ ***h)*** $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$ ***i)*** $r = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}$

j) $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$ ***k)*** $r = -\operatorname{sen}\theta$ ***l)*** $r = 2\cos\theta + 1$

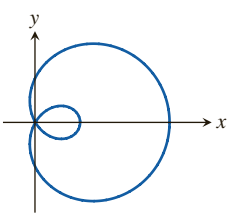
39. Rosa de cuatro pétalos



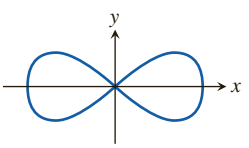
40. Espiral



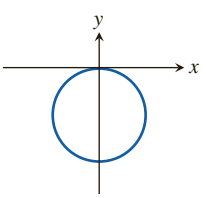
41. Limaçon



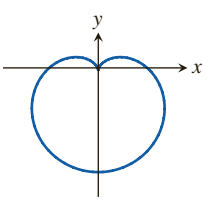
42. Lemniscata



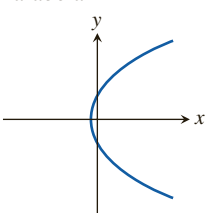
43. Circunferencia



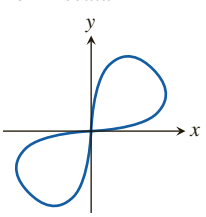
44. Cardioide



45. Parábola



46. Lemniscata



Área en coordenadas polares

Determine las áreas de las regiones en el plano de coordenadas polares descritas en los ejercicios 47 a 50.

47. Región acotada por el limaçon $r = 2 - \cos\theta$

48. Región acotada por un pétalo de la rosa de tres pétalos $r = \operatorname{sen} 3\theta$

49. Región dentro de la "figura de un ocho" $r = 1 + \cos 2\theta$ y afuera de la circunferencia $r = 1$

50. Región dentro de la cardioide $r = 2(1 + \operatorname{sen}\theta)$ y afuera de la circunferencia $r = 2\operatorname{sen}\theta$

Longitud en coordenadas polares

Obtenga las longitudes de las curvas dadas por las ecuaciones en coordenadas polares de los ejercicios 51 a 54.

51. $r = -1 + \cos\theta$

52. $r = 2\,\text{sen}\,\theta + 2\cos\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi/2$

53. $r = 8\,\text{sen}^3(\theta/3), \quad 0 \le \theta \le \pi/4$

54. $r = \sqrt{1 + \cos 2\theta}, \quad -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$

Gráficas de secciones cónicas

Trace las parábolas de los ejercicios 55 a 58. Incluya el foco y la directriz en todos los dibujos.

55. $x^2 = -4y$ **56.** $x^2 = 2y$

57. $y^2 = 3x$ **58.** $y^2 = -(8/3)x$

Determine las excentricidades de las elipses e hipérbolas de los ejercicios 59 a 62. Dibuje cada sección cónica. Incluya los focos, los vértices y las asíntotas (cuando sea adecuado) en su dibujo.

59. $16x^2 + 7y^2 = 112$ **60.** $x^2 + 2y^2 = 4$

61. $3x^2 - y^2 = 3$ **62.** $5y^2 - 4x^2 = 20$

En los ejercicios 63 a 68 se presentan ecuaciones para secciones cónicas y se indican las unidades que se desplaza la curva hacia arriba o hacia abajo y a la izquierda o a la derecha. Determine la ecuación para la nueva sección cónica y determine los focos, los vértices, los centros y las asíntotas nuevos, cuando sea pertinente. Si la curva es una parábola, determine también la nueva directriz.

63. $x^2 = -12y$, derecha 2, arriba 3

64. $y^2 = 10x$, izquierda 1/2, abajo 1

65. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$, izquierda 3, abajo 5

66. $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$, derecha 5, arriba 12

67. $\dfrac{y^2}{8} - \dfrac{x^2}{2} = 1$, derecha 2, arriba $2\sqrt{2}$

68. $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = 1$, izquierda 10, abajo 3

Identificación de secciones cónicas

Complete los cuadrados para identificar las secciones cónicas en los ejercicios 69 a 76. Obtenga los focos, los vértices, los centros y las asíntotas (cuando sea pertinente). Si la curva es una parábola, determine también la nueva directriz.

69. $x^2 - 4x - 4y^2 = 0$ **70.** $4x^2 - y^2 + 4y = 8$

71. $y^2 - 2y + 16x = -49$ **72.** $x^2 - 2x + 8y = -17$

73. $9x^2 + 16y^2 + 54x - 64y = -1$

74. $25x^2 + 9y^2 - 100x + 54y = 44$

75. $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ **76.** $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 1$

Cónicas en coordenadas polares

Grafique las secciones cónicas cuyas ecuaciones en coordenadas polares se indican en los ejercicios 77 a 80. Dé las coordenadas polares de los vértices y, en el caso de las elipses, también de los centros.

77. $r = \dfrac{2}{1 + \cos\theta}$ **78.** $r = \dfrac{8}{2 + \cos\theta}$

79. $r = \dfrac{6}{1 - 2\cos\theta}$ **80.** $r = \dfrac{12}{3 + \text{sen}\,\theta}$

En los ejercicios 81 a 84 se indican las excentricidades de secciones cónicas con un foco en el origen del plano de coordenadas polares, junto con la directriz para ese foco. Obtenga una ecuación polar para cada sección cónica.

81. $e = 2, \quad r\cos\theta = 2$

82. $e = 1, \quad r\cos\theta = -4$

83. $e = 1/2, \quad r\,\text{sen}\,\theta = 2$

84. $e = 1/3, \quad r\,\text{sen}\,\theta = -6$

Teoría y ejemplos

85. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ alrededor del ***a***) eje x, ***b***) eje y.

86. La región "triangular" en el primer cuadrante acotada por el eje x, la recta $x = 4$ y la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$ se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. Obtenga el volumen del sólido.

87. Demuestre que las ecuaciones $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ transforman la ecuación polar

$$r = \frac{k}{1 + e\cos\theta}$$

en la ecuación cartesiana

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 + 2kex - k^2 = 0.$$

88. Espirales de Arquímedes La gráfica de una ecuación de la forma $r = a\theta$, donde a es una constante diferente de cero, se denomina *espiral de Arquímedes*. ¿Existe algo especial acerca del ancho de las vueltas sucesivas de una espiral?

Capítulo 11 Ejercicios adicionales y avanzados

Determinación de secciones cónicas

1. Determine la ecuación para la parábola con foco en (4, 0) y directriz $x = 3$. Trace la parábola junto con su vértice, foco y directriz.

2. Obtenga el foco, el vértice y la directriz de la parábola

$$x^2 - 6x - 12y + 9 = 0.$$

3. Determine la ecuación para la curva que traza el punto $P(x, y)$ si la distancia de P al vértice de la parábola $x^2 = 4y$ es el doble de la distancia de P al foco. Identifique la curva.

4. Un segmento de recta de longitud $a + b$ va del eje x al eje y. El punto P en el segmento está a a unidades de uno de los extremos y a b unidades del otro extremo. Demuestre que P traza una elipse cuando los extremos del segmento se deslizan a lo largo de los ejes.

5. Los vértices de una elipse de excentricidad 0.5 se localizan en los puntos $(0, \pm 2)$. ¿Dónde se encuentran los focos?

6. Obtenga la ecuación para la elipse de excentricidad 2/3 que tiene a la recta $x = 2$ como una directriz y el punto (4, 0) como el foco correspondiente.

7. El foco de una hipérbola se localiza en el punto $(0, -7)$ y la directriz correspondiente es la recta $y = -1$. Determine la ecuación para la hipérbola si su excentricidad es ***a)*** 2, ***b)*** 5.

8. Obtenga una ecuación para la hipérbola con focos en $(0, -2)$ y $(0, 2)$ que pasa por el punto $(12, 7)$.

9. Demuestre que la recta

$$b^2xx_1 + a^2yy_1 - a^2b^2 = 0$$

es tangente a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ en el punto (x_1, y_1) en la elipse.

10. Demuestre que la recta

$$b^2xx_1 + a^2yy_1 - a^2b^2 = 0$$

es tangente a la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ en el punto (x_1, y_1) en la hipérbola.

Ecuaciones y desigualdades

¿Qué puntos en el plano xy satisfacen las ecuaciones y desigualdades en los ejercicios 11 a 16? Dibuje una figura para cada ejercicio.

11. $(x^2 - y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + 4y^2 - 4) = 0$

12. $(x + y)(x^2 + y^2 - 1) = 0$

13. $(x^2/9) + (y^2/16) \le 1$

14. $(x^2/9) - (y^2/16) \le 1$

15. $(9x^2 + 4y^2 - 36)(4x^2 + 9y^2 - 16) \le 0$

16. $(9x^2 + 4y^2 - 36)(4x^2 + 9y^2 - 16) > 0$

Coordenadas polares

17. ***a)*** Obtenga la ecuación en coordenadas polares para la curva

$$x = e^{2t}\cos t, \quad y = e^{2t}\operatorname{sen} t; \quad -\infty < t < \infty.$$

b) Determine la longitud de la curva de $t = 0$ a $t = 2\pi$.

18. Obtenga la longitud de la curva $r = 2\operatorname{sen}^3(\theta/3)$, $0 \le \theta \le 3\pi$, en el plano de coordenadas polares.

En los ejercicios 19 a 22 se indican las excentricidades de secciones cónicas con un foco en el origen del plano de coordenadas polares, junto con la directriz de ese foco. Obtenga la ecuación polar para cada sección cónica.

19. $e = 2, \quad r\cos\theta = 2$

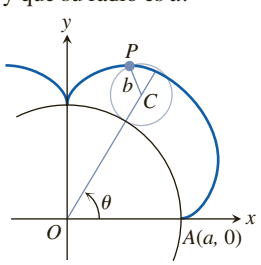
20. $e = 1, \quad r\cos\theta = -4$

21. $e = 1/2, \quad r\operatorname{sen}\theta = 2$

22. $e = 1/3, \quad r\operatorname{sen}\theta = -6$

Teoría y ejemplos

23. Epicicloides Cuando un círculo rueda por fuera, a lo largo de una circunferencia de otro círculo fijo, cualquier punto P sobre la circunferencia del círculo que rueda describe una *epicicloide*, como se muestra en la figura. Suponga que el centro del círculo fijo es el origen O y que su radio es a.



Sea b el radio del círculo rodante y sea $A(a, 0)$ la posición inicial del punto P que traza la curva. Determine las ecuaciones paramétricas de la epicicloide, usando como parámetro el ángulo θ que forma el eje x positivo con la recta que pasa por los centros de los círculos.

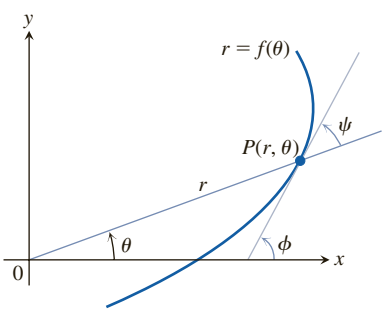
24. Obtenga el centroide de la región acotada por el eje x y el arco de la cicloide

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t); \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

El ángulo entre el radio vector y la recta tangente a una curva de coordenadas polares En coordenadas cartesianas, cuando queremos analizar la dirección de una curva en un punto, usamos el ángulo θ medido en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde la parte positiva del eje x hasta la recta tangente. En coordenadas polares, es más conveniente calcular el ángulo ψ del *radio vector* a la recta tangente (vea la siguiente figura). El ángulo ϕ se puede calcular entonces a partir de la relación

$$\phi = \theta + \psi, \tag{1}$$

la cual obtenemos de la aplicación del teorema del ángulo exterior al triángulo de la figura



Suponga que la ecuación para la curva está dada en la forma $r = f(\theta)$, donde $f(\theta)$ es una función derivable de θ. Entonces,

$$x = r\cos\theta \quad \text{y} \quad y = r\operatorname{sen}\theta \tag{2}$$

son funciones derivables de θ con

$$\frac{dx}{d\theta} = -r\operatorname{sen}\theta + \cos\theta\frac{dr}{d\theta},$$

$$\frac{dy}{d\theta} = r\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\frac{dr}{d\theta}. \tag{3}$$

Puesto que $\psi = \phi - \theta$ de la ecuación (1),

$$\tan\psi = \tan(\phi - \theta) = \frac{\tan\phi - \tan\theta}{1 + \tan\phi\tan\theta}.$$

Además,

$$\tan\phi = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$$

debido a que $\tan\phi$ es la pendiente de la curva en P. También,

$$\tan\theta = \frac{y}{x}.$$

De ahí que

$$\tan\psi = \frac{\dfrac{dy/d\theta}{dx/d\theta} - \dfrac{y}{x}}{1 + \dfrac{y}{x}\dfrac{dy/d\theta}{dx/d\theta}} = \frac{x\dfrac{dy}{d\theta} - y\dfrac{dx}{d\theta}}{x\dfrac{dx}{d\theta} + y\dfrac{dy}{d\theta}}. \tag{4}$$

El numerador de la última expresión en la ecuación (4) se obtiene de las ecuaciones (2) y (3)

$$x\frac{dy}{d\theta} - y\frac{dx}{d\theta} = r^2.$$

De manera similar, el denominador es

$$x\frac{dx}{d\theta} + y\frac{dy}{d\theta} = r\frac{dr}{d\theta}.$$

Cuando sustituimos estas ecuaciones en la ecuación (4), obtenemos

$$\tan\psi = \frac{r}{dr/d\theta}. \tag{5}$$

Ésta es la ecuación que usamos para obtener ψ como una función de θ.

25. Tomando como referencia la figura, demuestre que el ángulo β entre las tangentes de dos curvas en el punto de intersección se puede obtener de la fórmula

$$\tan\beta = \frac{\tan\psi_2 - \tan\psi_1}{1 + \tan\psi_2 \tan\psi_1}. \tag{6}$$

¿Cuándo se cruzan las dos curvas en ángulos rectos?

26. Obtenga el valor de la tangente de ψ para la curva $r = \text{sen}^4(\theta/4)$.

27. Obtenga el ángulo entre el radio vector a la curva $r = 2a \text{ sen } 3\theta$ y su tangente cuando $\theta = \pi/6$.

T **28.** ***a)*** Grafique la espiral hiperbólica $r\theta = 1$. ¿Qué parece ocurrirle a ψ cuando la espiral da vuelta alrededor del origen?

b) Confirme su descubrimiento del inciso *a)* de manera analítica.

29. Las circunferencias $r = \sqrt{3}\cos\theta$ y $r = \text{sen } \theta$ se intersecan en el punto $(\sqrt{3}/2, \pi/3)$. Demuestre que sus tangentes son perpendiculares en este punto.

30. Obtenga el ángulo en el cual la cardioide $r = a(1 - \cos\theta)$ cruza el rayo $\theta = \pi/2$.

Capítulo 11 Proyectos de aplicación tecnológica

Módulos Mathematica/Maple

Rastreo por radar de un objeto en movimiento

Parte I: Convierta de coordenadas polares a coordenadas cartesianas.

Ecuaciones paramétricas y polares de un patinador artístico

Parte I: Visualice posición, velocidad y aceleración para analizar el movimiento definido por medio de ecuaciones paramétricas.

Parte II: Determine y analice las ecuaciones de movimiento de un patinador artístico que traza una curva polar.

12

Vectores y geometría del espacio

INTRODUCCIÓN Este capítulo es fudamental en el estudio del cálculo de varias variables. Para aplicar el cálculo a diversas situaciones reales y en matemáticas avanzadas, necesitamos de la geometría analítica para describir el espacio tridimensional. Para lograr este objetivo, presentaremos los sistemas de coordenadas y los vectores tridimensionales. Con base en nuestros conocimientos acerca de las coordenadas en el plano xy, estableceremos coordenadas en el espacio agregando un tercer eje que mide la distancia hacia arriba y hacia abajo del plano xy. Luego, definiremos los vectores y los utilizaremos para estudiar la geometría analítica del espacio. Los vectores ofrecen maneras sencillas de describir rectas, planos, curvas y superficies en el espacio. Usaremos estos conceptos geométricos más adelante para estudiar el movimiento en el espacio y el cálculo de funciones de varias variables y campos vectoriales, con diversas aplicaciones importantes en ciencias, ingeniería, investigación de operaciones, economía y matemáticas avanzadas.

12.1 Sistemas de coordenadas tridimensionales

Para localizar un punto en el espacio, utilizamos tres ejes de coordenadas mutuamente perpendiculares, dispuestos como en la figura 12.1. Los ejes allí mostrados forman un sistema de coordenadas con la *regla de la mano derecha*. Cuando se sostiene la mano derecha de tal manera que los dedos meñique a índice se curven del eje x positivo hacia al eje y positivo, el dedo pulgar apunta en la dirección del eje z positivo. Así, cuando se mira hacia abajo al plano xy desde la dirección positiva del eje z, los ángulos positivos en el plano se miden en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, a partir del eje x positivo y alrededor del eje z positivo. (En un sistema de coordenadas con la regla de la mano izquierda, el eje z apuntaría hacia abajo en la figura 12.1 y los ángulos en el plano serían positivos al medirse en el sentido de las manecillas del reloj a partir del eje x positivo. Los sistemas de coordenadas con la regla de la mano derecha no son equivalentes a los que emplean la regla de la mano izquierda).

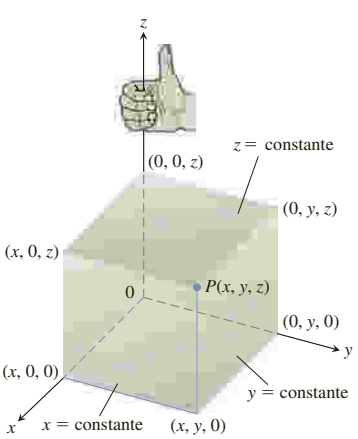


FIGURA 12.1 El sistema de coordenadas cartesianas sigue la convención de la mano derecha.

Las coordenadas cartesianas (x, y, z) de un punto P en el espacio son los valores en los cuales los planos que pasan por P, perpendiculares a los ejes, cortan los ejes. Las coordenadas cartesianas del espacio también se llaman **coordenadas rectangulares**, porque los ejes que las definen se cortan en ángulos rectos. Los puntos sobre el eje x tienen las coordenadas y y z iguales a cero. Es decir, tienen coordenadas de la forma $(x, 0, 0)$. De manera análoga, los puntos sobre el eje y tienen coordenadas de la forma $(0, y, 0)$, y los puntos sobre el eje z tienen coordenadas de la forma $(0, 0, z)$.

Los planos determinados por los ejes de coordenadas son el **plano *xy***, cuya ecuación estándar es $z = 0$; el **plano *yz***, cuya ecuación usual es $x = 0$, y el **plano *xz***, cuya ecuación habitual es $y = 0$. Estos planos se cortan en el origen $(0, 0, 0)$ (figura 12.2). El **origen** también se identifica simplemente como 0 o, en ocasiones, por la letra O.

Los tres **planos de coordenadas** $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$ dividen al espacio en ocho celdas llamadas **octantes**. El octante en el cual todas las coordenadas de un punto son positivas se llama **primer octante**; no hay una numeración convencional para los otros siete octantes.

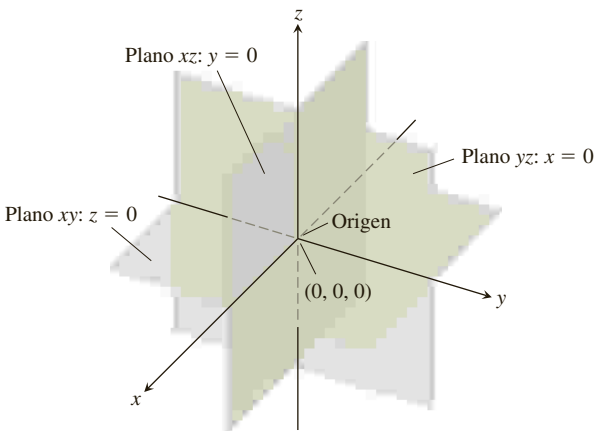


FIGURA 12.2 Los planos $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$ dividen el espacio en ocho octantes.

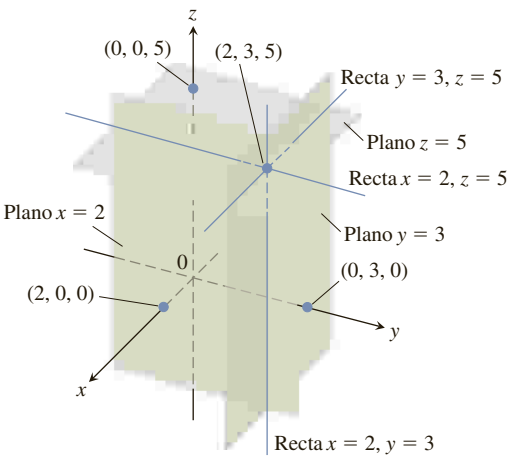


FIGURA 12.3 Los planos $x = 2$, $y = 3$ y $z = 5$ determinan tres rectas que pasan por el punto (2, 3, 5).

Los puntos en un plano perpendicular al eje x tienen todos la misma coordenada x, que es el número correspondiente al punto donde el plano corta al eje x. Las coordenadas y y z pueden ser números cualesquiera. De manera análoga, los puntos en un plano perpendicular al eje y tienen la misma coordenada y, y los puntos en un plano perpendicular al eje z tienen una coordenada z común. Para escribir las ecuaciones de estos planos, utilizamos el valor de la coordenada común. El plano $x = 2$ es el plano perpendicular al eje x en $x = 2$. El plano $y = 3$ es el plano perpendicular al eje y en $y = 3$. El plano $z = 5$ es el plano perpendicular al eje z en $z = 5$. La figura 12.3 muestra los planos $x = 2$, $y = 3$ y $z = 5$, junto con su punto de intersección (2, 3, 5).

Los planos $x = 2$ y $y = 3$ de la figura 12.3 se intersecan en una recta paralela al eje z. Esta recta queda descrita por el *par* de ecuaciones $x = 2$, $y = 3$. Un punto (x, y, z) se localiza en la recta si y sólo si $x = 2$ y $y = 3$. De igual manera, la línea de intersección de los planos $y = 3$ y $z = 5$ queda descrita por el par de ecuaciones $y = 3$, $z = 5$. Esta recta corre paralela al eje x. La recta de intersección de los planos $x = 2$ y $z = 5$, paralela al eje y, queda descrita por el par de ecuaciones $x = 2$, $z = 5$.

En los siguientes ejemplos relacionamos ecuaciones y desigualdades de coordenadas con los conjuntos de puntos que definen en el espacio.

EJEMPLO 1 Interpretación geométrica de ecuaciones y desigualdades.

a)	$z \geq 0$	El semiespacio que consta de los puntos que están en el plano xy y por arriba de éste.
b)	$x = -3$	El plano perpendicular al eje x en $x = -3$. Este plano es paralelo al plano yz y se localiza tres unidades atrás de él.
c)	$z = 0, x \leq 0, y \geq 0$	El segundo cuadrante del plano xy.
d)	$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$	El primer octante.
e)	$-1 \leq y \leq 1$	El bloque entre los planos $y = -1$ y $y = 1$ (con estos planos incluidos).
f)	$y = -2, z = 2$	La recta donde se intersecan los planos $y = -2$ y $z = 2$; o bien, de manera alternativa, la recta paralela al eje x que pasa por el punto $(0, -2, 2)$. ■

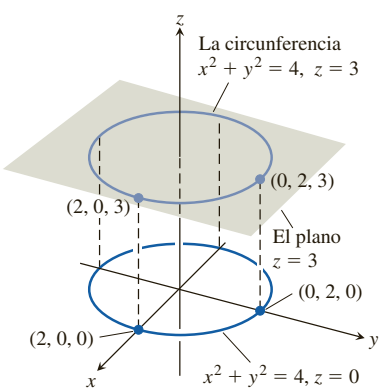


FIGURA 12.4 La circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ en el plano $z = 3$ (ejemplo 2).

EJEMPLO 2 ¿Qué puntos $P(x, y, z)$ satisfacen las ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 4 \qquad \text{y} \qquad z = 3?$$

Solución Los puntos están en el plano horizontal $z = 3$ y, en este plano, forman la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. Este conjunto de puntos se identifica como "la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ en el plano $z = 3$" o, simplemente, "la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, $z = 3$" (figura 12.4). ■

Distancia y esferas en el espacio

La fórmula para la distancia entre dos puntos en el plano xy se extiende a puntos en el espacio.

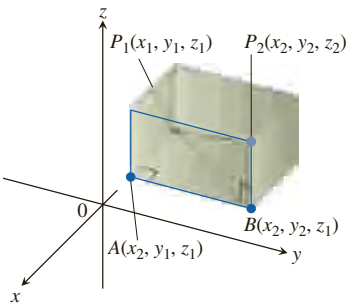


FIGURA 12.5 Calculamos la distancia entre P_1 y P_2 aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos P_1AB y P_1BP_2.

La distancia entre $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ es

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Demostración Construimos una caja rectangular con caras paralelas a los planos de coordenadas, y con los puntos P_1 y P_2 ubicados en esquinas opuestas de la caja (figura 12.5). Si $A(x_2, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_1)$ son los vértices de la caja, como se indica en la figura, entonces las tres aristas de la caja P_1A, AB, BP_2 tienen longitudes

$$|P_1A| = |x_2 - x_1|, \qquad |AB| = |y_2 - y_1|, \qquad |BP_2| = |z_2 - z_1|.$$

Como los triángulos P_1BP_2 y P_1AB son triángulos rectángulos, dos aplicaciones del teorema de Pitágoras implican que

$$|P_1P_2|^2 = |P_1B|^2 + |BP_2|^2 \qquad \text{y} \qquad |P_1B|^2 = |P_1A|^2 + |AB|^2$$

(vea la figura 12.5). De esta manera,

$$\begin{aligned} |P_1P_2|^2 &= |P_1B|^2 + |BP_2|^2 \\ &= |P_1A|^2 + |AB|^2 + |BP_2|^2 \\ &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2. \end{aligned}$$

Se sustituye $|P_1B|^2 = |P_1A|^2 + |AB|^2$.

Por lo tanto,

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$ ■

EJEMPLO 3 La distancia entre $P_1(2, 1, 5)$ y $P_2(-2, 3, 0)$ es

$$\begin{aligned} |P_1P_2| &= \sqrt{(-2 - 2)^2 + (3 - 1)^2 + (0 - 5)^2} \\ &= \sqrt{16 + 4 + 25} \\ &= \sqrt{45} \approx 6.708. \end{aligned}$$ ■

Podemos usar la fórmula de la distancia para escribir ecuaciones de esferas en el espacio (figura 12.6). Un punto $P(x, y, z)$ se localiza en la esfera de radio a con centro en $P_0(x_0, y_0, z_0)$ exactamente cuando $|P_0P| = a$, es decir,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2.$$

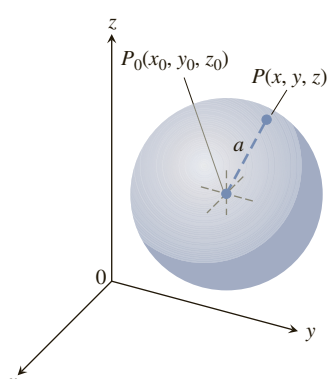


FIGURA 12.6 La esfera de radio a con centro en el punto (x_0, y_0, z_0).

Ecuación en forma estándar de la esfera de radio a y centro en (x_0, y_0, z_0)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2$$

EJEMPLO 4 Encuentre el centro y el radio de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 4z + 1 = 0.$$

Solución Obtenemos el centro y el radio de una esfera de la misma forma en que encontramos el centro y el radio de una circunferencia: se completan los cuadrados de los términos en x, y y z, conforme sea necesario, y se escribe cada expresión cuadrática como el cuadrado de una expresión lineal. Luego, a partir de la ecuación estándar, identificamos el centro y el radio. Para esta esfera, tenemos

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 4z + 1 = 0$$
$$(x^2 + 3x) + y^2 + (z^2 - 4z) = -1$$
$$\left(x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) + y^2 + \left(z^2 - 4z + \left(\frac{-4}{2}\right)^2\right) = -1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{-4}{2}\right)^2$$
$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = -1 + \frac{9}{4} + 4 = \frac{21}{4}.$$

A partir de esta forma estándar, tenemos que $x_0 = -3/2$, $y_0 = 0$, $z_0 = 2$ y $a = \sqrt{21}/2$. El centro es $(-3/2, 0, 2)$. El radio es $\sqrt{21}/2$. ■

EJEMPLO 5 A continuación se presentan interpretaciones de ecuaciones y desigualdades que involucran esferas.

a)	$x^2 + y^2 + z^2 < 4$	El interior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
b)	$x^2 + y^2 + z^2 \le 4$	La bola sólida acotada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; o bien, de manera alternativa, la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ junto con su interior.
c)	$x^2 + y^2 + z^2 > 4$	El exterior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
d)	$x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \le 0$	El hemisferio inferior obtenido al cortar la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con el plano xy (el plano $z = 0$).

■

Así como las coordenadas polares nos ofrecen otra forma de localizar puntos en el plano xy (sección 11.3), existen otros sistemas de coordenadas para espacios tridimensionales, distintos de los sistemas cartesianos aquí desarrollados. Examinaremos dos de estos sistemas de coordenadas en la sección 15.7.

Ejercicios 12.1

Interpretación geométrica de ecuaciones

En los ejercicios 1 a 16, dé la interpretación geométrica del conjunto de puntos en el espacio cuyas coordenadas satisfacen los pares dados de ecuaciones.

1. $x = 2, \quad y = 3$

2. $x = -1, \quad z = 0$

3. $y = 0, \quad z = 0$

4. $x = 1, \quad y = 0$

5. $x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0$

6. $x^2 + y^2 = 4, \quad z = -2$

7. $x^2 + z^2 = 4, \quad y = 0$

8. $y^2 + z^2 = 1, \quad x = 0$

9. $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x = 0$

10. $x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad y = -4$

11. $x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 25, \quad z = 0$

12. $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 4, \quad y = 0$

13. $x^2 + y^2 = 4, \quad z = y$

14. $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad y = x$

15. $y = x^2, \quad z = 0$

16. $z = y^2, \quad x = 1$

Interpretación geométrica de desigualdades y ecuaciones

En los ejercicios 17 a 24, describa los conjuntos de puntos en el espacio cuyas coordenadas satisfacen las desigualdades dadas o las combinaciones de ecuaciones y desigualdades.

17. ***a)*** $x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z = 0$ ***b)*** $x \ge 0, \quad y \le 0, \quad z = 0$

18. ***a)*** $0 \le x \le 1$ ***b)*** $0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1$
c) $0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 \le z \le 1$

19. ***a)*** $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ ***b)*** $x^2 + y^2 + z^2 > 1$

20. ***a)*** $x^2 + y^2 \le 1, \quad z = 0$ ***b)*** $x^2 + y^2 \le 1, \quad z = 3$
c) $x^2 + y^2 \le 1,$ sin restricción en z

21. ***a)*** $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4$
b) $x^2 + y^2 + z^2 \le 1, \quad z \ge 0$

22. ***a)*** $x = y, \quad z = 0$ ***b)*** $x = y,$ sin restricción en z

23. ***a)*** $y \ge x^2, \quad z \ge 0$ ***b)*** $x \le y^2, \quad 0 \le z \le 2$

24. ***a)*** $z = 1 - y,$ sin restricción en z
b) $z = y^3, \quad x = 2$

En los ejercicios 25 a 34, describa el conjunto dado mediante una sola ecuación o un par de ecuaciones.

25. El plano perpendicular al

a) eje x, en $(3, 0, 0)$ ***b)*** eje y, en $(0, -1, 0)$

c) eje z, en $(0, 0, -2)$

26. El plano que pasa por el punto $(3, -1, 2)$ perpendicular al

a) eje x ***b)*** eje y ***c)*** eje z

27. El plano que pasa por el punto $(3, -1, 1)$ paralelo al

a) plano xy ***b)*** plano yz ***c)*** plano xz

28. La circunferencia de radio 2 con centro en $(0, 0, 0)$, y que está en el

a) plano xy ***b)*** plano yz ***c)*** plano xz

29. La circunferencia de radio 2 con centro en $(0, 2, 0)$, y que está en el

a) plano xy ***b)*** plano yz ***c)*** plano $y = 2$

30. La circunferencia de radio 1 con centro en $(-3, 4, 1)$, y que está en un plano paralelo al

a) plano xy ***b)*** plano yz ***c)*** plano xz

31. La recta que pasa por el punto $(1, 3, -1)$ paralela al

a) eje x ***b)*** eje y ***c)*** eje z

32. El conjunto de puntos en el espacio, equidistantes del origen y del punto $(0, 2, 0)$

33. La circunferencia donde el plano que pasa por el punto $(1, 1, 3)$, perpendicular al eje z, corta a la esfera de radio 5 con centro en el origen

34. El conjunto de puntos en el espacio que están a 2 unidades del punto $(0, 0, 1)$ y, al mismo tiempo, a 2 unidades del punto $(0, 0, -1)$

Desigualdades que describen conjuntos de puntos

En los ejercicios 35 a 40, escriba desigualdades que determinen a los conjuntos de puntos dados.

35. El bloque acotado por los planos $z = 0$ y $z = 1$ (incluyendo a estos últimos)

36. El cubo sólido en el primer octante, acotado por los planos de coordenadas y los planos $x = 2$, $y = 2$ y $z = 2$

37. El semiespacio que consiste en los puntos que se encuentran sobre el plano xy y debajo de éste

38. El hemisferio superior de la esfera de radio 1 con centro en el origen

39. ***a)*** El interior y ***b)*** el exterior de la esfera de radio 1 con centro en el punto $(1, 1, 1)$

40. La región cerrada acotada por las esferas de radio 1 y 2 con centros en el origen. (*Cerrada* quiere decir que las esferas están incluidas. Si quisiéramos descartar a las esferas, nos referiríamos a la región *abierta* acotada por las esferas. Esto es análogo a la forma en que usamos los términos *cerrado* y *abierto* para describir los intervalos: *cerrado* quiere decir que se incluyen los extremos, y *abierto* que se excluyen los extremos. Los conjuntos cerrados incluyen a sus fronteras, y los abiertos las excluyen).

Distancia

En los ejercicios 41 a 46, calcule la distancia entre los puntos P_1 y P_2.

41. $P_1(1, 1, 1)$, $P_2(3, 3, 0)$

42. $P_1(-1, 1, 5)$, $P_2(2, 5, 0)$

43. $P_1(1, 4, 5)$, $P_2(4, -2, 7)$

44. $P_1(3, 4, 5)$, $P_2(2, 3, 4)$

45. $P_1(0, 0, 0)$, $P_2(2, -2, -2)$

46. $P_1(5, 3, -2)$, $P_2(0, 0, 0)$

Esferas

Determine los centros y los radios de las esferas en los ejercicios 47 a 50.

47. $(x + 2)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 8$

48. $(x - 1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + (z + 3)^2 = 25$

49. $\left(x - \sqrt{2}\right)^2 + \left(y - \sqrt{2}\right)^2 + \left(z + \sqrt{2}\right)^2 = 2$

50. $x^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$

Determine las ecuaciones de las esferas cuyos centros y radios están dados en los ejercicios 51 a 54.

	Centro	Radio
51.	$(1, 2, 3)$	$\sqrt{14}$
52.	$(0, -1, 5)$	2
53.	$\left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$	$\frac{4}{9}$
54.	$(0, -7, 0)$	7

Determine los centros y los radios de las esferas en los ejercicios 55 a 58.

55. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4z = 0$

56. $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 8z = 0$

57. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + x + y + z = 9$

58. $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2y - 2z = 9$

Teoría y ejemplos

59. Determine una fórmula para la distancia del punto $P(x, y, z)$ al

a) eje x. ***b)*** eje y. ***c)*** eje z.

60. Determine una fórmula para la distancia del punto $P(x, y, z)$ al

a) plano xy. ***b)*** plano yz. ***c)*** plano xz.

61. Determine el perímetro del triángulo con vértices $A(-1, 2, 1)$, $B(1, -1, 3)$ y $C(3, 4, 5)$.

62. Demuestre que el punto $P(3, 1, 2)$ equidista de los puntos $A(2, -1, 3)$, $B(4, 3, 1)$.

63. Determine una ecuación para el conjunto de todos los puntos equidistantes de los planos $y = 3$ y $y = -1$.

64. Determine una ecuación para el conjunto de todos los puntos equidistantes del punto $(0, 0, 2)$ y el plano xy.

65. Determine el punto en la esfera $x^2 + (y - 3)^2 + (z + 5)^2 = 4$ más cercano

a) al plano xy. ***b)*** al punto $(0, 7, -5)$.

66. Determine el punto equidistante de los puntos $(0, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$, $(3, 0, 0)$ y $(2, 2, -3)$.

12.2 Vectores

Algunos de los objetos que medimos están determinados simplemente por sus magnitudes. Por ejemplo, para registrar la masa, la longitud o el tiempo, sólo necesitamos escribir un número y el nombre de las unidades de medida adecuadas. Para describir una fuerza, un desplazamiento o una velocidad, necesitamos más información. En el caso de una fuerza, debemos registrar la dirección en la que actúa y qué tan intensa es. Para describir el desplazamiento de un cuerpo, debemos precisar en qué dirección se movió y qué tan lejos. Para describir la velocidad de un cuerpo, debemos saber hacia dónde se dirige y qué tan rápido se desplaza. En esta sección explicaremos cómo representar cantidades que tengan tanto magnitud como dirección en el plano o en el espacio.

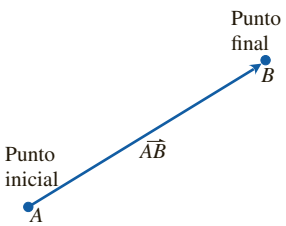


FIGURA 12.7 Al segmento de recta dirigido $\overrightarrow{AB}$ se conoce como vector.

Componentes

Una cantidad como una fuerza, un desplazamiento o una velocidad se conoce como **vector** y se representa mediante un **segmento de recta dirigido** (figura 12.7). La flecha apunta en la dirección de la acción, y su longitud indica la magnitud de la acción en términos de una unidad elegida en forma adecuada. Por ejemplo, el vector de fuerza apunta en la dirección en que ésta actúa; su longitud es una medida de la intensidad de la fuerza; un vector de velocidad (o vector velocidad) apunta en la dirección del movimiento, y su longitud indica la rapidez del objeto móvil. La figura 12.8 muestra el vector de velocidad **v** en una posición específica para una partícula que se desplaza a lo largo de una trayectoria en el plano o en el espacio. (En el capítulo 13 estudiaremos esta aplicación de los vectores).

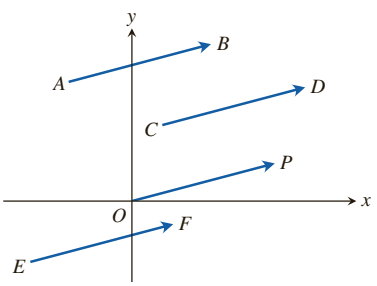
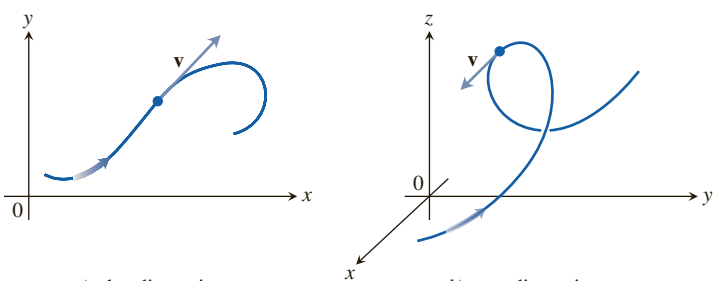


FIGURA 12.9 Las cuatro flechas en el plano (segmentos de recta dirigidos) que aquí aparecen tienen la misma longitud y dirección. Por lo tanto, representan al mismo vector, así que escribimos $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{EF}$.



a) dos dimensiones *b*) tres dimensiones

FIGURA 12.8 El vector de velocidad de una partícula que se desplaza a lo largo de una trayectoria *a*) en el plano y *b*) en el espacio. La punta de flecha sobre la trayectoria indica la dirección de movimiento de la partícula.

DEFINICIONES Un **vector** representado por el segmento de recta dirigido $\overrightarrow{AB}$ tiene un **punto inicial** A y un **punto final** B; su **longitud** se denota como $|\overrightarrow{AB}|$. Dos vectores son **iguales** si tienen la misma longitud y dirección.

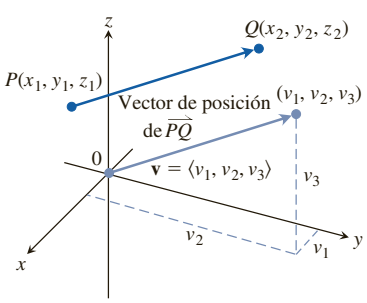


FIGURA 12.10 Un vector $\overrightarrow{PQ}$ en posición estándar tiene su punto inicial en el origen. Los segmentos de recta dirigidos $\overrightarrow{PQ}$ y **v** son paralelos y tienen la misma longitud.

Las flechas que utilizamos cuando trazamos vectores representan al mismo vector si tienen la misma longitud, son paralelas y apuntan en la misma dirección (figura 12.9), independientemente del punto inicial.

En los libros de texto, los vectores se denotan generalmente mediante letras minúsculas en negritas, como **u**, **v** y **w**. A veces se utilizan letras mayúsculas en negritas, como **F**, para denotar un vector de fuerza. Cuando se utilizan cursivas, se acostumbra incluir pequeñas flechas sobre las letras; por ejemplo, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ y $\vec{F}$.

Necesitamos una forma algebraica para representar vectores, de modo que podamos precisar su dirección. Sea $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$. Existe un segmento de recta dirigido igual a $\overrightarrow{PQ}$, cuyo punto inicial es el origen (figura 12.10). Este segmento de recta representa a **v** en **posición estándar** y es el vector que usamos, por lo general, para referirnos a **v**. Podemos especificar

a **v**, escribiendo las coordenadas de su punto final (v_1, v_2, v_3) cuando **v** está en posición estándar. Si **v** es un vector en el plano, su punto final (v_1, v_2) tiene dos coordenadas.

DEFINICIÓN Si **v** es un vector **bidimensional** en el plano igual al vector con punto inicial en el origen y punto final (v_1, v_2), entonces, la **expresión de v en componentes** (también llamada expresión cartesiana) es

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle.$$

Si **v** es un vector **tridimensional** igual al vector con punto inicial en el origen y punto final (v_1, v_2, v_3), entonces, la **expresión de v en componentes** es

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle.$$

Así, un vector bidimensional es un par ordenado $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ de números reales, y un vector tridimensional es una terna ordenada $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ de números reales. Los números v_1, v_2 y v_3 son las **componentes** de **v**.

Observe que si $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ se representa mediante el segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$, donde el punto inicial es $P(x_1, y_1, z_1)$ y el punto final es $Q(x_2, y_2, z_2)$, entonces, $x_1 + v_1 = x_2$, $y_1 + v_2 = y_2$ y $z_1 + v_3 = z_2$ (vea la figura 12.10). De esta forma, $v_1 = x_2 - x_1$, $v_2 = y_2 - y_1$ y $v_3 = z_2 - z_1$ son las componentes de $\overrightarrow{PQ}$.

En resumen, dados los puntos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$, el vector en posición estándar $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ igual a $\overrightarrow{PQ}$ es

$$\mathbf{v} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_2 \rangle.$$

Si **v** es el vector bidimensional con $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ como puntos en el plano, entonces, $\mathbf{v} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$. No hay una tercera componente para vectores en el plano. Con esto en mente, desarrollaremos el álgebra de los vectores tridimensionales y, simplemente, eliminaremos la tercera componente cuando se trate de vectores bidimensionales (un vector en el plano).

Dos vectores son iguales si y sólo si sus vectores en posición estándar son idénticos. De esta forma, $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ son **iguales** si y sólo si $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$ y $u_3 = v_3$.

La **magnitud** o **longitud** del vector $\overrightarrow{PQ}$ es la longitud de cualquiera de sus representaciones como segmento de recta dirigido. En particular, si $\mathbf{v} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$ es el vector en posición estándar para $\overrightarrow{PQ}$, entonces, la fórmula para la distancia proporciona la magnitud o longitud de **v**, denotada con el símbolo $|\mathbf{v}|$ o $\|\mathbf{v}\|$.

La **magnitud** o **longitud** del vector $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ es el número no negativo

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

(vea la figura 12.10).

El único vector con longitud 0 es el **vector cero:** $\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle$ o $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$. Este vector también es el único que no tiene una dirección específica.

EJEMPLO 1 Determine ***a)*** las componentes y ***b)*** la longitud del vector con punto inicial $P(-3, 4, 1)$ y punto final $Q(-5, 2, 2)$

Solución

a) El vector en posición estándar **v** que representa a $\overrightarrow{PQ}$ tiene componentes

$$v_1 = x_2 - x_1 = -5 - (-3) = -2, \qquad v_2 = y_2 - y_1 = 2 - 4 = -2,$$

y

$$v_3 = z_2 - z_1 = 2 - 1 = 1.$$

La expresión de $\overrightarrow{PQ}$ en componentes es

$$\mathbf{v} = \langle -2, -2, 1 \rangle.$$

b) La longitud o magnitud de $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ es

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{9} = 3. \quad \blacksquare$$

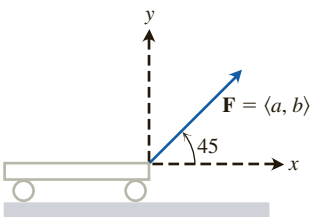


FIGURA 12.11 La fuerza que tira del carrito hacia delante se representa mediante el vector **F**, cuya componente horizontal es la fuerza efectiva (ejemplo 2).

EJEMPLO 2 Se tira de un pequeño carro a lo largo de un piso horizontal liso, con una fuerza **F** de 20 libras que forma un ángulo de 45° con el suelo (figura 12.11). ¿Cuál es la fuerza *efectiva* que mueve el carrito hacia delante?

Solución La fuerza efectiva es la componente horizontal de $\mathbf{F} = \langle a, b \rangle$, dada por

$$a = |\mathbf{F}| \cos 45° = (20)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 14.14 \text{ lb}.$$

Observe que **F** es un vector bidimensional. $\blacksquare$

Operaciones algebraicas con vectores

Dos operaciones fundamentales que pueden realizarse con vectores son la *suma de vectores* y la *multiplicación por un escalar*. Un **escalar** es simplemente un número real, y los llamamos de esta manera cuando queremos resaltar su diferencia con respecto a los vectores. Los escalares pueden ser positivos, negativos o cero, y se emplean para "escalar" un vector por medio de una multiplicación.

DEFINICIONES Sean $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ vectores, y k un escalar.

Suma: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle u_1 + v_2, u_2 + v_2, u_3 + v_3 \rangle$

Multiplicación por escalar: $k\mathbf{u} = \langle ku_1, ku_2, ku_3 \rangle$

La suma de vectores se realiza sumando las componentes correspondientes de los vectores. Multiplicamos un vector por un escalar cuando obtenemos el producto de cada componente por el escalar. Las definiciones se aplican de manera similar a los vectores en el plano, sólo que éstos tienen únicamente dos componentes, $\langle u_1, u_2 \rangle$ y $\langle v_1, v_2 \rangle$.

La figura 12.12*a*) ilustra geométricamente la definición de suma de vectores en el plano, donde el punto inicial de un vector se coloca en el punto final del otro. Otra interpretación (llamada **ley del paralelogramo** de la suma) aparece en la figura 12.12*b*), donde la suma, llamada **vector resultante**, es una diagonal del paralelogramo. En física, las fuerzas se suman vectorialmente, al igual que las velocidades, las aceleraciones, etcétera. Así, la fuerza que actúa sobre una partícula sujeta a fuerzas eléctricas y gravitacionales, por ejemplo, se obtiene sumando los dos vectores de fuerza.

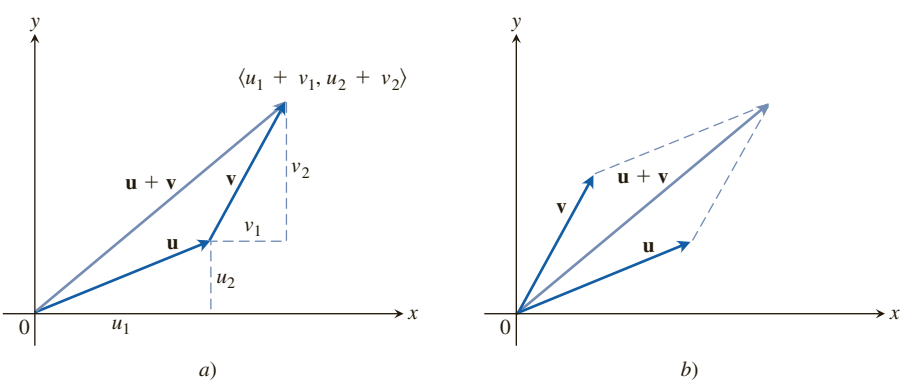


FIGURA 12.12 *a*) Interpretación geométrica de la suma de vectores. *b*) La ley del paralelogramo para la suma vectorial, donde ambos vectores se encuentran en posición estándar.

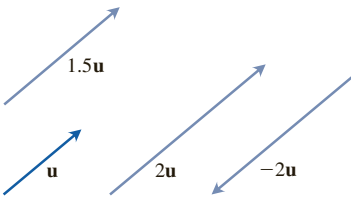


FIGURA 12.13 Múltiplos escalares de **u**.

La figura 12.13 muestra una interpretación geométrica del producto $k\mathbf{u}$ del escalar k y el vector **u**. Si $k > 0$, entonces, $k\mathbf{u}$ tiene la misma dirección que **u**; si $k < 0$, entonces, la dirección de $k\mathbf{u}$ es opuesta a la de **u**. Al comparar las longitud de **u** y $k\mathbf{u}$, vemos que

$$\begin{aligned} |k\mathbf{u}| &= \sqrt{(ku_1)^2 + (ku_2)^2 + (ku_3)^2} = \sqrt{k^2(u_1{}^2 + u_2{}^2 + u_3{}^2)} \\ &= \sqrt{k^2}\sqrt{u_1{}^2 + u_2{}^2 + u_3{}^2} = |k|\,|\mathbf{u}|. \end{aligned}$$

La longitud de $k\mathbf{u}$ es igual al producto del valor absoluto del escalar k y la longitud de **u**. El vector $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$ tiene la misma longitud que **u**, pero apunta en la dirección opuesta.

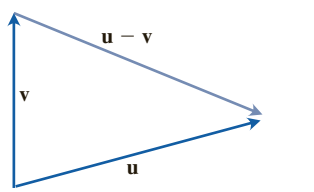
La **diferencia u – v** de dos vectores está definida por

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}).$$

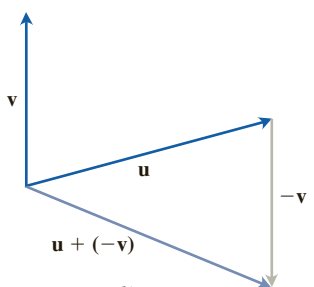
Si $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, entonces,

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \langle u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3 \rangle .$$

Observe que $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \mathbf{v} = \mathbf{u}$, de modo que al sumar el vector $(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ a **v**, se obtiene **u** (figura 12.14*a*). La figura 12.14*b*) muestra la diferencia **u** – **v** como la suma $\mathbf{u} + (-\mathbf{v})$.



a)



b)

FIGURA 12.14 *a*) Cuando se suma **v** al vector **u** – **v**, se obtiene **u**. *b*) **u** – **v** = **u** + (–**v**).

EJEMPLO 3 Sean $\mathbf{u} = \langle -1, 3, 1 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 4, 7, 0 \rangle$. Determine las componentes de

a) $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$ ***b)*** $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ ***c)*** $\left|\frac{1}{2}\mathbf{u}\right|$.

Solución

a) $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} = 2\langle -1, 3, 1 \rangle + 3\langle 4, 7, 0 \rangle = \langle -2, 6, 2 \rangle + \langle 12, 21, 0 \rangle = \langle 10, 27, 2 \rangle$

b) $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \langle -1, 3, 1 \rangle - \langle 4, 7, 0 \rangle = \langle -1 - 4, 3 - 7, 1 - 0 \rangle = \langle -5, -4, 1 \rangle$

c) $\left|\frac{1}{2}\mathbf{u}\right| = \left|\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{11}.$ ■

Las operaciones vectoriales tienen muchas de las propiedades de la aritmética ordinaria.

Propiedades de las operaciones con vectores

Sean **u**, **v** y **w** vectores, y a y b escalares.

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
3. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
4. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
5. $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
6. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$
7. $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$
8. $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$
9. $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$

Estas propiedades se comprueban fácilmente, usando las definiciones de suma de vectores y multiplicación por un escalar. Por ejemplo, para establecer la propiedad 1, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= \langle u_1, u_2, u_3 \rangle + \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \\ &= \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3 \rangle \\ &= \langle v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3 \rangle \\ &= \langle v_1, v_2, v_3 \rangle + \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \\ &= \mathbf{v} + \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Cuando tres o más vectores en el espacio se encuentran en el mismo plano, decimos que son vectores **coplanares**. Por ejemplo, los vectores **u**, **v** y **u** + **v** siempre son coplanares.

Vectores unitarios

Un vector **v** de longitud 1 se llama **vector unitario**. Los **vectores unitarios estándar** son

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle, \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle.$$

Cualquier vector $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ puede escribirse de la siguiente forma como una *combinación lineal* de los vectores unitarios estándar:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \langle v_1, v_2, v_3\rangle = \langle v_1, 0, 0\rangle + \langle 0, v_2, 0\rangle + \langle 0, 0, v_3\rangle \\ &= v_1\langle 1, 0, 0\rangle + v_2\langle 0, 1, 0\rangle + v_3\langle 0, 0, 1\rangle \\ &= v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}.\end{aligned}$$

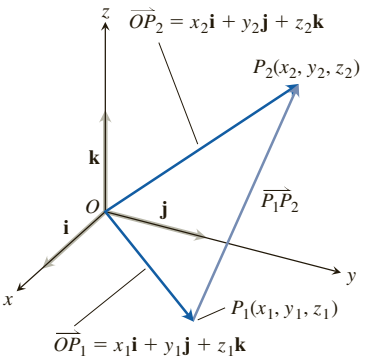


FIGURA 12.15 El vector de P_1 a P_2 es $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$.

Llamamos al escalar (o número) v_1 la **componente i** del vector **v**, a v_2 la **componente j**, y a v_3 la **componente k**. La expresión en componentes del vector de $P_1(x_1, y_1, z_1)$ a $P_2(x_2, y_2, z_2)$ es

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$$

(figura 12.15).

Siempre que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, su longitud $|\mathbf{v}|$ no es cero y

$$\left|\frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}\right| = \frac{1}{|\mathbf{v}|}|\mathbf{v}| = 1.$$

Es decir, $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ es un vector unitario en la dirección de **v**, llamado **la dirección** del vector **v** no nulo.

EJEMPLO 4 Determine un vector unitario **u** en la dirección del vector de $P_1(1, 0, 1)$ a $P_2(3, 2, 0)$.

Solución Dividimos $\overrightarrow{P_1P_2}$ entre su longitud:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (3 - 1)\mathbf{i} + (2 - 0)\mathbf{j} + (0 - 1)\mathbf{k} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$$
$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$$
$$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{|\overrightarrow{P_1P_2}|} = \frac{2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}}{3} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}.$$

El vector unitario **u** es la dirección de $\overrightarrow{P_1P_2}$. ■

EJEMPLO 5 Si $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ es un vector de velocidad, exprese **v** como el producto de su rapidez y su dirección de movimiento.

Solución La rapidez es la magnitud (longitud) de **v**:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

El vector unitario $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ es la dirección de **v**:

$$\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}}{5} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}.$$

Así,

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} = 5\left(\frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}\right).$$

Longitud (rapidez) — Dirección de movimiento

En resumen, podemos expresar cualquier vector no nulo (o distinto de cero) $\mathbf{v}$ en términos del producto de sus dos características fundamentales, longitud y dirección, escribiendo $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$.

Si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, entonces,

1. $\dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ es un vector unitario llamado la dirección de $\mathbf{v}$;
2. la ecuación $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ expresa a $\mathbf{v}$ en términos de su longitud y dirección.

EJEMPLO 6 Una fuerza de 6 newtons se aplica en la dirección del vector $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Exprese la fuerza $\mathbf{F}$ como el producto de su magnitud y dirección.

Solución El vector de fuerza tiene magnitud 6 y dirección $\dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$, de modo que

$$\mathbf{F} = 6\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = 6\frac{2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 6\frac{2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}}{3}$$

$$= 6\left(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}\right).$$

■

Punto medio de un segmento de recta

Con frecuencia, los vectores son útiles en geometría. Por ejemplo, las coordenadas del punto medio de un segmento de recta se determinan con un promedio.

El **punto medio** M del segmento de recta que une los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ es el punto

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right).$$

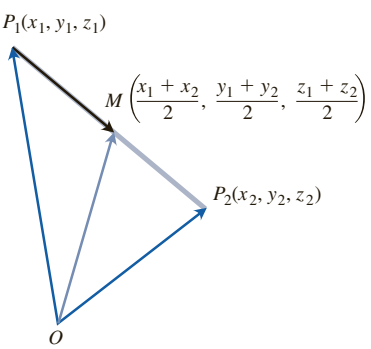


FIGURA 12.16 Las coordenadas del punto medio son los promedios de las coordenadas de P_1 y P_2.

Para ver por qué, observe (figura 12.16) que

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP_1} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{P_1P_2}) = \overrightarrow{OP_1} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2})$$

$$= \frac{x_1 + x_2}{2}\mathbf{i} + \frac{y_1 + y_2}{2}\mathbf{j} + \frac{z_1 + z_2}{2}\mathbf{k}.$$

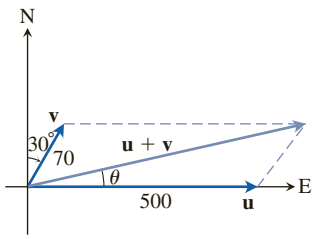
EJEMPLO 7 El punto medio del segmento que une a $P_1(3, -2, 0)$ y $P_2(7, 4, 4)$ es

$$\left(\frac{3 + 7}{2}, \frac{-2 + 4}{2}, \frac{0 + 4}{2}\right) = (5, 1, 2).$$

■

Aplicaciones

Los vectores se aplican de manera importante en la navegación.



NO ESTÁ A ESCALA

FIGURA 12.17 Vectores que representan las velocidades del avión **u** y el viento de cola **v** del ejemplo 8.

EJEMPLO 8 Un avión de pasajeros vuela en aire tranquilo hacia el este a 500 millas/hora y encuentra un viento de cola de 70 millas/hora que sopla en dirección 60° al noreste. El avión mantiene el rumbo hacia el este, pero debido al viento adquiere una nueva dirección y rapidez con respecto al suelo. Calcule estas cantidades.

Solución Si **u** es la velocidad del avión en aire tranquilo y **v** es la velocidad del viento de cola, entonces, $|\mathbf{u}| = 500$ y $|\mathbf{v}| = 70$ (figura 12.17). La velocidad de la nave con respecto al suelo está dada por la magnitud y dirección del vector resultante $\mathbf{u} + \mathbf{v}$. Si el eje x positivo representa al este y el eje y positivo representa al norte, entonces, las componentes de **u** y **v** son

$$\mathbf{u} = \langle 500, 0 \rangle \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v} = \langle 70 \cos 60°, 70 \operatorname{sen} 60° \rangle = \left\langle 35, 35\sqrt{3} \right\rangle.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \left\langle 535, 35\sqrt{3} \right\rangle = 535\mathbf{i} + 35\sqrt{3}\,\mathbf{j}$$
$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = \sqrt{535^2 + (35\sqrt{3})^2} \approx 538.4$$

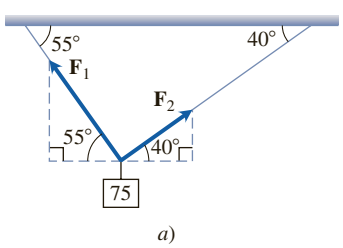
y

$$\theta = \tan^{-1} \frac{35\sqrt{3}}{535} \approx 6.5°. \qquad \text{Figura 12.17}$$

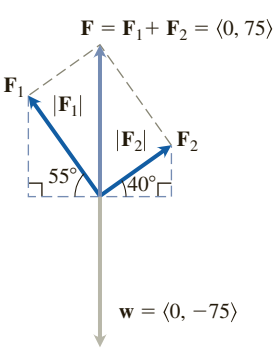
El nuevo valor de la rapidez del avión es aproximadamente de 538.4 millas/hora, y su nueva dirección es de 6.5° al noreste. ■

Otra importante aplicación de los vectores se presenta en física e ingeniería, cuando varias fuerzas actúan sobre un solo objeto.

EJEMPLO 9 Se suspende un peso de 75 N con dos alambres, como se muestra en la figura 12.18*a*). Determime las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ que actúan en ambos alambres.



a)



b)

FIGURA 12.18 Peso suspendido descrito en el ejemplo 9.

Solución Los vectores fuerza $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ tienen magnitudes $|\mathbf{F}_1|$ y $|\mathbf{F}_2|$ y componentes que se miden en newtons. La fuerza resultante es la suma $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ y debe ser igual en magnitud y actuar en la dirección opuesta (o hacia arriba) al vector peso **w** (vea la figura 12.18*b*). De la figura, se deduce que

$$\mathbf{F}_1 = \langle -|\mathbf{F}_1| \cos 55°, |\mathbf{F}_1| \operatorname{sen} 55° \rangle \qquad \text{y} \qquad \mathbf{F}_2 = \langle |\mathbf{F}_2| \cos 40°, |\mathbf{F}_2| \operatorname{sen} 40° \rangle.$$

Como $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \langle 0, 75 \rangle$, el vector resultante conduce al sistema de ecuaciones

$$-|\mathbf{F}_1| \cos 55° + |\mathbf{F}_2| \cos 40° = 0$$
$$|\mathbf{F}_1| \operatorname{sen} 55° + |\mathbf{F}_2| \operatorname{sen} 40° = 75.$$

Se despeja $|\mathbf{F}_2|$ en la primera ecuación y el resultado se sustituye en la segunda, con lo que se obtiene

$$|\mathbf{F}_2| = \frac{|\mathbf{F}_1| \cos 55°}{\cos 40°} \qquad \text{y} \qquad |\mathbf{F}_1| \operatorname{sen} 55° + \frac{|\mathbf{F}_1| \cos 55°}{\cos 40°} \operatorname{sen} 40° = 75.$$

Por lo tanto,

$$|\mathbf{F}_1| = \frac{75}{\operatorname{sen} 55° + \cos 55° \tan 40°} \approx 57.67 \text{ N},$$

y

$$|\mathbf{F}_2| = \frac{75 \cos 55°}{\text{sen } 55° \cos 40° + \cos 55° \text{ sen } 40°}$$

$$= \frac{75 \cos 55°}{\text{sen } (55° + 40°)} \approx 43.18 \text{ N}.$$

Por lo tanto, los vectores fuerza son $\mathbf{F}_1 = \langle -33.08, 47.24 \rangle$ y $\mathbf{F}_2 = \langle 33.08, 27.76 \rangle$. ■

Ejercicios 12.2

Vectores en el plano

En los ejercicios 1 a 8, sean $\mathbf{u} = \langle 3, -2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -2, 5 \rangle$. Determine ***a***) las componentes y ***b***) la magnitud (longitud) del vector.

1. $3\mathbf{u}$

2. $-2\mathbf{v}$

3. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$

4. $\mathbf{u} - \mathbf{v}$

5. $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$

6. $-2\mathbf{u} + 5\mathbf{v}$

7. $\frac{3}{5}\mathbf{u} + \frac{4}{5}\mathbf{v}$

8. $-\frac{5}{13}\mathbf{u} + \frac{12}{13}\mathbf{v}$

En los ejercicios 9 a 16, determine las componentes del vector.

9. El vector $\overrightarrow{PQ}$, donde $P = (1, 3)$ y $Q = (2, -1)$

10. El vector $\overrightarrow{OP}$, si O es el origen y P es el punto medio del segmento RS, donde $R = (2, -1)$ y $S = (-4, 3)$

11. El vector que va del punto $A = (2, 3)$ al origen

12. La suma de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, donde $A = (1, -1)$, $B = (2, 0)$, $C = (-1, 3)$ y $D = (-2, 2)$

13. El vector unitario que forma un ángulo $\theta = 2\pi/3$ con el eje x positivo

14. El vector unitario que forma un ángulo $\theta = -3\pi/4$ con el eje x positivo

15. El vector unitario obtenido al girar 120° el vector $\langle 0, 1 \rangle$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj en torno al origen

16. El vector unitario obtenido al girar 105° el vector $\langle 1, 0 \rangle$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj en torno al origen

Vectores en el espacio

En los ejercicios 17 a 22, exprese cada vector en la forma $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.

17. $\overrightarrow{P_1P_2}$, si P_1 es el punto $(5, 7, -1)$ y P_2 es el punto $(2, 9, -2)$

18. $\overrightarrow{P_1P_2}$, si P_1 es el punto $(1, 2, 0)$ y P_2 es el punto $(-3, 0, 5)$

19. $\overrightarrow{AB}$, si A es el punto $(-7, -8, 1)$ y B es el punto $(-10, 8, 1)$

20. $\overrightarrow{AB}$, si A es el punto $(1, 0, 3)$ y B es el punto $(-1, 4, 5)$

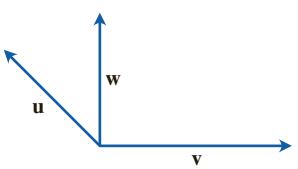
21. $5\mathbf{u} - \mathbf{v}$ si $\mathbf{u} = \langle 1, 1, -1 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 2, 0, 3 \rangle$

22. $-2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$ si $\mathbf{u} = \langle -1, 0, 2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 1, 1, 1 \rangle$

Representaciones geométricas

En los ejercicios 23 y 24, dibuje los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ uniendo los puntos inicial y final, según sea adecuado para trazar el vector indicado en cada caso.

23.



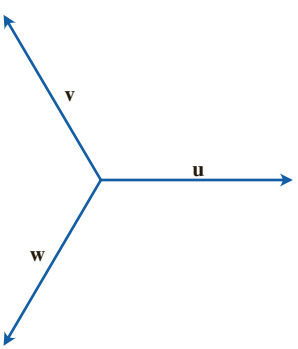
a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$

b) $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$

c) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$

d) $\mathbf{u} - \mathbf{w}$

24.



a) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$

b) $\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{w}$

c) $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$

d) $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$

Longitud y dirección

En los ejercicios 25 a 30, exprese cada vector como producto de su longitud y dirección.

25. $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

26. $9\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

27. $5\mathbf{k}$

28. $\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{k}$

29. $\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$

30. $\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{3}} + \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{3}} + \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{3}}$

31. Determine los vectores con las longitudes y direcciones indicadas. Trate de efectuar los cálculos mentalmente.

Longitud	Dirección
a) 2	$\mathbf{i}$
b) $\sqrt{3}$	$-\mathbf{k}$
c) $\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}\mathbf{j} + \frac{4}{5}\mathbf{k}$
d) 7	$\frac{6}{7}\mathbf{i} - \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{3}{7}\mathbf{k}$

32. Determine los vectores con las longitudes y direcciones indicadas. Trate de efectuar los cálculos mentalmente.

Longitud	Dirección
a) 7	$-\mathbf{j}$
b) $\sqrt{2}$	$-\frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{k}$
c) $\frac{13}{12}$	$\frac{3}{13}\mathbf{i} - \frac{4}{13}\mathbf{j} - \frac{12}{13}\mathbf{k}$
d) $a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$

33. Determine un vector de magnitud 7 en la dirección de $\mathbf{v} = 12\mathbf{i} - 5\mathbf{k}$.

34. Determine un vector de magnitud 3 en la dirección opuesta a la dirección de $\mathbf{v} = (1/2)\mathbf{i} - (1/2)\mathbf{j} - (1/2)\mathbf{k}$.

Dirección y puntos medios

En los ejercicios 35 a 38, determine lo siguiente:

a) la dirección de $\overrightarrow{P_1P_2}$ y

b) el punto medio del segmento de recta P_1P_2.

35. $P_1(-1, 1, 5)$ $P_2(2, 5, 0)$

36. $P_1(1, 4, 5)$ $P_2(4, -2, 7)$

37. $P_1(3, 4, 5)$ $P_2(2, 3, 4)$

38. $P_1(0, 0, 0)$ $P_2(2, -2, -2)$

39. Si $\overrightarrow{AB} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y B es el punto (5, 1, 3), determine A.

40. Si $\overrightarrow{AB} = -7\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ y A es el punto $(-2, -3, 6)$, determine B.

Teoría y aplicaciones

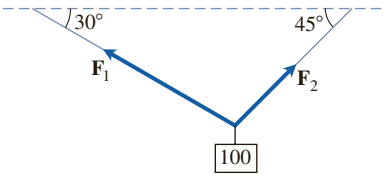
41. Combinación lineal Sean $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$. Encuentre los escalares a y b de modo que $\mathbf{u} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$.

42. Combinación lineal Sean $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Escriba $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, donde $\mathbf{u}_1$ es paralelo a $\mathbf{v}$, y $\mathbf{u}_2$ es paralelo a $\mathbf{w}$. (Vea el ejercicio 41).

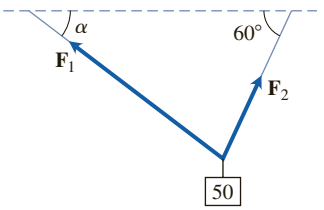
43. Velocidad Un avión está volando en la dirección 25° al oeste del norte a 800 km/h. Encuentre las componentes de la velocidad del avión, suponiendo que el eje x positivo representa la dirección este, y el eje y positivo representa la dirección norte.

44. (*Continuación del ejemplo 8*). ¿Qué rapidez y dirección tendrá el avión de pasajeros del ejemplo 8 para que el vector resultante sea de 500 mph dirección este?

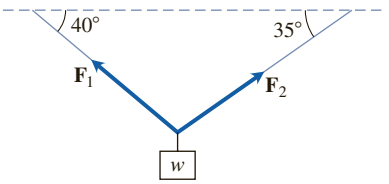
45. Considere un peso de 100 N suspendido por dos alambres, como se muestra en la siguiente figura. Determine las magnitudes y componentes de los vectores de fuerza $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$.



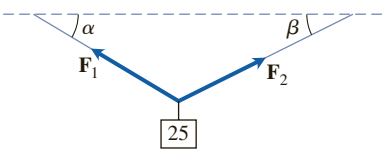
46. Considere un peso de 50 N suspendido por dos alambres, como se muestra en la siguiente figura. Si la magnitud del vector $\mathbf{F}_1$ es 35 N, determine el ángulo α y la magnitud del vector $\mathbf{F}_2$.



47. Considere un peso de w N suspendido por dos alambres, como se muestra en la siguiente figura. Si la magnitud del vector $\mathbf{F}_2$ es 100 N, determine w y la magnitud del vector $\mathbf{F}_1$.



48. Considere un peso de 25 N suspendido por dos alambres, como se muestra en la siguiente figura. Si las magnitudes de los vectores $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ son de 75 N, entonces, los ángulos α y β son iguales. Determine α.



49. Ubicación Un ave vuela, desde su nido, 5 km en la dirección 60° al norte del este, donde se detiene a reposar en un árbol. Luego, vuela 10 km en dirección sureste y se posa en un poste telefónico. Utilice un sistema de coordenadas xy de modo que el origen se encuentre en el nido del ave, el eje x apunte hacia el este y el eje y apunte hacia el norte.

a) ¿En qué punto se ubica el árbol?

b) ¿En qué punto se encuentra el poste?

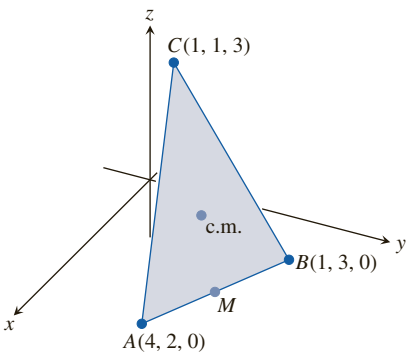
50. Use triángulos semejantes para determinar las coordenadas del punto Q que divide al segmento que va de $P_1(x_1, y_1, z_1)$ a $P_2(x_2, y_2, z_2)$ en dos longitudes cuya razón es $p/q = r$.

51. Medianas de un triángulo Suponga que A, B y C son las esquinas de una delgada placa triangular de densidad constante, como muestra la siguiente figura.

a) Determine el vector que va desde C hasta el punto medio M del lado AB.

b) Determine el vector que va desde C hasta el punto que está sobre la mediana CM, a dos tercios de la distancia de C a M.

c) Determine las coordenadas del punto donde se cortan las medianas del triángulo ABC. De acuerdo con el ejercicio 19 de la sección 6.6, este punto es el centro de masa de la placa. (Vea la siguiente figura).



52. Determine el vector que va del origen al punto de intersección de las medianas del triángulo cuyos vértices son

$$A(1, -1, 2),\ B(2, 1, 3) \quad \text{y} \quad C(-1, 2, -1).$$

53. Sea *ABCD* un cuadrilátero en el espacio, no necesariamente plano. Demuestre que los dos segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos de *ABCD* se bisecan entre sí. (*Sugerencia:* Demuestre que los segmentos tienen el mismo punto medio).

54. Se trazan vectores desde el centro de un polígono regular de n lados en el plano hasta los vértices de dicho polígono. Demuestre que la suma de los vectores es igual a cero. (*Sugerencia:* ¿Qué ocurre con la suma si el polígono se hace girar en torno a su centro?).

55. Suponga que A, B y C son los vértices de un triángulo, y que a, b y c son, respectivamente, los puntos medios de los lados opuestos. Demuestre que $\overrightarrow{Aa} + \overrightarrow{Bb} + \overrightarrow{Cc} = 0$.

56. Vectores unitarios en el plano Demuestre que un vector unitario en el plano puede expresarse como $\mathbf{u} = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\text{sen}\ \theta)\ \mathbf{j}$, y que se obtiene al hacer girar el vector $\mathbf{i}$ con un ángulo θ en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Explique por qué *cualquier* vector unitario en el plano puede expresarse en esta forma.

12.3 El producto punto

Si se aplica una fuerza $\mathbf{F}$ a una partícula que se desplaza a lo largo de una trayectoria, con frecuencia necesitamos conocer la magnitud de la fuerza en la dirección de movimiento. Si $\mathbf{v}$ es paralelo a la recta tangente a la trayectoria en el punto donde se aplica $\mathbf{F}$, entonces, queremos conocer la magnitud de $\mathbf{F}$ en la dirección de $\mathbf{v}$. La figura 12.19 muestra que la cantidad escalar que buscamos es la longitud $|\mathbf{F}|\cos\theta$, donde θ es el ángulo entre los dos vectores $\mathbf{F}$ y $\mathbf{v}$.

En esta sección describiremos cómo calcular fácilmente el ángulo entre dos vectores a partir de sus componentes. Una parte clave del cálculo es una expresión llamada el *producto punto*. Los productos punto también se conocen como productos *internos* o *escalares* debido a que el producto da como resultado un escalar, no un vector. Después de estudiar el producto punto, lo aplicaremos para determinar la proyección de un vector sobre otro (como muestra la figura 12.19), y para calcular el trabajo realizado por una fuerza constante que actúa a lo largo de un desplazamiento.

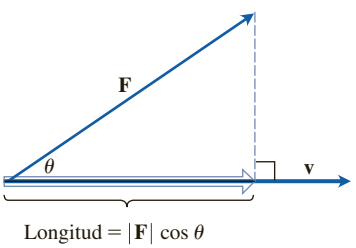


FIGURA 12.19 La magnitud de la fuerza $\mathbf{F}$ en la dirección del vector $\mathbf{v}$ es la longitud $|\mathbf{F}|\cos\theta$ de la proyección de $\mathbf{F}$ sobre $\mathbf{v}$.

Ángulo entre vectores

Cuando dos vectores no nulos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se colocan de manera que sus puntos iniciales coincidan, forman un ángulo θ con medida $0 \le \theta \le \pi$ (figura 12.20). Si los vectores no están en una misma recta, el ángulo θ se mide en el plano que contiene a ambos. Cuando están en una misma recta, el ángulo entre ellos es igual a 0 si apuntan en la misma dirección, e igual a π si apuntan en direcciones opuestas. El ángulo θ es el **ángulo entre u y v**. El teorema 1 proporciona una fórmula para determinar este ángulo.

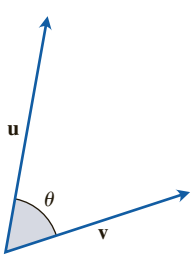


FIGURA 12.20 El ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

TEOREMA 1 Ángulo entre dos vectores El ángulo θ entre dos vectores distintos de cero $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ está dado por

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}\right).$$

Usaremos la ley de los cosenos para demostrar el teorema 1, pero antes de hacerlo, nos concentraremos en la expresión $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ del cálculo de θ. Esta expresión es la suma de los productos de las componentes correspondientes para los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

DEFINICIÓN El **producto punto u · v** (“**u punto v**”) de los vectores $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ es el escalar

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

EJEMPLO 1 Ilustraremos la definición.

a) $\langle 1, -2, -1 \rangle \cdot \langle -6, 2, -3 \rangle = (1)(-6) + (-2)(2) + (-1)(-3)$

$$= -6 - 4 + 3 = -7$$

b) $\left(\frac{1}{2}\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}\right) \cdot (4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = \left(\frac{1}{2}\right)(4) + (3)(-1) + (1)(2) = 1$ ■

El producto punto de un par de vectores bidimensionales se define de manera similar:

$$\langle u_1, u_2 \rangle \cdot \langle v_1, v_2 \rangle = u_1v_1 + u_2v_2.$$

A lo largo del resto del libro veremos que el producto punto es una herramienta clave, no sólo para la obtención del ángulo entre dos vectores, sino también para muchos cálculos físicos y geométricos importantes en el espacio (y en el plano).

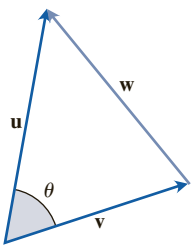


FIGURA 12.21 La ley del paralelogramo de la suma de vectores da $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$.

Demostración del teorema 1 Al aplicar la ley de los cosenos [ecuación (8), sección 1.3] al triángulo de la figura 12.21, encontramos que

$$|\mathbf{w}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta \qquad \text{Ley de los cosenos}$$
$$2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{w}|^2.$$

Como $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$, las componentes de $\mathbf{w}$ nos permiten escribirlo como $\langle u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3 \rangle$. De esta forma,

$$|\mathbf{u}|^2 = \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\right)^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$
$$|\mathbf{v}|^2 = \left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}\right)^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$
$$|\mathbf{w}|^2 = \left(\sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2}\right)^2$$
$$= (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2$$
$$= u_1^2 - 2u_1v_1 + v_1^2 + u_2^2 - 2u_2v_2 + v_2^2 + u_3^2 - 2u_3v_3 + v_3^2$$

y

$$|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{w}|^2 = 2(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3).$$

Por lo tanto,

$$2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{w}|^2 = 2(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)$$
$$|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$
$$\cos\theta = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}.$$

Como $0 \leq \theta \geq \pi$, tenemos

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right).$$ ■

El ángulo entre dos vectores u y v no nulos

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right)$$

EJEMPLO 2 Obtenga el ángulo entre $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Solución Utilizamos la fórmula anterior:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (1)(6) + (-2)(3) + (-2)(2) = 6 - 6 - 4 = -4\\ |\mathbf{u}| &= \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3\\ |\mathbf{v}| &= \sqrt{(6)^2 + (3)^2 + (2)^2} = \sqrt{49} = 7\\ \theta &= \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-4}{(3)(7)}\right) \approx 1.76 \text{ radianes o } 100.98°.\end{aligned}$$

■

La fórmula para el ángulo también se aplica a vectores bidimensionales. Observe que el ángulo θ es agudo si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$ y obtuso si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$.

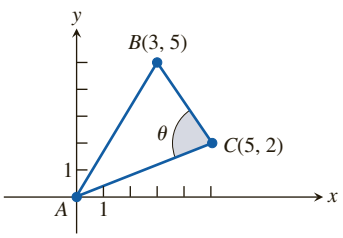


FIGURA 12.22 El triángulo del ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Encuentre el ángulo θ del triángulo ABC determinado por los vértices $A = (0, 0)$, $B = (3, 5)$ y $C = (5, 2)$ (figura 12.22).

Solución El ángulo θ es el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$. Las componentes de estos dos vectores son

$$\overrightarrow{CA} = \langle -5, -2 \rangle \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{CB} = \langle -2, 3 \rangle .$$

Primero, calculamos el producto punto y las magnitudes de estos dos vectores.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} &= (-5)(-2) + (-2)(3) = 4\\ |\overrightarrow{CA}| &= \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}\\ |\overrightarrow{CB}| &= \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}\end{aligned}$$

Luego, al aplicar la fórmula del ángulo, obtenemos

$$\begin{aligned}\theta &= \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|}\right)\\ &= \cos^{-1}\left(\frac{4}{(\sqrt{29})(\sqrt{13})}\right)\\ &\approx 78.1° \text{ o } 1.36 \text{ radianes.}\end{aligned}$$

■

Vectores ortogonales

Dos vectores no nulos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son perpendiculares si el ángulo entre ellos es $\pi/2$. Para tales vectores, tenemos que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, ya que $\cos(\pi/2) = 0$. El recíproco también es cierto. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores no nulos con $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta = 0$, entonces, $\cos\theta = 0$ y $\theta = \cos^{-1} 0 = \pi/2$. La siguiente definición también permite que uno o ambos vectores sean el vector cero.

DEFINICIÓN Los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

EJEMPLO 4 Para determinar si dos vectores son ortogonales, calcule su producto punto.

a) $\mathbf{u} = \langle 3, -2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 4, 6 \rangle$ son ortogonales porque $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (3)(4) + (-2)(6) = 0$.

b) $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ son ortogonales porque $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (3)(0) + (-2)(2) + (1)(4) = 0$.

c) **0** es ortogonal a cualquier vector **u**, puesto que

$$\begin{aligned}\mathbf{0}\cdot\mathbf{u} &= \langle 0, 0, 0\rangle \cdot \langle u_1, u_2, u_3\rangle \\ &= (0)(u_1) + (0)(u_2) + (0)(u_3) \\ &= 0.\end{aligned}$$

■

Propiedades del producto punto y proyecciones de vectores

El producto punto cumple varias de las leyes válidas para productos ordinarios de números reales (escalares).

Propiedades del producto punto

Si **u**, **v** y **w** son tres vectores cualesquiera y c es un escalar, entonces,

1. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$
2. $(c\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot(c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$
3. $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$
4. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$
5. $\mathbf{0}\cdot\mathbf{u} = 0.$

Demostración de las propiedades 1 y 3 Las propiedades son fáciles de demostrar a partir de la definición. Por ejemplo, a continuación se presentan las demostraciones de las propiedades 1 y 3.

1. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$

3. $$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) &= \langle u_1, u_2, u_3\rangle \cdot \langle v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3\rangle \\ &= u_1(v_1 + w_1) + u_2(v_2 + w_2) + u_3(v_3 + w_3) \\ &= u_1v_1 + u_1w_1 + u_2v_2 + u_2w_2 + u_3v_3 + u_3w_3 \\ &= (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) + (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3) \\ &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}\end{aligned}$$

■

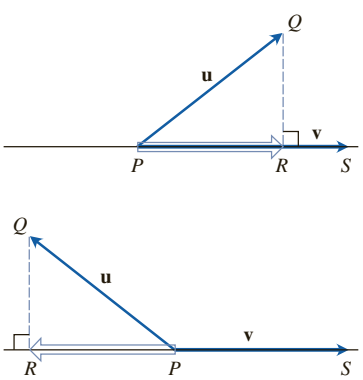


FIGURA 12.23 El vector proyección de **u** sobre **v**.

Regresemos ahora al problema planteado al inicio de esta sección: la proyección de un vector sobre otro. El **vector proyección** de $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$ sobre un vector no nulo $\mathbf{v} = \overrightarrow{PS}$ (figura 12.23) es el vector $\overrightarrow{PS}$ determinado al trazar una perpendicular desde Q hasta la recta PS. La notación para este vector es

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} \qquad (\text{“el vector proyección de } \mathbf{u} \text{ sobre } \mathbf{v}\text{”}).$$

Si **u** representa una fuerza, entonces, $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ representa la fuerza efectiva en la dirección de **v** (figura 12.24).

Si el ángulo θ entre **u** y **v** es agudo, $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ tiene la longitud $|\mathbf{u}|\cos\theta$ y dirección $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ (figura 12.25). Si θ es obtuso, $\cos\theta < 0$ y $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ tiene una longitud $-|\mathbf{u}|\cos\theta$ y dirección $-\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$. En ambos casos,

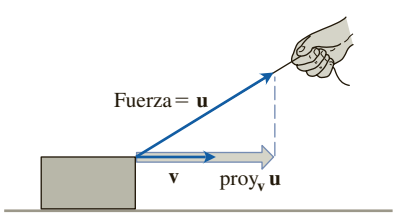


FIGURA 12.24 Si tiramos de la caja con una fuerza **u**, la fuerza efectiva que mueve la caja en la dirección **v** es la proyección de **u** sobre **v**.

$$\begin{aligned}\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} &= \big(|\mathbf{u}|\cos\theta\big)\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \\ &= \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right)\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \qquad |\mathbf{u}|\cos\theta = \frac{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \\ &= \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}.\end{aligned}$$

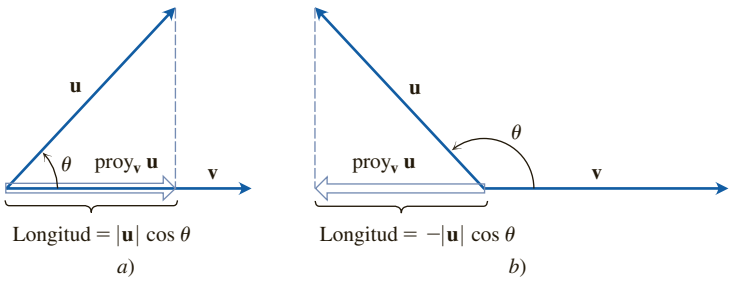


FIGURA 12.25 La longitud de $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ es *a*) $|\mathbf{u}|\cos\theta$ si $\cos\theta \geq 0$ y *b*) $-|\mathbf{u}|\cos\theta$ si $\cos\theta < 0$.

El número $|\mathbf{u}|\cos\theta$ se conoce como la **componente escalar de u en la dirección de v** (o de **u sobre v**). En resumen:

El vector proyección de **u** sobre **v** es el vector

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}. \tag{1}$$

La componente escalar de **u** en la dirección de **v** es el escalar

$$|\mathbf{u}|\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \mathbf{u}\cdot\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}. \tag{2}$$

Observe que tanto el vector proyección de **u** sobre **v** como la componente escalar de **u** sobre **v** sólo dependen de la dirección del vector **v** y no de su longitud (ya que obtenemos el producto punto de **u** con $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$, que es la dirección de **v**).

EJEMPLO 5 Determine el vector proyección de $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ sobre $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y la componente escalar de **u** en la dirección de **v**.

Solución De la ecuación (1), obtenemos $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$:

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\,\mathbf{v} = \frac{6 - 6 - 4}{1 + 4 + 4}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$$

$$= -\frac{4}{9}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = -\frac{4}{9}\mathbf{i} + \frac{8}{9}\mathbf{j} + \frac{8}{9}\mathbf{k}.$$

A partir de la ecuación (2), determinamos la componente escalar de **u** en la dirección de **v**:

$$|\mathbf{u}|\cos\theta = \mathbf{u}\cdot\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = (6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})\cdot\left(\frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}\right)$$

$$= 2 - 2 - \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}.$$

■

Las ecuaciones (1) y (2) también se aplican a los vectores bidimensionales. Esto se demuestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 Obtenga el vector proyección de una fuerza $\mathbf{F} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ sobre $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y la componente escalar **F** en la dirección de **v**.

Solución El vector proyección es

$$\begin{aligned}\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{F} &= \left(\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v} \\ &= \frac{5-6}{1+9}(\mathbf{i}-3\mathbf{j}) = -\frac{1}{10}(\mathbf{i}-3\mathbf{j}) \\ &= -\frac{1}{10}\mathbf{i}+\frac{3}{10}\mathbf{j}.\end{aligned}$$

La componente escalar de $\mathbf{F}$ en la dirección de $\mathbf{v}$ es

$$|\mathbf{F}|\cos\theta = \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{5-6}{\sqrt{1+9}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

■

Un cálculo de rutina (vea el ejercicio 29) permite verificar que el vector $\mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ es ortogonal al vector proyección $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$ (el cual tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$). De esta manera, la ecuación

$$\mathbf{u} = \text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} + (\mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}) = \underbrace{\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}}_{\text{Paralelo a } \mathbf{v}} + \underbrace{\left(\mathbf{u} - \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}\right)}_{\text{Ortogonal a } \mathbf{v}}$$

expresa $\mathbf{u}$ como una suma de vectores ortogonales.

Trabajo

En el capítulo 6 vimos que el trabajo realizado por una fuerza constante de magnitud F, al mover un objeto a lo largo de una distancia d, está dado por $W = Fd$. Esa fórmula es válida sólo si la fuerza está dirigida a lo largo de la recta de movimiento. Si una fuerza $\mathbf{F}$ que mueve un objeto a lo largo de un desplazamiento $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ}$ tiene otra dirección, el trabajo es realizado por la componente de $\mathbf{F}$ en la dirección de $\mathbf{D}$. Si θ es el ángulo entre $\mathbf{F}$ y $\mathbf{D}$ (figura 12.26), entonces,

$$\begin{aligned}\text{Trabajo} = &\ (\text{Componente escalar de } \mathbf{F} \text{ en la dirección de } \mathbf{D})(\text{longitud de } \mathbf{D}) \\ = &\ (|\mathbf{F}|\cos\theta)|\mathbf{D}| \\ = &\ \mathbf{F}\cdot\mathbf{D}.\end{aligned}$$

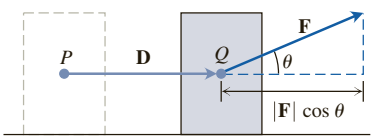


FIGURA 12.26 El trabajo realizado por una fuerza constante $\mathbf{F}$ durante un desplazamiento $\mathbf{D}$ es $(|\mathbf{F}|\cos\theta)|\mathbf{D}|$, que es el producto punto de $\mathbf{F}\cdot\mathbf{D}$.

DEFINICIÓN El **trabajo** realizado por una fuerza constante $\mathbf{F}$ que actúa a lo largo de un desplazamiento $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ}$ es

$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{D}.$$

EJEMPLO 7 Si $|\mathbf{F}| = 40$ N (newtons), $|\mathbf{D}| = 3$ m y $\theta = 60°$, el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ al actuar de P a Q es

$$\begin{aligned}\text{Trabajo} &= \mathbf{F}\cdot\mathbf{D} && \text{Definición} \\ &= |\mathbf{F}||\mathbf{D}|\cos\theta \\ &= (40)(3)\cos 60° && \text{Valores dados} \\ &= (120)(1/2) = 60 \text{ J (joules)}.\end{aligned}$$

■

Encontraremos problemas más complicados en el capítulo 16, cuando aprendamos a calcular el trabajo realizado por una fuerza variable a lo largo de una *trayectoria* más general en el espacio.

Ejercicios 12.3

Producto punto y proyecciones

En los ejercicios 1 a 8, determine

a) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$, $|\mathbf{v}|$, $|\mathbf{u}|$

b) el coseno del ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}$

c) la componente escalar de $\mathbf{u}$ en la dirección de $\mathbf{v}$

d) el vector $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$.

1. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \sqrt{5}\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \sqrt{5}\mathbf{k}$
2. $\mathbf{v} = (3/5)\mathbf{i} + (4/5)\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$
3. $\mathbf{v} = 10\mathbf{i} + 11\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
4. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
5. $\mathbf{v} = 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
6. $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{u} = \sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
7. $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \sqrt{17}\mathbf{j}$
8. $\mathbf{v} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle$, $\mathbf{u} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle$

Ángulo entre vectores

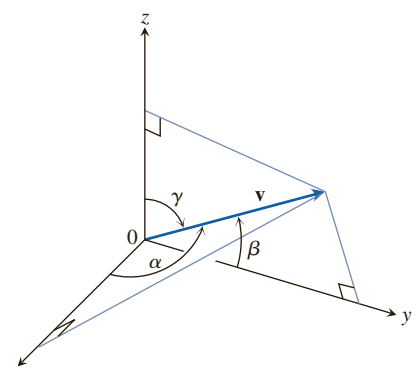
T Calcule los ángulos entre los vectores de los ejercicios 9 a 12 aproximando a la centésima más cercana de radián.

9. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$
10. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$
11. $\mathbf{u} = \sqrt{3}\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
12. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j} - \sqrt{2}\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
13. **Triánglo** Obtenga las medidas de los ángulos del triángulo cuyos vértices son $A = (-1, 0)$, $B = (2, 1)$ y $C = (1, -2)$.
14. **Rectángulo** Calcule las medidas de los ángulos entre las diagonales del rectángulo cuyos vértices son $A = (1, 0)$, $B = (0, 3)$, $C = (3, 4)$ y $D = (4, 1)$.
15. **Ángulos y cosenos directores** Los *ángulos directores* α, β y γ de un vector $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ se definen como sigue:

α es el ángulo entre $\mathbf{v}$ y el eje x positivo $(0 \le \alpha \le \pi)$

β es el ángulo entre $\mathbf{v}$ y el eje y positivo $(0 \le \beta \le \pi)$

γ es el ángulo entre $\mathbf{v}$ y el eje z positivo $(0 \le \gamma \le \pi)$.



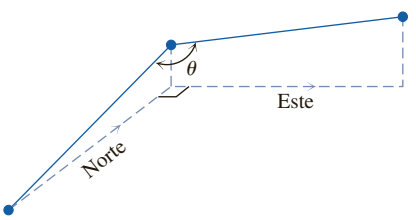
a) Demuestre que

$$\cos\alpha = \frac{a}{|\mathbf{v}|}, \qquad \cos\beta = \frac{b}{|\mathbf{v}|}, \qquad \cos\gamma = \frac{c}{|\mathbf{v}|},$$

y también que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Estos cosenos se llaman los *cosenos directores* de $\mathbf{v}$.

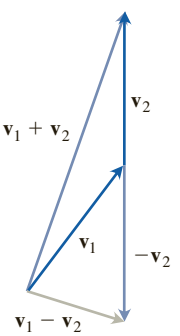
b) **Los vectores unitarios se construyen a partir de los cosenos directores** Demuestre que si $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ es un vector unitario, entonces a, b y c son los cosenos directores de $\mathbf{v}$.

16. **Construcción de un canal** Se va a construir un canal de agua con una pendiente de 20% en la dirección norte y una pendiente de 10% en la dirección este. Determine el ángulo θ requerido en la tubería para el giro de norte a este.

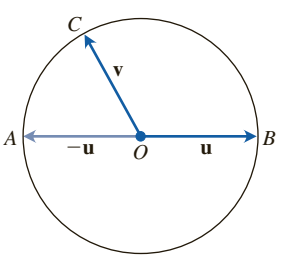


Teoría y ejemplos

17. **Sumas y diferencias** En la siguiente figura parecería que $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ son ortogonales. ¿Es mera coincidencia o hay circunstancias en las cuales podríamos esperar que la suma de dos vectores sea ortogonal a su diferencia? Dé argumentos para fundamentar su respuesta.



18. **Ortogonalidad en una circunferencia** Suponga que AB es el diámetro de una circunferencia con centro O, y que C es un punto en uno de los dos arcos que unen A y B. Demuestre que $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ son ortogonales.

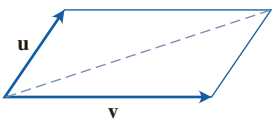


19. **Diagonales de un rombo** Demuestre que las diagonales de un rombo (paralelogramo con lados de igual longitud) son perpendiculares.

20. Diagonales perpendiculares Demuestre que los cuadrados son los únicos rectángulos con diagonales perpendiculares.

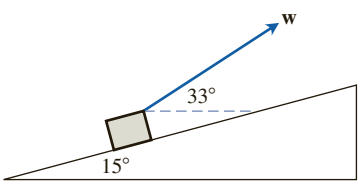
21. Cuando los paralelogramos son rectángulos Demuestre que un paralelogramo es un rectángulo si y sólo si sus diagonales tienen la misma longitud. (Los carpinteros aprovechan este hecho con frecuencia).

22. Diagonal de un paralelogramo Demuestre que la diagonal indicada del paralelogramo determinado por los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ biseca al ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ si $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$.



23. Movimiento de proyectiles Una pistola con una rapidez de disparo de 1200 ft/s se dispara a un ángulo de 8° por encima de la horizontal. Obtenga las componentes horizontal y vertical de la velocidad del proyectil.

24. Plano inclinado Suponga que una caja es arrastrada hacia arriba sobre un plano inclinado, como se muestra en la figura. Obtenga la fuerza $\mathbf{w}$ necesaria para que la componente de la fuerza paralela al plano inclinado sea igual a 2.5 libras.



25. ***a*) Desigualdad de Cauchy-Schwartz** Puesto que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta$, demuestre que la desigualdad $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$ es válida para vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ cualesquiera.

***b*)** ¿En qué circunstancias, si acaso, $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|$ es igual a $|\mathbf{u}||\mathbf{v}|$? Justifique su respuesta.

26. El producto punto es positivo definido Demuestre que el producto punto de vectores es *positivo definido*; es decir, demuestre que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ para todo vector $\mathbf{u}$, y que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ si y sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

27. Vectores unitarios ortogonales Si $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son vectores unitarios ortogonales y $\mathbf{v} = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2$, obtenga $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1$.

28. Cancelación en el producto punto En la multiplicación de números reales, si $uv_1 = uv_2$ y $u \neq 0$, podemos cancelar la u y concluir que $v_1 = v_2$. ¿Funciona la misma regla para el producto punto? Es decir, si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, ¿puede concluir que $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$? Justifique su respuesta.

29. Usando la definición de la proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$, demuestre por un cálculo directo que $(\mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}) \cdot \text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = 0$.

30. Se aplica una fuerza $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ a una nave espacial cuya velocidad es el vector $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$. Exprese $\mathbf{F}$ como la suma de un vector paralelo a $\mathbf{v}$ y un vector ortogonal a $\mathbf{v}$.

Ecuaciones de rectas en el plano

31. Recta perpendicular a un vector Demuestre que el vector $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ es perpendicular a la recta $ax + by = c$ estableciendo que la pendiente del vector $\mathbf{v}$ es el recíproco negativo de la pendiente de la recta dada.

32. Recta paralela a un vector Demuestre que el vector $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ es paralelo a la recta $bx - ay = c$ estableciendo que la pendiente del segmento de recta que representa $\mathbf{v}$ es igual a la pendiente de la recta dada.

En los ejercicios 33 a 36, utilice el resultado del ejercicio 31 para obtener una ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a $\mathbf{v}$. Luego, trace la recta. Incluya a $\mathbf{v}$ en su bosquejo *como un vector que parte del origen*.

33. $P(2, 1)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ **34.** $P(-1, 2)$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j}$

35. $P(-2, -7)$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ **36.** $P(11, 10)$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

En los ejercicios 37 a 40, utilice el resultado del ejercicio 32 para obtener una ecuación de la recta que pasa por P y es paralela a $\mathbf{v}$. Luego, trace la recta. Incluya a $\mathbf{v}$ en su bosquejo *como un vector que parte del origen*.

37. $P(-2, 1)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ **38.** $P(0, -2)$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

39. $P(1, 2)$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ **40.** $P(1, 3)$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

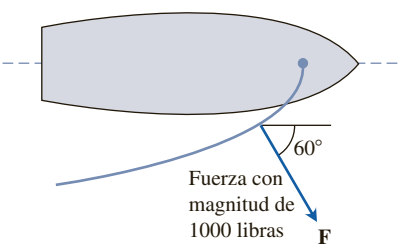
Trabajo

41. Trabajo a lo largo de una recta Determine el trabajo realizado por una fuerza $\mathbf{F} = 5\mathbf{i}$ (de magnitud 5 N) al mover un objeto a lo largo de la recta que va del origen al punto (1, 1) (distancia en metros).

42. Locomotora La locomotora *Big Boy* de Union Pacific puede halar vagones de 6000 toneladas con un esfuerzo de tracción de 602 148 N (135 375 libras). Con este grado de esfuerzo, ¿cuánto trabajo realizó *Big Boy* durante una jornada de 605 km (aproximadamente en línea recta) de San Francisco a Los Ángeles?

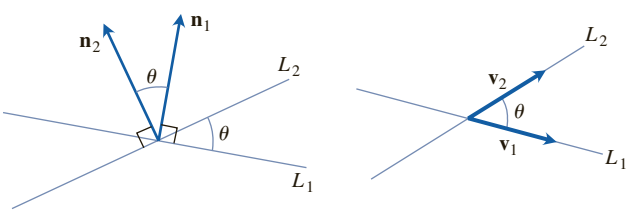
43. Plano inclinado ¿Cuánto trabajo se realiza para deslizar un contenedor una distancia de 20 metros a lo largo de un muelle de carga, si se tira de él con una fuerza de 200 N y a un ángulo de 30° con respecto a la horizontal?

44. Velero El viento que pasa sobre la vela de un bote ejerce una fuerza $\mathbf{F}$ con una magnitud de 1000 libras, como se muestra en la figura. ¿Cuánto trabajo efectúa el viento al mover el bote 1 milla hacia delante? Exprese su respuesta en libras-pie.



Ángulos entre rectas en el plano

El **ángulo agudo entre rectas que se intersecan**, pero que no se cortan en ángulo recto, es el mismo que el ángulo determinado por los vectores normales a las rectas o por vectores paralelos a las mismas.



Con base en este hecho y en los resultados del ejercicio 31 o 32, determine los ángulos agudos entre las rectas de los ejercicios 45 a 50.

45. $3x + y = 5, \quad 2x - y = 4$

46. $y = \sqrt{3}x - 1, \quad y = -\sqrt{3}x + 2$

47. $\sqrt{3}x - y = -2, \quad x - \sqrt{3}y = 1$

48. $x + \sqrt{3}y = 1, \quad (1 - \sqrt{3})x + (1 + \sqrt{3})y = 8$

49. $3x - 4y = 3, \quad x - y = 7$

50. $12x + 5y = 1, \quad 2x - 2y = 3$

12.4 El producto cruz

Al estudiar las rectas en el plano, cuando necesitábamos describir cuánto se inclinaba una recta, utilizamos los conceptos de pendiente y de ángulo de inclinación. En el espacio queremos describir la forma en que se inclina un *plano*. Esto se consigue multiplicando dos vectores que se encuentran en el plano, para obtener un tercer vector perpendicular al plano. La dirección de este tercer vector nos indica la "inclinación del plano". El producto que usamos para multiplicar los vectores es el *producto vectorial* o *producto cruz*, y es el segundo de los métodos de multiplicación vectorial que usamos en cálculo. En esta sección estudiaremos el producto cruz.

El producto cruz de dos vectores en el espacio

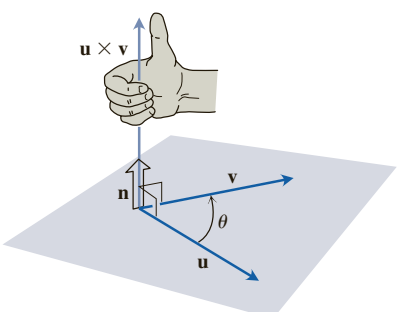


FIGURA 12.27 La construcción de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Iniciamos con dos vectores no nulos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en el espacio. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ no son paralelos, entonces, determinan un plano. Seleccionamos un vector unitario $\mathbf{n}$ perpendicular al plano mediante la **regla de la mano derecha**. Esto significa que seleccionamos $\mathbf{n}$ como el vector (normal) unitario que apunta en la forma que el dedo pulgar derecho apuntaría si doblamos los otros cuatro dedos con un ángulo θ de $\mathbf{u}$ hacia $\mathbf{v}$ (figura 12.27). Entonces, se define un nuevo vector como sigue

DEFINICIÓN El **producto cruz** $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ("**u cruz v**") es el vector

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \operatorname{sen} \theta)\, \mathbf{n}.$$

A diferencia del producto punto, el producto cruz da como resultado un vector. Por esa razón, también se llama **producto vectorial** de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, y se aplica *sólo* a vectores en el espacio. El vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{v}$ porque es un múltiplo escalar de $\mathbf{n}$.

Existe un método directo para calcular el producto cruz de dos vectores a partir de sus componentes. El método no requiere que conozcamos el ángulo entre ellos (como sugiere su definición), pero pospondremos ese cálculo momentáneamente de forma que podamos enfocarnos antes que nada en las propiedades del producto cruz.

Puesto que el seno de 0 y el seno de π son cero, tiene sentido definir el producto cruz de dos vectores paralelos no nulos como $\mathbf{0}$. Si $\mathbf{u}$ o $\mathbf{v}$, o ambos, son nulos, también definimos que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es $\mathbf{0}$. De este modo, el producto cruz de dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es igual al vector cero si y sólo si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos, o uno o ambos son nulos.

Vectores paralelos

Los vectores no nulos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos si y sólo si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

El producto cruz cumple las siguientes propiedades.

Propiedades del producto cruz

Si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores cualesquiera, y r y s son escalares, entonces,

1. $(r\mathbf{u}) \times (s\mathbf{v}) = (rs)(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

2. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$

3. $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

4. $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \times \mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{u} + \mathbf{w} \times \mathbf{u}$

5. $\mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

6. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$

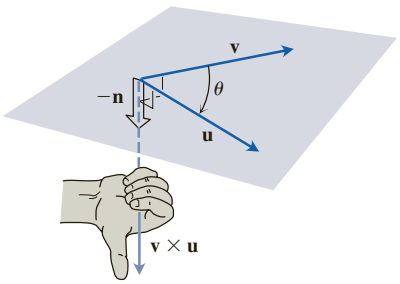


FIGURA 12.28 La construcción de $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$.

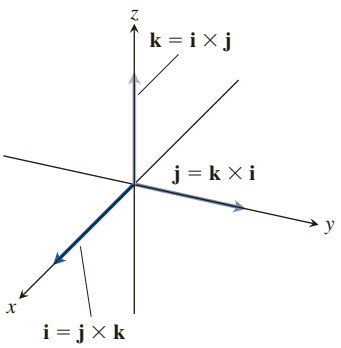


FIGURA 12.29 Los productos cruz por pares formados con $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$.

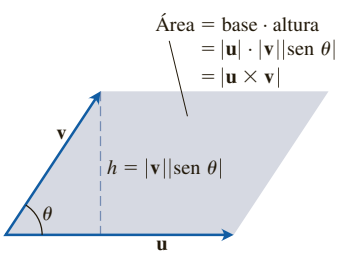


FIGURA 12.30 Paralelogramo determinado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

Por ejemplo, para visualizar la propiedad número 3, observe que cuando los dedos de su mano derecha se doblan un ángulo θ de $\mathbf{v}$ a $\mathbf{u}$, el pulgar apunta en la dirección opuesta, y el vector unitario que seleccionamos para formar $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ es el negativo del que seleccionamos para formar $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ (figura 12.28).

La propiedad 1 se puede verificar aplicando la definición del producto cruz a ambos lados de la ecuación y comparando los resultados. La propiedad 2 se demuestra en el apéndice 8. La propiedad 4 se demuestra multiplicando ambos lados de la ecuación en la propiedad 2 por -1 e invirtiendo el orden de los productos, de acuerdo con la propiedad 3. La propiedad 5 es una definición. Como regla, la multiplicación en el producto cruz *no es asociativa*, de manera que $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$, en general, no es igual a $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$. (Vea el ejercicio adicional 17).

Cuando aplicamos la definición y la propiedad 3 para calcular los productos cruz por pares de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, vemos que (figura 12.29)

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) = \mathbf{k}$$
$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = -(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i}$$
$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = -(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) = \mathbf{j}$$

e

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

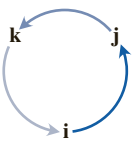


Diagrama para recordar los productos cruz

$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ es el área de un paralelogramo

Como $\mathbf{n}$ es un vector unitario, la magnitud de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\,|\operatorname{sen}\theta||\mathbf{n}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\operatorname{sen}\theta.$$

Ésta es el área del paralelogramo determinado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ (figura 12.30), siendo $|\mathbf{u}|$ la base y $|\mathbf{v}||\operatorname{sen}\theta|$ la altura del paralelogramo.

Fórmula del determinante para $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

Nuestro siguiente objetivo es calcular $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ a partir de las componentes de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ con respecto a un sistema de coordenadas cartesianas.

Suponga que

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}.$$

Entonces, las leyes distributivas y las reglas para la multiplicación de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ nos dicen que

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}) \times (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}) \\ &= u_1v_1\mathbf{i} \times \mathbf{i} + u_1v_2\mathbf{i} \times \mathbf{j} + u_1v_3\mathbf{i} \times \mathbf{k} \\ &\quad + u_2v_1\mathbf{j} \times \mathbf{i} + u_2v_2\mathbf{j} \times \mathbf{j} + u_2v_3\mathbf{j} \times \mathbf{k} \\ &\quad + u_3v_1\mathbf{k} \times \mathbf{i} + u_3v_2\mathbf{k} \times \mathbf{j} + u_3v_3\mathbf{k} \times \mathbf{k} \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Los términos de las componentes en la última línea son difíciles de recordar, pero son los mismos que los términos en el desarrollo del determinante simbólico:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Determinantes
Los determinantes 2×2 y 3×3 se calculan como sigue:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Así, reescribimos el cálculo en esta forma fácil de recordar.

Cálculo del producto cruz mediante determinante
Si $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$, entonces,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

EJEMPLO 1 Obtenga $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ si $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Solución Desarrollamos el determinante simbólico:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$
$$= -2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$$
$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 10\mathbf{k} \quad \text{Propiedad 3}$$ ■

EJEMPLO 2 Determine un vector perpendicular al plano de $P(1, -1, 0)$, $Q(2, 1, -1)$ y $R(-1, 1, 2)$ (figura 12.31).

Solución El vector $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ es perpendicular al plano porque es perpendicular a ambos vectores. En términos de componentes,

$$\overrightarrow{PQ} = (2 - 1)\mathbf{i} + (1 + 1)\mathbf{j} + (-1 - 0)\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$$
$$\overrightarrow{PR} = (-1 - 1)\mathbf{i} + (1 + 1)\mathbf{j} + (2 - 0)\mathbf{k} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$
$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$
$$= 6\mathbf{i} + 6\mathbf{k}.$$ ■

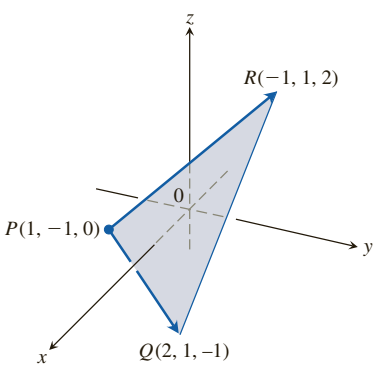


FIGURA 12.31 El vector $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ es perpendicular al plano del triángulo PQR (ejemplo 2). El área del triángulo PQR es la mitad de $|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|$ (ejemplo 3).

EJEMPLO 3 Obtenga el área del triángulo con vértices en $P(1, -1, 0)$, $Q(2, 1, -1)$ y $R(-1, 1, 2)$ (figura 12.31).

Solución El área del paralelogramo determinada por P, Q y R es

$$|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = |6\mathbf{i} + 6\mathbf{k}| \quad \text{Valores del ejemplo 2}$$
$$= \sqrt{(6)^2 + (6)^2} = \sqrt{2 \cdot 36} = 6\sqrt{2}.$$

El área del triángulo es la mitad de esto, es decir, $3\sqrt{2}$. ■

EJEMPLO 4 Encuentre un vector unitario perpendicular al plano de $P(1, -1, 0)$, $Q(2, 1, -1)$ y $R(-1, 1, 2)$.

Solución Puesto que $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ es perpendicular al plano, su dirección $\mathbf{n}$ es un vector unitario perpendicular al plano. Tomando los valores de los ejemplos 2 y 3, tenemos

$$\mathbf{n} = \frac{\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|} = \frac{6\mathbf{i} + 6\mathbf{k}}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}.$$ ■

Para facilitar el cálculo del producto cruz usando determinantes, generalmente expresamos los vectores en la forma $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v3\mathbf{k}$, en vez de ternas ordenadas $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

Torque o torca

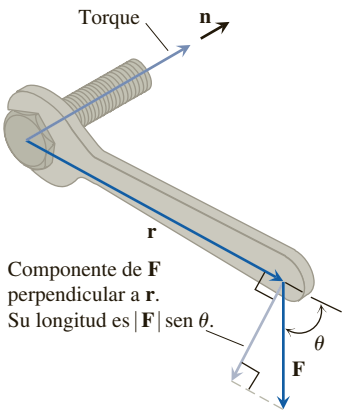


FIGURA 12.32 El vector de torque describe la tendencia de la fuerza **F** para impulsar el tornillo hacia delante.

Cuando hacemos girar un tornillo aplicando una fuerza **F** a una llave (figura 12.32), producimos un torque que ocasiona que el tornillo gire. El **vector de torque** apunta en la dirección del eje del tornillo de acuerdo con la regla de la mano derecha (de manera que la rotación es en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se observa desde la *punta* del vector). La magnitud del torque depende de qué tan lejos se aplique la fuerza sobre el brazo de la llave y de cuánto de la fuerza es perpendicular al brazo de la llave en el punto de aplicación. El número que usamos para medir la magnitud del torque es el producto de la longitud del brazo de palanca **r** y de la componente escalar de **F** perpendicular a **r**. En la notación de la figura 12.32,

$$\text{Magnitud del vector de torque} = |\mathbf{r}||\mathbf{F}|\text{sen } \theta,$$

o $|\mathbf{r} \times \mathbf{F}|$. Si **n** es el vector unitario a lo largo del eje del tornillo en la dirección del torque, entonces, la descripción completa del vector de torque es $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$, o

$$\text{Vector de torque} = (|\mathbf{r}||\mathbf{F}|\text{sen } \theta)\,\mathbf{n}.$$

Recuerde que definimos que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es igual a $\mathbf{0}$ cuando **u** y **v** son paralelos. Esto es congruente con la interpretación del vector de torque. Si la fuerza **F** de la figura 12.32 es paralela a la llave, lo que significa que estamos tratando de girar el tornillo tirando de éste o empujándolo a lo largo de la línea del brazo de la llave, entonces el torque producido es cero.

EJEMPLO 5 La magnitud del torque generado por la fuerza **F** en el punto pivote P en la figura 12.33 es

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{F}| &= |\overrightarrow{PQ}||\mathbf{F}|\,\text{sen } 70° \\ &\approx (3)(20)(0.94) \\ &\approx 56.4 \text{ libras-ft.} \end{aligned}$$

En este ejemplo el vector de torque apunta hacia fuera de la página, es decir, hacia el lector. ■

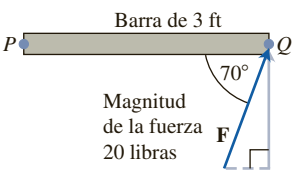


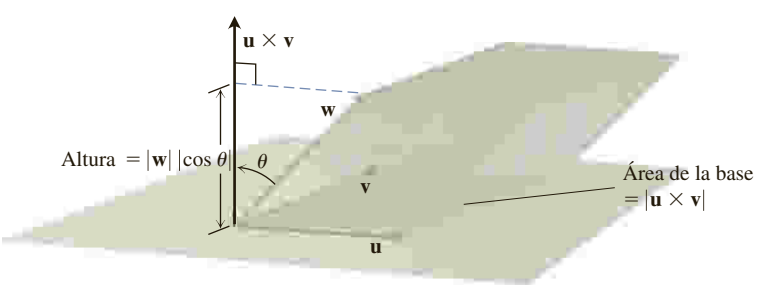
FIGURA 12.33 La magnitud del torque ejercido por **F** en P es de alrededor de 56.4 libras-ft (ejemplo 5). La barra gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor de P.

Triple producto escalar o producto caja

El producto $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ se llama **triple producto escalar** de **u**, **v** y **w** (en ese orden). Como podrá ver a partir de la fórmula

$$|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}| = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}||\mathbf{w}||\cos\theta|,$$

el valor absoluto del triple producto escalar es el volumen del paralelepípedo (una caja cuyas caras son paralelogramos) determinado por **u**, **v** y **w** (figura 12.34). El número $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$



$$\begin{aligned} \text{Volumen} &= \text{área de la base} \cdot \text{altura} \\ &= |\mathbf{u} \times \mathbf{v}||\mathbf{w}||\cos\theta| \\ &= |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}| \end{aligned}$$

FIGURA 12.34 El número $|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|$ es el volumen del paralelepípedo.

es el área del paralelogramo de la base. El número $|\mathbf{w}||\cos\theta|$ es la altura del paralelepípedo. Debido a esta interpretación geométrica, $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$ también se conoce como el **producto caja** de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

Considerando los planos de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, y de $\mathbf{w}$ y $\mathbf{u}$ como bases del paralelepípedo determinado por $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, vemos que

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = (\mathbf{v}\times\mathbf{w})\cdot\mathbf{u} = (\mathbf{w}\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}.$$

Los productos punto y cruz pueden intercambiarse en un triple producto escalar sin alterar su valor.

Puesto que el producto punto es conmutativo, también tenemos

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = \mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}).$$

El triple producto escalar se puede calcular como un determinante:

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} &= \left[\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}\right]\cdot\mathbf{w} \\ &= w_1\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - w_2\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + w_3\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Cálculo del triple producto escalar como un determinante

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

EJEMPLO 6 Obtenga el volumen de la caja (paralelepípedo) determinada por $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

Solución Si empleamos la regla para calcular determinantes de 3×3, obtenemos

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -4 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} - (2)\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -23.$$

El volumen es $|(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}| = 23$ unidades cúbicas. ■

Ejercicios 12.4

Cálculos con el producto cruz

En los ejercicios 1 a 8, obtenga la longitud y dirección (cuando esté definida) de $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}\times\mathbf{u}$.

1. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$
2. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$
3. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
4. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$
5. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i}$, $\mathbf{v} = -3\mathbf{j}$
6. $\mathbf{u} = \mathbf{i}\times\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j}\times\mathbf{k}$
7. $\mathbf{u} = -8\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
8. $\mathbf{u} = \frac{3}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

En los ejercicios 9 a 14, dibuje los ejes de coordenadas y, luego, incluya los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ como vectores que parten del origen.

9. $\mathbf{u} = \mathbf{i}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j}$
10. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j}$
11. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$
12. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
13. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$
14. $\mathbf{u} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i}$

Triángulos en el espacio

En los ejercicios 15 a 18,

a) obtenga el área del triángulo determinado por los puntos P, Q y R;

b) determine un vector unitario perpendicular al plano PQR.

15. $P(1, -1, 2)$, $Q(2, 0, -1)$, $R(0, 2, 1)$

16. $P(1, 1, 1)$, $Q(2, 1, 3)$, $R(3, -1, 1)$

17. $P(2, -2, 1)$, $Q(3, -1, 2)$, $R(3, -1, 1)$

18. $P(-2, 2, 0)$, $Q(0, 1, -1)$, $R(-1, 2, -2)$

Triple producto escalar

En los ejercicios 19 a 22, verifique que $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v}$ y obtenga el volumen del paralelepípedo (o caja) determinado por $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

	$\mathbf{u}$	$\mathbf{v}$	$\mathbf{w}$
19.	$2\mathbf{i}$	$2\mathbf{j}$	$2\mathbf{k}$
20.	$\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$	$2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$	$-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$
21.	$2\mathbf{i} + \mathbf{j}$	$2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$	$\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$
22.	$\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$	$-\mathbf{i} - \mathbf{k}$	$2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

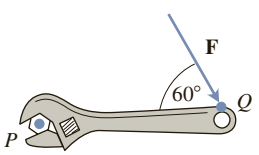
Teoría y ejemplos

23. Vectores paralelos y perpendiculares Sean $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = -15\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. ¿Cuáles de estos vectores son ***a)*** perpendiculares, ***b)*** paralelos entre sí? Justifique sus respuestas.

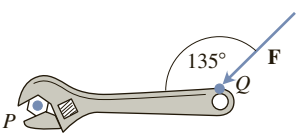
24. Vectores paralelos y perpendiculares Sean $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$, $\mathbf{r} = -(\pi/2)\mathbf{i} - \pi\mathbf{j} + (\pi/2)\mathbf{k}$. ¿Cuáles de estos vectores son ***a)*** perpendiculares, ***b)*** paralelos entre sí? Justifique su respuesta.

En los ejercicios 25 y 26, determine la magnitud del torque ejercido por $\mathbf{F}$ sobre el tornillo en P si $|\overrightarrow{PQ}| = 8$ in y $|\mathbf{F}| = 30$ libras. Exprese su respuesta en libras-ft.

25.



26.



27. ¿Cuáles de las siguientes igualdades *son siempre verdaderas* y cuáles *no siempre son verdaderas*? Fundamente sus respuestas.

a) $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$

b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|$

c) $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

d) $\mathbf{u} \times (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

e) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$

f) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$

g) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0$

h) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

28. ¿Cuáles de las siguientes igualdades *son siempre verdaderas* y cuáles *no siempre son verdaderas*? Fundamente sus respuestas.

a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ ***b)*** $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$

c) $(-\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

d) $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ (Cualquier número c)

e) $c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (c\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (c\mathbf{v})$ (Cualquier número c)

f) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$

g) $(\mathbf{u} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = 0$

h) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

29. Dados los vectores no nulos $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, describa lo siguiente usando producto punto y producto cruz, según sea adecuado.

a) El vector proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$

b) Un vector ortogonal a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$

c) Un vector ortogonal a $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$

d) El volumen del paralelepípedo determinado por $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$

e) Un vector ortogonal a $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $\mathbf{u} \times \mathbf{w}$

f) Un vector de longitud $|\mathbf{u}|$ en la dirección de $\mathbf{v}$

30. Calcule $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j}$ e $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j})$. ¿Qué puede concluir acerca de la asociatividad del producto cruz?

31. Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ vectores. ¿Cuáles de las siguientes expresiones tienen sentido y cuáles no? Justifique sus respuestas.

a) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$

b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$

c) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

d) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$

32. Productos cruz de tres vectores Demuestre que, excepto en casos degenerados, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ está en el plano de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, mientras que $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ está en el plano de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. ¿Cuáles *son* los casos degenerados?

33. Cancelación en el producto cruz Si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$ y $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, ¿es cierto que $\mathbf{v} = \mathbf{w}$? Justifique su respuesta.

34. Doble cancelación Si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ y si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$ y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$, ¿es $\mathbf{v} = \mathbf{w}$? Justifique su respuesta.

Área de un paralelogramo

Determine las áreas de los paralelogramos cuyos vértices se indican en los ejercicios 35 a 40.

35. $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 0)$, $D(0, -1)$

36. $A(0, 0)$, $B(7, 3)$, $C(9, 8)$, $D(2, 5)$

37. $A(-1, 2)$, $B(2, 0)$, $C(7, 1)$, $D(4, 3)$

38. $A(-6, 0)$, $B(1, -4)$, $C(3, 1)$, $D(-4, 5)$

39. $A(0, 0, 0)$, $B(3, 2, 4)$, $C(5, 1, 4)$, $D(2, -1, 0)$

40. $A(1, 0, -1)$, $B(1, 7, 2)$, $C(2, 4, -1)$, $D(0, 3, 2)$

Área de un triángulo

Obtenga las áreas de los triángulos cuyos vértices se indican en los ejercicios 41 a 47.

41. $A(0, 0)$, $B(-2, 3)$, $C(3, 1)$

42. $A(-1, -1)$, $B(3, 3)$, $C(2, 1)$

43. $A(-5, 3)$, $B(1, -2)$, $C(6, -2)$

44. $A(-6, 0)$, $B(10, -5)$, $C(-2, 4)$

45. $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, -1)$

46. $A(0, 0, 0)$, $B(-1, 1, -1)$, $C(3, 0, 3)$

47. $A(1, -1, 1)$, $B(0, 1, 1)$, $C(1, 0, -1)$

48. Obtenga el volumen de un paralelepípedo si cuatro de sus ocho vértices son $A(0, 0, 0)$, $B(1, 2, 0)$, $C(0, -3, 2)$ y $D(3, -4, 5)$.

49. Área de un triángulo Determine una fórmula para el área del triángulo en el plano xy con vértices en $(0, 0)$, (a_1, a_2) y (b_1, b_2). Explique cómo desarrolló dicha fórmula.

50. Área del triángulo Obtenga una fórmula concisa, basada en un determinante de 3×3, para obtener el área de un triángulo en el plano xy con vértices en (a_1, a_2), (b_1, b_2) y (c_1, c_2).

12.5 Rectas y planos en el espacio

Esta sección muestra cómo usar productos escalares y vectoriales para escribir ecuaciones de rectas, segmentos de recta y planos en el espacio. Usaremos estas representaciones en lo que resta del libro, al estudiar el cálculo relacionado con curvas y superficies en el espacio.

Rectas y segmentos de recta en el espacio

En el plano, una recta se determina por un punto y un número que indica la pendiente de la recta. En el espacio, una recta está determinada por un punto y un *vector* que indica la dirección de la recta.

Suponga que L es una recta en el espacio que pasa por un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y que es paralela a un vector $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$. De esta forma, L es el conjunto de todos los puntos $P(x, y, z)$ para los cuales $\overrightarrow{P_0P}$ es paralelo a $\mathbf{v}$ (figura 12.35). Por lo tanto, $\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v}$ para algún parámetro escalar t. El valor de t depende de la ubicación del punto P a lo largo de la recta, y el dominio de t es $(-\infty, \infty)$. La forma desarrollada de la ecuación $\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v}$ es

$$(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k} = t(v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}),$$

lo cual puede rescribirse como

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k} + t(v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}). \tag{1}$$

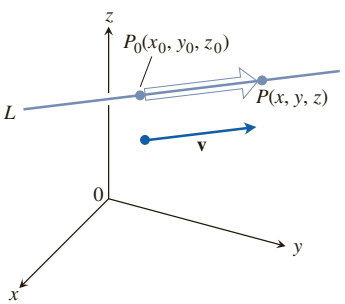


FIGURA 12.35 Un punto P está en la recta L que pasa por P_0 y es paralela a $\mathbf{v}$ si y sólo si $\overrightarrow{P_0Q}$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{v}$.

Si $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de un punto $P(x, y, z)$ sobre la recta, y $\mathbf{r}_0$ es el vector de posición del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, entonces, la ecuación (1) da la siguiente forma vectorial para la ecuación de una recta en el espacio.

Ecuación vectorial de una recta

Una ecuación vectorial de la recta L que pasa por $P_0(x_0, y_0, z_0)$ paralela a $\mathbf{v}$ es

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \qquad -\infty < t < \infty, \tag{2}$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición de un punto $P(x, y, z)$ sobre L, y $\mathbf{r}_0$ es el vector de posición de $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

Al igualar las componentes correspondientes de los dos lados de la ecuación (1), resultan tres ecuaciones escalares con el parámetro t:

$$x = x_0 + tv_1, \qquad y = y_0 + tv_2, \qquad z = z_0 + tv_3.$$

Estas ecuaciones nos dan la parametrización estándar de la recta para el intervalo del parámetro $-\infty < t < \infty$.

Ecuaciones paramétricas de una recta

La parametrización estándar de la recta que pasa por $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y que es paralela a $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ es

$$x = x_0 + tv_1, \quad y = y_0 + tv_2, \quad z = z_0 + tv_3, \quad -\infty < t < \infty \tag{3}$$

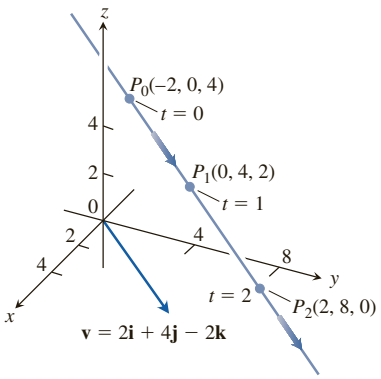


FIGURA 12.36 Algunos valores del parámetro y los puntos correspondientes sobre la recta del ejemplo 1. Las flechas indican la dirección en la que aumenta t.

EJEMPLO 1 Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $(-2, 0, 4)$ y que es paralela a $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ (figura 12.36).

Solución Con $P_0(x_0, y_0, z_0)$ igual a $(-2, 0, 4)$ y $v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ igual a $2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, las ecuaciones (3) se convierten en

$$x = -2 + 2t, \qquad y = 4t, \qquad z = 4 - 2t. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $P(-3, 2, -3)$ y $Q(1, -1, 4)$.

Solución El vector

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= (1 - (-3))\mathbf{i} + (-1 - 2)\mathbf{j} + (4 - (-3))\mathbf{k} \\ &= 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}\end{aligned}$$

es paralelo a la recta, y las ecuaciones (3) con $(x_0, y_0, z_0) = (-3, 2, -3)$ dan por resultado

$$x = -3 + 4t, \qquad y = 2 - 3t, \qquad z = -3 + 7t.$$

Pudimos haber seleccionado $Q(1, -1, 4)$ como el "punto base" y escribir

$$x = 1 + 4t, \qquad y = -1 - 3t, \qquad z = 4 + 7t.$$

Estas ecuaciones sirven tan bien como la primera; simplemente nos colocan en un punto diferente sobre la recta para un valor dado de t. $\blacksquare$

Observe que las parametrizaciones no son únicas. No sólo se puede cambiar el "punto base", sino también el parámetro. Las ecuaciones $x = -3 + 4t^3$, $y = 2 - 3t^3$ y $z = -3 + 7t^3$ también parametrizan a la recta del ejemplo 2.

Para parametrizar un segmento de recta que une dos puntos, primero parametrizamos la recta que pasa por los puntos. Luego, obtenemos los valores de t para los extremos del segmento y restringimos t al intervalo cerrado limitado por estos valores. Las ecuaciones de la recta, junto con esta restricción adicional, parametrizan al segmento.

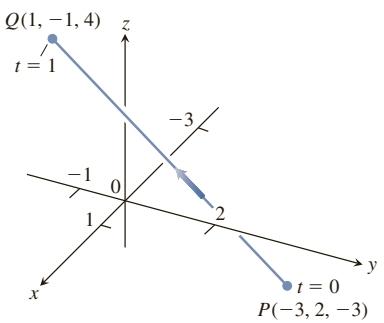


FIGURA 12.37 En el ejemplo 3 se obtiene una parametrización del segmento de recta PQ. La flecha indica la dirección en que aumenta t.

EJEMPLO 3 Parametrice el segmento de recta que une los puntos $P(-3, 2, -3)$ y $Q(1, -1, 4)$ (figura 12.37).

Solución Iniciamos con las ecuaciones de la recta que pasa por P y Q, tomándolas, en este caso, del ejemplo 2:

$$x = -3 + 4t, \qquad y = 2 - 3t, \qquad z = -3 + 7t.$$

Observamos que el punto

$$(x, y, z) = (-3 + 4t, 2 - 3t, -3 + 7t)$$

sobre la recta pasa por $P(-3, 2, -3)$ en $t = 0$ y por $Q(1, -1, 4)$ en $t = 1$. Agregamos la restricción de $0 \le t \le 1$ para parametrizar el segmento:

$$x = -3 + 4t, \qquad y = 2 - 3t, \qquad z = -3 + 7t, \qquad 0 \le t \le 1. \quad \blacksquare$$

La forma vectorial (ecuación 2) de una recta en el espacio es más ilustrativa si pensamos en la recta como la trayectoria de una partícula que parte de la posición $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y se mueve en la dirección del vector $\mathbf{v}$. Al reescribir la ecuación (2), tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \\ &= \mathbf{r}_0 + t|\mathbf{v}|\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.\end{aligned} \tag{4}$$

Posición inicial — Tiempo — Rapidez — Dirección

En otras palabras, la posición de la partícula en el tiempo t es su posición inicial más la distancia recorrida (rapidez × tiempo) en la dirección $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ de su movimiento rectilíneo.

EJEMPLO 4 Un helicóptero volará directamente de un helipuerto ubicado en el origen en dirección del punto (1, 1, 1) a una rapidez de 60 ft/s. ¿Cuál será la posición del helicóptero después de 10 segundos?

Solución Colocamos el origen en la posición inicial (helipuerto) del helicóptero. Entonces, el vector unitario

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$$

indica la dirección de vuelo del helicóptero. De acuerdo con la ecuación (4), la posición del helicóptero en cualquier momento t es

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 + t(\text{rapidez})\mathbf{u} \\ &= \mathbf{0} + t(60)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}\right) \\ &= 20\sqrt{3}t(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}).\end{aligned}$$

Cuando $t = 10$ s,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(10) &= 200\sqrt{3}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \\ &= \left\langle 200\sqrt{3}, 200\sqrt{3}, 200\sqrt{3} \right\rangle .\end{aligned}$$

Después de 10 segundos de vuelo del origen hacia (1, 1, 1), el helicóptero se localiza en el punto $(200\sqrt{3}, 200\sqrt{3}, 200\sqrt{3})$ del espacio. Ha viajado una distancia de (60 ft/s) (10 s) = 600 ft, que es la longitud del vector $\mathbf{r}(10)$. ■

Distancia de un punto a una recta en el espacio

Para obtener la distancia de un punto S a una recta que pasa por un punto P, paralela a un vector $\mathbf{v}$, encontramos el valor absoluto de la componente escalar de $\overrightarrow{PS}$ en la dirección de un vector normal a la recta (figura 12.38). Si empleamos la notación de la figura, el valor absoluto de la componente escalar es $\overrightarrow{PS}$ sen θ, que es $\dfrac{|\overrightarrow{PS} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$.

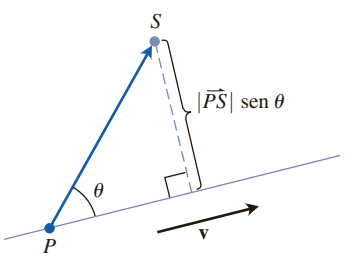


FIGURA 12.38 La distancia de S a la recta que pasa por P, en forma paralela a $\mathbf{v}$, es $|\overrightarrow{PS}|$ sen θ, donde θ es el ángulo entre $\overrightarrow{PS}$ y $\mathbf{v}$.

Distancia de un punto S a una recta que pasa por P y que es paralela a $\mathbf{v}$

$$d = \frac{|\overrightarrow{PS} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} \tag{5}$$

EJEMPLO 5 Obtenga la distancia del punto $S(1, 1, 5)$ a la recta

$$L: \quad x = 1 + t, \quad y = 3 - t, \quad z = 2t.$$

Solución A partir de las ecuaciones de L, vemos que L pasa por $P(1, 3, 0)$ y que es paralela a $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Con

$$\overrightarrow{PS} = (1 - 1)\mathbf{i} + (1 - 3)\mathbf{j} + (5 - 0)\mathbf{k} = -2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

y

$$\overrightarrow{PS} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k},$$

La ecuación (5) da

$$d = \frac{|\overrightarrow{PS} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{\sqrt{1 + 25 + 4}}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{5}.$$ ■

Una ecuación para un plano en el espacio

Un plano en el espacio está determinado por un punto en el plano y su "inclinación" u orientación. Esta "inclinación" se define especificando un vector que es perpendicular o normal al plano.

Suponga que el plano M pasa por un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y es normal al vector no nulo $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$. Entonces, M es el conjunto de todos los puntos $P(x, y, z)$ para los cuales $\overrightarrow{P_0P}$ es ortogonal a $\mathbf{n}$ (figura 12.39). Por lo tanto, el producto punto $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$. Esta ecuación es equivalente a

$$(A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}) \cdot [(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}] = 0,$$

de manera que el plano M consta de los puntos (x, y, z) que satisfacen

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

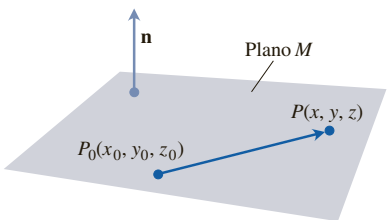


FIGURA 12.39 La ecuación estándar de un plano en el espacio está definida en términos de un vector normal al plano: un punto P se encuentra en el plano que contiene a P_0 y es normal a $\mathbf{n}$ si y sólo si $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$.

Ecuación de un plano

El plano que pasa por $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y es normal a $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ tiene

Ecuación vectorial: $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$

Ecuación cartesiana o en componentes: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

Ecuación cartesiana o en componentes simplificada: $Ax + By + Cz = D$, donde $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$

EJEMPLO 6 Obtenga una ecuación para el plano que pasa por $P_0(-3, 0, 7)$ y es perpendicular a $\mathbf{n} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Solución La ecuación en componentes es

$$5(x - (-3)) + 2(y - 0) + (-1)(z - 7) = 0.$$

Al simplificar, obtenemos

$$5x + 15 + 2y - z + 7 = 0$$
$$5x + 2y - z = -22.$$ ■

Observe en el ejemplo 6 cómo las componentes de $\mathbf{n} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ se convierten en los coeficientes de x, y y z en la ecuación $5x + 2y - z = -22$. El vector $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ es normal al plano $Ax + By + Cz = D$.

EJEMPLO 7 Obtenga una ecuación para el plano que pasa por $A(0, 0, 1)$, $B(2, 0, 0)$ y $C(0, 3, 0)$.

Solución Encontramos un vector normal al plano y lo usamos con uno de los puntos (no importa cuál) para escribir una ecuación del plano.

El producto cruz

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

es normal al plano. Sustituimos las componentes de este vector y las coordenadas de $A(0, 0, 1)$ en la ecuación en componentes para obtener

$$\begin{aligned} 3(x - 0) + 2(y - 0) + 6(z - 1) &= 0 \\ 3x + 2y + 6z &= 6. \end{aligned}$$

■

Rectas de intersección

Así como las rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma dirección, dos planos son **paralelos** si y sólo si sus vectores normales son paralelos, es decir, $\mathbf{n}_1 = k\mathbf{n}_2$ para algún escalar k. Dos planos que no son paralelos se intersecan en una recta.

EJEMPLO 8 Obtenga un vector paralelo a la recta de intersección de los planos $3x - 6y - 2z = 15$ y $2x + y - 2z = 5$.

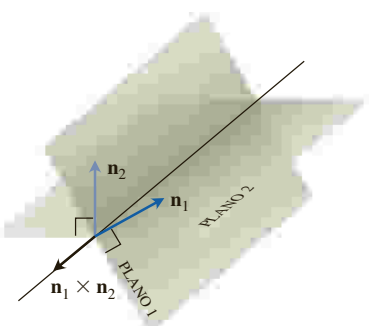


FIGURA 12.40 Relación entre la recta de intersección de dos planos y los vectores normales a tales planos (ejemplo 8).

Solución La recta de intersección de dos planos es perpendicular a los vectores normales de ambos planos $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ (figura 12.40) y, por lo tanto, es paralela a $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$. Visto de otra manera, $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ es un vector paralelo a la recta de intersección de los planos. En nuestro caso,

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -6 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 14\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 15\mathbf{k}.$$

Cualquier múltiplo escalar no nulo de $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ nos sirve igual. ■

EJEMPLO 9 Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los planos $3x - 6y - 2z = 15$ y $2x + y - 2z = 5$.

Solución Obtenemos un vector paralelo a la recta y un punto sobre la recta, y empleamos la ecuación (3).

El ejemplo 8 identifica a $\mathbf{v} = 14\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$ como un vector paralelo a la recta. Para obtener un punto sobre la recta, podemos tomar cualquier punto común a ambos planos. Con la sustitución de $z = 0$ en las ecuaciones de los planos y resolviendo simultáneamente el sistema para despejar x y y, se identifica uno de esos puntos como $(3, -1, 0)$. La recta es

$$x = 3 + 14t, \qquad y = -1 + 2t, \qquad z = 15t.$$

La elección de $z = 0$ es arbitraria y pudimos haber elegido también $z = 1$ o $z = -1$; o pudimos establecer $x = 0$ y despejar y y z. Las distintas opciones nos darían parametrizaciones diferentes de la misma recta. ■

En ocasiones queremos saber si una recta y un plano se intersecan. Por ejemplo, si estamos observando una placa delgada y un segmento de recta que la atraviesa, podemos estar interesados en saber qué porción del segmento de recta está oculto por la placa. Esta aplicación se usa en gráficas por computadora (ejercicio 74).

EJEMPLO 10 Obtenga el punto donde la recta

$$x = \frac{8}{3} + 2t, \qquad y = -2t, \qquad z = 1 + t$$

corta al plano $3x + 2y + 6z = 6$.

Solución El punto

$$\left(\frac{8}{3} + 2t, -2t, 1 + t\right)$$

se encuentra en el plano si sus coordenadas satisfacen la ecuación del plano, es decir, si

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{8}{3} + 2t\right) + 2(-2t) + 6(1 + t) &= 6 \\ 8 + 6t - 4t + 6 + 6t &= 6 \\ 8t &= -8 \\ t &= -1. \end{aligned}$$

El punto de intersección es

$$(x, y, z)\big|_{t=-1} = \left(\frac{8}{3} - 2, 2, 1 - 1\right) = \left(\frac{2}{3}, 2, 0\right). \quad \blacksquare$$

Distancia de un punto a un plano

Si P es un punto en un plano con vector normal $\mathbf{n}$, entonces, la distancia de cualquier punto S al plano es la longitud del vector proyección de $\overrightarrow{PS}$ sobre $\mathbf{n}$. Es decir, la distancia de S al plano es

$$d = \left|\overrightarrow{PS} \cdot \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}\right| \tag{6}$$

donde $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ es normal al plano.

EJEMPLO 11 Obtenga la distancia de $S(1, 1, 3)$ al plano $3x + 2y + 6z = 6$.

Solución Obtenemos un punto P en el plano y calculamos la longitud del vector proyección de $\overrightarrow{PS}$ sobre un vector $\mathbf{n}$ normal al plano (figura 12.41). Los coeficientes de la ecuación $3x + 2y + 6z = 6$ dan

$$\mathbf{n} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}.$$

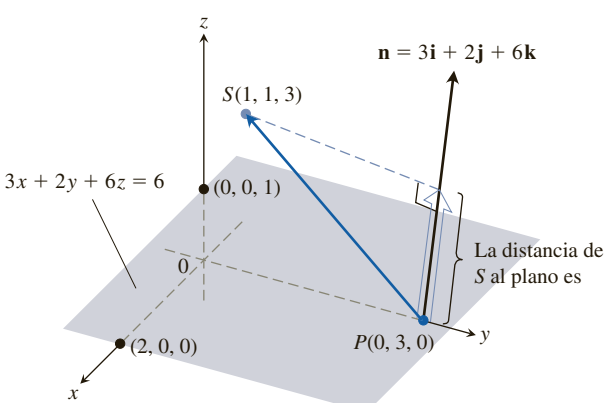


FIGURA 12.41 La distancia de S al plano es la longitud del vector proyección de $\overrightarrow{PS}$ sobre $\mathbf{n}$ (ejemplo 11).

Los puntos del plano que son más fáciles de encontrar a partir de su ecuación son las intersecciones con los ejes. Si tomamos P como la intersección del plano con el eje y $(0, 3, 0)$, entonces,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PS} &= (1 - 0)\mathbf{i} + (1 - 3)\mathbf{j} + (3 - 0)\mathbf{k} \\ &= \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \\ |\mathbf{n}| &= \sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (6)^2} = \sqrt{49} = 7.\end{aligned}$$

La distancia de S al plano es

$$\begin{aligned}d &= \left|\overrightarrow{PS} \cdot \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}\right| \qquad \text{Longitud de } \operatorname{proy}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{PS} \\ &= \left|(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{3}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}\right)\right| \\ &= \left|\frac{3}{7} - \frac{4}{7} + \frac{18}{7}\right| = \frac{17}{7}.\end{aligned}$$

■

Ángulo entre planos

El ángulo entre dos planos que se intersecan está definido como el ángulo agudo entre sus vectores normales (figura 12.42).

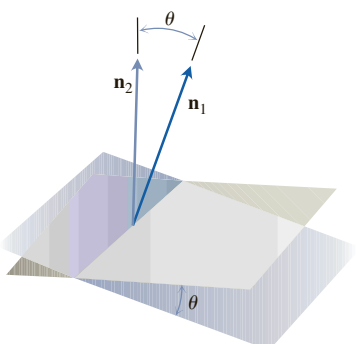


FIGURA 12.42 El ángulo entre dos planos se obtiene a partir del ángulo entre sus normales.

EJEMPLO 12 Obtenga el ángulo entre los planos $3x - 6y - 2z = 15$ y $2x + y - 2z = 5$.

Solución Los vectores

$$\mathbf{n}_1 = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \qquad \mathbf{n}_2 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

son normales a los planos. El ángulo entre ellos es

$$\begin{aligned}\theta &= \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|}\right) \\ &= \cos^{-1}\left(\frac{4}{21}\right) \\ &\approx 1.38 \text{ radianes.} \qquad \text{Aproximadamente 79 grados}\end{aligned}$$

■

Ejercicios 12.5

Rectas y segmentos de recta

Obtenga las ecuaciones paramétricas de las rectas de los ejercicios 1 a 12.

1. La recta que pasa por el punto $P(3, -4, -1)$ y que es paralela al vector $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
2. La recta que pasa por $P(1, 2, -1)$ y $Q(-1, 0, 1)$
3. La recta que pasa por $P(-2, 0, 3)$ y $Q(3, 5, -2)$
4. La recta que pasa por $P(1, 2, 0)$ y $Q(1, 1, -1)$
5. La recta que pasa por el origen y es paralela al vector $2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
6. La recta que pasa por el punto $(3, -2, 1)$ y es paralela a la recta $x = 1 + 2t$, $y = 2 - t$, $z = 3t$
7. La recta que pasa por $(1, 1, 1)$ y es paralela al eje z
8. La recta que pasa por $(2, 4, 5)$ y es perpendicular al plano $3x + 7y - 5z = 21$
9. La recta que pasa por $(0, -7, 0)$ y es perpendicular al plano $x + 2y + 2z = 13$
10. La recta que pasa por $(2, 3, 0)$ y es perpendicular a los vectores $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$
11. El eje x
12. El eje z

Obtenga las parametrizaciones de los segmentos de recta que unen los puntos dados en cada uno de los ejercicios 13 a 20. Dibuje los ejes de coordenadas y trace cada segmento, indicando la dirección en que aumenta t para la parametrización seleccionada.

13. $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 3/2)$
14. $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$
15. $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$
16. $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$
17. $(0, 1, 1)$, $(0, -1, 1)$
18. $(0, 2, 0)$, $(3, 0, 0)$
19. $(2, 0, 2)$, $(0, 2, 0)$
20. $(1, 0, -1)$, $(0, 3, 0)$

Planos

Obtenga las ecuaciones de los planos en los ejercicios 21 a 26.

21. El plano que pasa por $P_0(0, 2, -1)$ y es normal a $\mathbf{n} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

22. El plano que pasa por $(1, -1, 3)$ y es paralelo al plano

$$3x + y + z = 7$$

23. El plano que pasa por $(1, 1, -1)$, $(2, 0, 2)$ y $(0, -2, 1)$

24. El plano que pasa por $(2, 4, 5)$, $(1, 5, 7)$ y $(-1, 6, 8)$

25. El plano que pasa por $P_0(2, 4, 5)$ y es perpendicular a la recta

$$x = 5 + t, \quad y = 1 + 3t, \quad z = 4t$$

26. El plano que pasa por $A(1, -2, 1)$ y es perpendicular al vector que va del origen a A

27. Obtenga el punto de intersección de las rectas $x = 2t + 1$, $y = 3t + 2$, $z = 4t + 3$ y $x = s + 2$, $y = 2s + 4$, $z = -4s - 1$; luego, encuentre el plano determinado por estas rectas.

28. Obtenga el punto de intersección de las rectas $x = t$, $y = -t + 2$, $z = t + 1$ y $x = 2s + 2$, $y = s + 3$, $z = 5s + 6$; luego, encuentre el plano determinado por estas rectas.

En los ejercicios 29 y 30, obtenga el plano que incluye las rectas que se intersecan.

29. $L1: x = -1 + t, \quad y = 2 + t, \quad z = 1 - t; \quad -\infty < t < \infty$
$L2: x = 1 - 4s, \quad y = 1 + 2s, \quad z = 2 - 2s; \quad -\infty < s < \infty$

30. $L1: x = t, \quad y = 3 - 3t, \quad z = -2 - t; \quad -\infty < t < \infty$
$L2: x = 1 + s, \quad y = 4 + s, \quad z = -1 + s; \quad -\infty < s < \infty$

31. Determine el plano que pasa por $P_0(2, 1, -1)$ y es perpendicular a la recta de intersección de los planos $2x + y - z = 3$, $x + 2y + z = 2$.

32. Obtenga el plano que pasa por los puntos $P_1(1, 2, 3)$, $P_2(3, 2, 1)$ y es perpendicular al plano $4x - y + 2z = 7$.

Distancias

En los ejercicios 33 a 38, obtenga la distancia del punto a la recta.

33. $(0, 0, 12); \quad x = 4t, \quad y = -2t, \quad z = 2t$

34. $(0, 0, 0); \quad x = 5 + 3t, \quad y = 5 + 4t, \quad z = -3 - 5t$

35. $(2, 1, 3); \quad x = 2 + 2t, \quad y = 1 + 6t, \quad z = 3$

36. $(2, 1, -1); \quad x = 2t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = 2t$

37. $(3, -1, 4); \quad x = 4 - t, \quad y = 3 + 2t, \quad z = -5 + 3t$

38. $(-1, 4, 3); \quad x = 10 + 4t, \quad y = -3, \quad z = 4t$

En los ejercicios 39 a 44, obtenga la distancia del punto al plano.

39. $(2, -3, 4), \quad x + 2y + 2z = 13$

40. $(0, 0, 0), \quad 3x + 2y + 6z = 6$

41. $(0, 1, 1), \quad 4y + 3z = -12$

42. $(2, 2, 3), \quad 2x + y + 2z = 4$

43. $(0, -1, 0), \quad 2x + y + 2z = 4$

44. $(1, 0, -1), \quad -4x + y + z = 4$

45. Obtenga la distancia del plano $x + 2y + 6z = 1$ al plano $x + 2y + 6z = 10$.

46. Calcule la distancia de la recta $x = 2 + t$, $y = 1 + t$, $z = -(1/2) - (1/2)t$ al plano $x + 2y + 6z = 10$.

Ángulos

Calcule los ángulos entre los planos de los ejercicios 47 y 48.

47. $x + y = 1, \quad 2x + y - 2z = 2$

48. $5x + y - z = 10, \quad x - 2y + 3z = -1$

T Use una calculadora para determinar los ángulos agudos entre los planos de los ejercicios 49 a 52, con una precisión de una centésima de radián.

49. $2x + 2y + 2z = 3, \quad 2x - 2y - z = 5$

50. $x + y + z = 1, \quad z = 0$ (el plano xy)

51. $2x + 2y - z = 3, \quad x + 2y + z = 2$

52. $4y + 3z = -12, \quad 3x + 2y + 6z = 6$

Intersecciones de rectas y planos

En los ejercicios 53 a 56, obtenga el punto en el cual la recta encuentra al plano.

53. $x = 1 - t, \quad y = 3t, \quad z = 1 + t; \quad 2x - y + 3z = 6$

54. $x = 2, \quad y = 3 + 2t, \quad z = -2 - 2t; \quad 6x + 3y - 4z = -12$

55. $x = 1 + 2t, \quad y = 1 + 5t, \quad z = 3t; \quad x + y + z = 2$

56. $x = -1 + 3t, \quad y = -2, \quad z = 5t; \quad 2x - 3z = 7$

Obtenga parametrizaciones de las rectas en las cuales se intersecan los planos de los ejercicios 57 a 60.

57. $x + y + z = 1, \quad x + y = 2$

58. $3x - 6y - 2z = 3, \quad 2x + y - 2z = 2$

59. $x - 2y + 4z = 2, \quad x + y - 2z = 5$

60. $5x - 2y = 11, \quad 4y - 5z = -17$

Dadas dos rectas en el espacio, es posible que sean paralelas, o se intersequen, o sean sesgadas (se encuentran en planos paralelos). En los ejercicios 61 y 62 determine si las rectas, tomadas por pares, son paralelas, se cortan o son sesgadas. Si se cortan, determine el punto de intersección. De otra forma, determine la distancia entre las dos rectas.

61. $L1: x = 3 + 2t, \ y = -1 + 4t, \ z = 2 - t; \quad -\infty < t < \infty$
$L2: x = 1 + 4s, \ y = 1 + 2s, \ z = -3 + 4s; \quad -\infty < s < \infty$
$L3: x = 3 + 2r, \ y = 2 + r, \ z = -2 + 2r; \quad -\infty < r < \infty$

62. $L1: x = 1 + 2t, \quad y = -1 - t, \quad z = 3t; \quad -\infty < t < \infty$
$L2: x = 2 - s, \quad y = 3s, \quad z = 1 + s; \quad -\infty < s < \infty$
$L3: x = 5 + 2r, \quad y = 1 - r, \quad z = 8 + 3r; \quad -\infty < r < \infty$

Teoría y ejemplos

63. Use las ecuaciones (3) para generar una parametrización de la recta que pasa por $P(2, -4, 7)$ y que es paralela a $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Luego, genere otra parametrización de la recta usando el punto $P_2(-2, -2, 1)$ y el vector $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{i} + (1/2)\mathbf{j} - (3/2)\mathbf{k}$.

64. Use la ecuación en componentes para obtener una ecuación del plano que pasa por $P_1(4, 1, 5)$ y es normal a $\mathbf{n}_1 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Luego, obtenga otra ecuación para el mismo plano usando el punto $P_2(3, -2, 0)$ y el vector normal $\mathbf{n}_2 = -\sqrt{2}\mathbf{i} + 2\sqrt{2}\mathbf{j} - \sqrt{2}\mathbf{k}$.

65. Obtenga los puntos donde la recta $x = 1 + 2t$, $y = -1 - t$, $z = 3t$ corta los planos de coordenadas. Explique el razonamiento que lo condujo a su respuesta.

66. Determine las ecuaciones de la recta en el plano $z = 3$ que forma un ángulo de $\pi/6$ radianes con $\mathbf{i}$, y un ángulo de $\pi/3$ radianes con $\mathbf{j}$. Explique el razonamiento que lo condujo a su respuesta.

67. ¿Es cierto que la recta $x = 1 - 2t$, $y = 2 + 5t$, $z = -3t$ es paralela al plano $2x + y - z = 8$? Justifique su respuesta.

68. ¿Cómo podría saber si dos planos $A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ y $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$ son paralelos o perpendiculares? Justifique su respuesta.

69. Obtenga dos planos distintos cuya intersección sea la recta $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 3 + 2t$. Escriba las ecuaciones para cada plano en la forma $Ax + By + Cz = D$.

70. Encuentre el plano que pasa por el origen y es perpendicular al plano M: $2x + 3y + z = 12$ en un ángulo recto. ¿Cómo sabe que su plano es perpendicular a M?

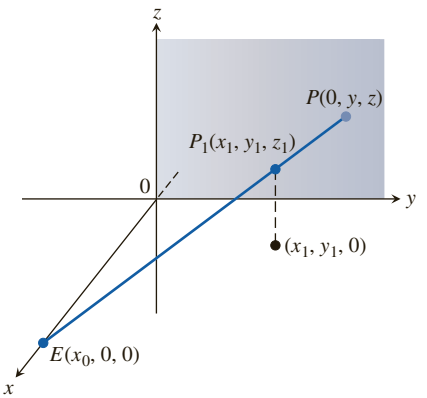
71. La gráfica de $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$ es un plano para cualesquiera números distintos de cero a, b y c. ¿Cuáles planos tienen una ecuación de esta forma?

72. Suponga que L_1 y L_2 son rectas no paralelas disjuntas (es decir, que no se intersecan). ¿Es posible que un vector no nulo sea perpendicular a ambas? Justifique su respuesta.

73. La perspectiva en graficación por computadora En los gráficos por computadora y el dibujo en perspectiva, necesitamos representar objetos vistos por el ojo en el espacio como imágenes en un plano bidimensional. Suponga que el ojo está en $E(x_0, 0, 0)$, como se muestra en la figura, y que queremos representar un punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ como un punto sobre el plano yz. Hacemos esto proyectando P_1 sobre el plano con un rayo que parte de E. El punto P_1 se representa mediante el punto $P(0, y, z)$. El problema para nosotros como diseñadores de gráficos es encontrar y y z dados E y P_1.

a) Escriba una ecuación vectorial que sea válida entre $\overrightarrow{EP}$ y $\overrightarrow{EP}_1$. Use esta ecuación para expresar y y z en términos de x_0, x_1, y_1 y z_1.

b) Compruebe las fórmulas obtenidas para y y z en el inciso *a)*, investigando su comportamiento en $x_1 = 0$ y $x_1 = x_0$, y viendo qué sucede cuando $x_0 \to \infty$. ¿Qué encontró?



74. Rectas ocultas en graficación por computadora Éste es otro problema común en la graficación por computadora. Su ojo está en (4, 0, 0). Usted está observando una placa triangular cuyos vértices están en (1, 0, 1), (1, 1, 0) y (−2, 2, 2). El segmento de recta de (1, 0, 0) a (0, 2, 2) pasa por la placa. ¿Qué porción del segmento de recta está oculto a su vista por la placa? (Éste es un ejercicio de localización de intersecciones de rectas y planos).

12.6 Cilindros y superficies cuádricas

Hasta ahora hemos estudiado dos tipos especiales de superficies: esferas y planos. En esta sección ampliaremos nuestro inventario para incluir una variedad de cilindros y superficies cuádricas. Las superficies cuádricas son superficies definidas por ecuaciones de segundo grado en x, y y z. Las esferas son superficies cuádricas, pero hay otras de igual interés que serán necesarias en los capítulos 14 a 16.

Cilindros

Un **cilindro** es una superficie que se genera por el movimiento de una línea recta paralela a una recta fija dada a lo largo de una curva plana dada. La curva se llama **curva generatriz** del cilindro (figura 12.43). En geometría sólida, donde *cilindro* significa *cilindro circular*, las curvas generatrices son circunferencias, pero ahora permitimos curvas generatrices de cualquier tipo. El cilindro de nuestro primer ejemplo es generado por una parábola.

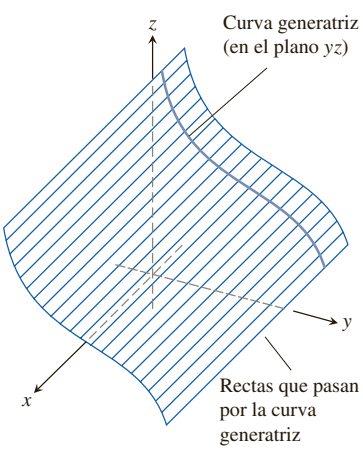


FIGURA 12.43 Cilindro y curva generatriz.

EJEMPLO 1 Obtenga una ecuación para el cilindro formado por las rectas paralelas al eje z que pasan por la parábola $y = x^2$, $z = 0$ (figura 12.44).

Solución El punto $P_0(x_0, x_0^2, 0)$ se encuentra en la parábola $y = x^2$ en el plano xy. Entonces, para cualquier valor de z, el punto $Q(x_0, x_0^2, z)$ estará en el cilindro porque se encuentra en la recta $x = x_0$, $y = x_0^2$ que pasa por P_0 y es paralela al eje z. Recíprocamente, cualquier punto $Q(x_0, x_0^2, z)$, cuya coordenada y sea el cuadrado de su coordenada x, está sobre el cilindro, ya que se encuentra sobre la recta $x = x_0$, $y = x_0^2$ que pasa por P_0 y es paralela al eje z (figura 12.44).

Sin importar el valor de z, los puntos sobre la superficie son aquéllos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $y = x^2$. Esto hace de $y = x^2$ una ecuación adecuada para el cilindro. Debido a esto, el cilindro en cuestión se identifica como "el cilindro $y = x^2$". ■

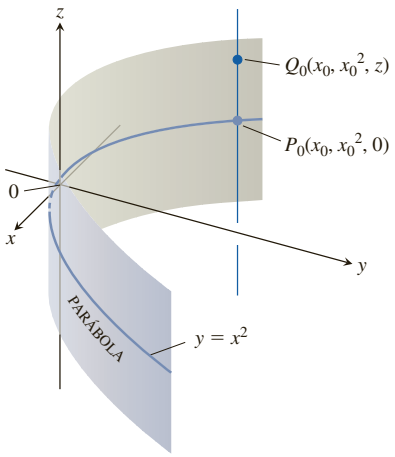


FIGURA 12.44 Todos los puntos del cilindro del ejemplo 1 tienen coordenadas de la forma (x_0, x_0^2, z). Le llamamos "el cilindro $y = x^2$".

Como sugiere el ejemplo 1, cualquier curva $f(x, y) = c$ en el plano xy define un cilindro paralelo al eje z, cuya ecuación también es $f(x, y) = c$. Por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ define el cilindro circular formado por las rectas paralelas al eje z que pasan por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el plano xy.

De un modo similar, cualquier curva $g(x, z) = c$ en el plano xz define un cilindro paralelo al eje y cuya ecuación espacial también es $g(x, z) = c$. Cualquier curva $h(y, z) = c$ define un cilindro paralelo al eje x cuya ecuación espacial también es $h(y, z) = c$. Sin embargo, el eje de un cilindro no necesita ser paralelo a un eje de coordenadas.

Superficies cuádricas

Una **superficie cuádrica** es la gráfica en el espacio de una ecuación de segundo grado en x, y y z. En esta sección estudiaremos superficies cuádricas mediante la ecuación

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dz = E,$$

donde A, B, C, D y E son constantes. Las superficies cuádricas básicas son los **elipsoides**, los **paraboloides**, los **conos elípticos** y los **hiperboloides**. Las esferas son casos especiales de los elipsoides. Daremos unos cuantos ejemplos para ilustrar cómo dibujar una superficie cuádrica y, luego, presentaremos una tabla de gráficas en la que se resumen los tipos básicos.

EJEMPLO 2 El **elipsoide**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{2} = 1$$

(figura 12.45) corta los ejes de coordenadas en $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$ y $(0, 0, \pm c)$. Se encuentra dentro de la caja rectangular definida por las desigualdades $|x| \le a, |y| \le b, |z| \le c$. La superficie es simétrica con respecto a cada uno de los planos de coordenadas porque, en la ecuación que la define, cada variable está elevada al cuadrado.

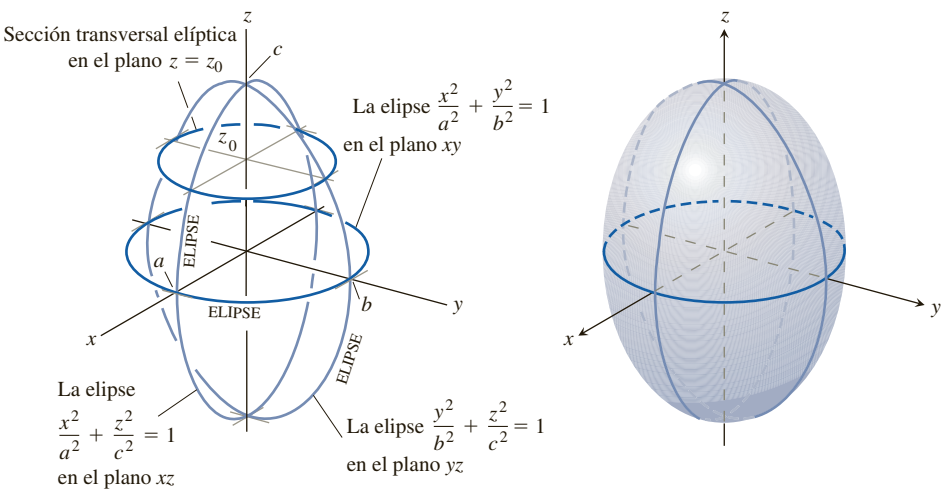


FIGURA 12.45 El elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

del ejemplo 2 tiene secciones transversales elípticas en cada uno de los tres planos de coordenadas.

Las curvas donde los tres planos de coordenadas cortan a la superficie son elipses. Por ejemplo,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{cuando} \quad z = 0.$$

La curva cortada a la superficie por el plano $z = z_0$, $|z_0| < c$, es la elipse

$$\frac{x^2}{a^2(1 - (z_0/c)^2)} + \frac{y^2}{b^2(1 - (z_0/c)^2)} = 1.$$

Si cualesquiera dos de los semiejes a, b y c son iguales entre sí, la superficie es un **elipsoide de revolución**. Si los tres semiejes son iguales, la superficie es una esfera. ■

EJEMPLO 3 El **paraboloide hiperbólico**

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}, \qquad c > 0$$

tiene simetría con respecto a los planos $x = 0$ y $y = 0$ (figura 12.46). Las secciones transversales en estos planos son

$$x = 0: \quad \text{la parábola } z = \frac{c}{b^2}y^2. \tag{1}$$

$$y = 0: \quad \text{la parábola } z = -\frac{c}{a^2}x^2. \tag{2}$$

En el plano $x = 0$, la parábola se abre hacia arriba a partir del origen. La parábola en el plano $y = 0$ se abre hacia abajo.

Si cortamos la superficie con un plano $z = z_0 > 0$, la sección transversal es una hipérbola,

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z_0}{c},$$

con su eje focal paralelo al eje y y sus vértices sobre la parábola de la ecuación (1). Si z_0 es negativo, el eje focal es paralelo al eje x y los vértices se encuentran sobre la parábola de la ecuación (2).

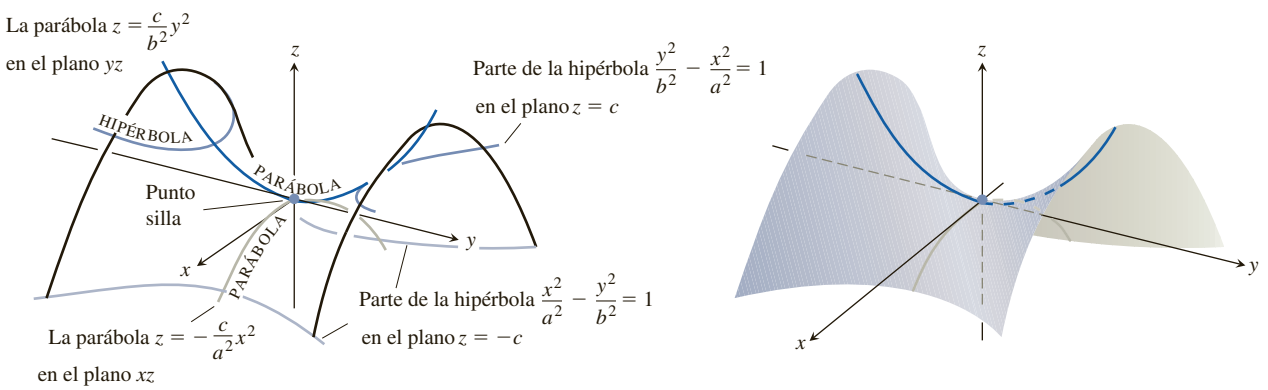
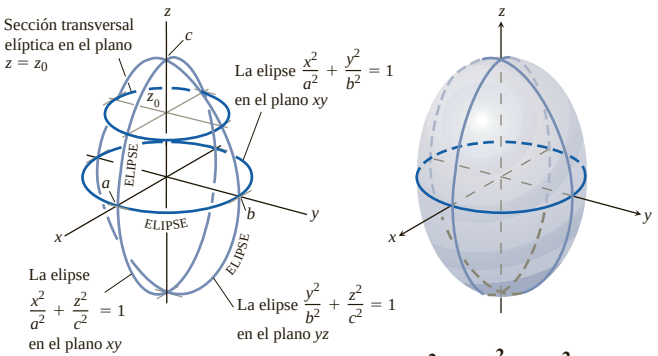


FIGURA 12.46 El paraboloide hiperbólico $(y^2/b^2) - (x^2/a^2) = z/c$, $c > 0$. Las secciones transversales en planos perpendiculares al eje z por arriba y por abajo del plano xy son hipérbolas. Las secciones transversales en planos perpendiculares a los otros ejes son parábolas.

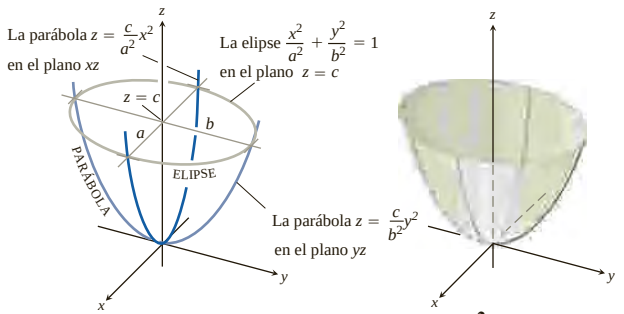
Cerca del origen, la superficie tiene la forma de una silla de montar o de un paso de montaña. Para una persona que viaja lo largo de la superficie en el plano yz, el origen parece un mínimo, pero para alguien que viaja en el plano xz, el origen parece un máximo. Este tipo de punto se llama **punto silla** de una superficie. Diremos más acerca de puntos silla en la sección 14.7. ■

La tabla 12.1 muestra las gráficas de los seis tipos básicos de superficies cuádricas. Cada superficie mostrada es simétrica con respecto al eje z, pero otros ejes de coordenadas pueden servir también (con los cambios pertinentes en la ecuación).

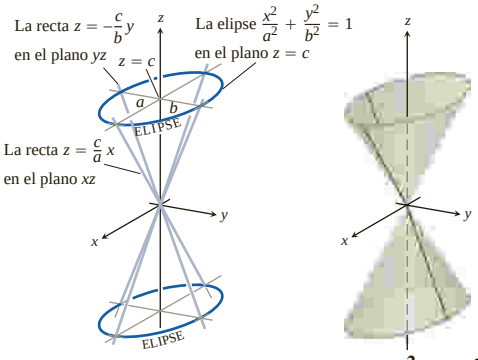
TABLA 12.1 Gráficas de superficies cuádricas



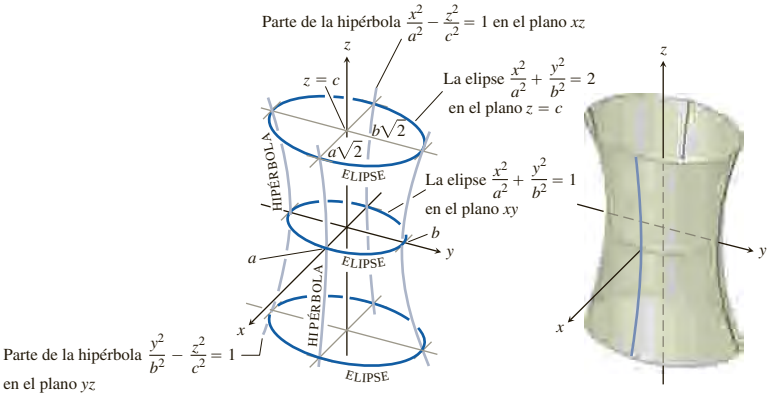
ELIPSOIDE $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



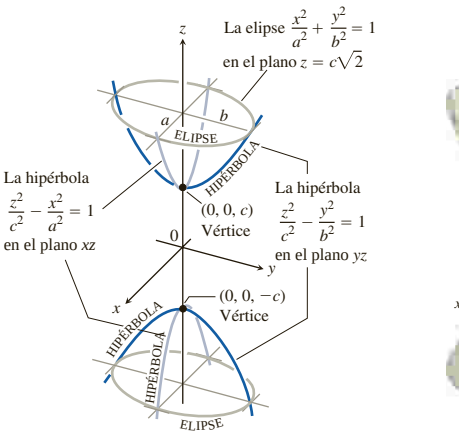
PARABOLOIDE ELÍPTICO $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$



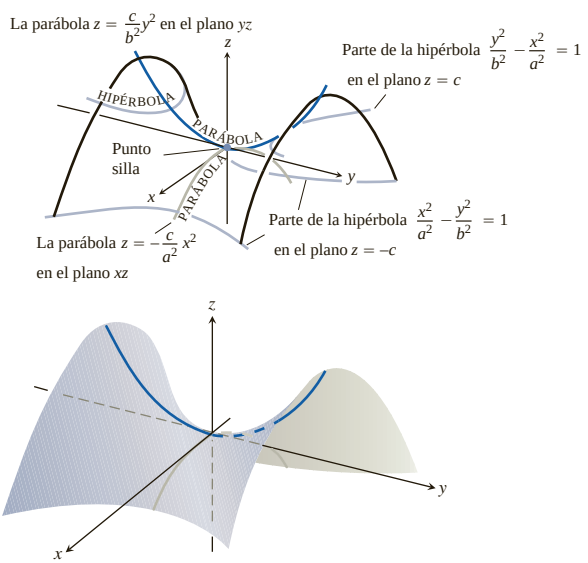
CONO ELÍPTICO $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$



HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



PARABOLOIDE HIPERBÓLICO $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}, c > 0$

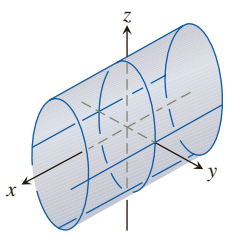
Ejercicios 12.6

Asociar ecuaciones con superficies

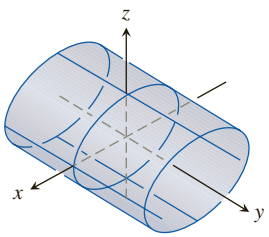
En los ejercicios 1 a 12, asocie la ecuación con la superficie que ésta define. También identifique cada superficie por su tipo (paraboloide, elipsoide, etcétera). Las superficies están designadas de la *a*) a la *l*).

1. $x^2 + y^2 + 4z^2 = 10$
2. $z^2 + 4y^2 - 4x^2 = 4$
3. $9y^2 + z^2 = 16$
4. $y^2 + z^2 = x^2$
5. $x = y^2 - z^2$
6. $x = -y^2 - z^2$
7. $x^2 + 2z^2 = 8$
8. $z^2 + x^2 - y^2 = 1$
9. $x = z^2 - y^2$
10. $z = -4x^2 - y^2$
11. $x^2 + 4z^2 = y^2$
12. $9x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 36$

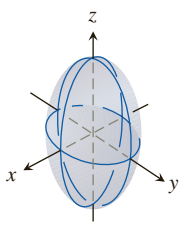
a)



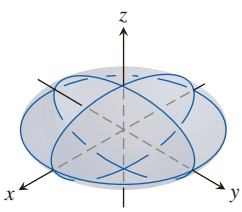
b)



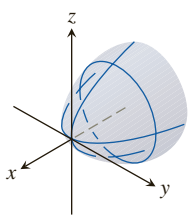
c)



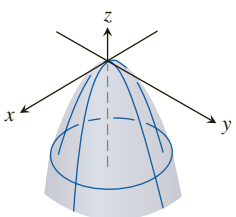
d)



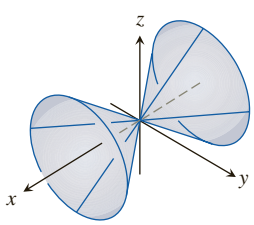
e)



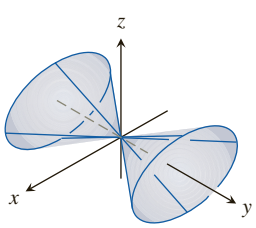
f)



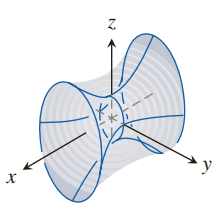
g)



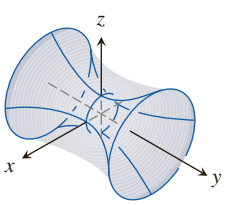
h)



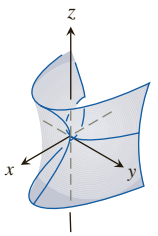
i)



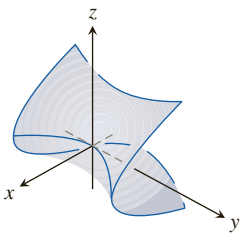
j)



k)



l)



Trazado de superficies

Trace las superficies de los ejercicios 13 a 44.

CILINDROS

13. $x^2 + y^2 = 4$
14. $z = y^2 - 1$
15. $x^2 + 4z^2 = 16$
16. $4x^2 + y^2 = 36$

ELIPSOIDES

17. $9x^2 + y^2 + z^2 = 9$
18. $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$
19. $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$
20. $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36$

PARABOLOIDES Y CONOS

21. $z = x^2 + 4y^2$
22. $z = 8 - x^2 - y^2$
23. $x = 4 - 4y^2 - z^2$
24. $y = 1 - x^2 - z^2$
25. $x^2 + y^2 = z^2$
26. $4x^2 + 9z^2 = 9y^2$

HIPERBOLOIDES

27. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$
28. $y^2 + z^2 - x^2 = 1$
29. $z^2 - x^2 - y^2 = 1$
30. $(y^2/4) - (x^2/4) - z^2 = 1$

PARABOLOIDES HIPERBÓLICOS

31. $y^2 - x^2 = z$
32. $x^2 - y^2 = z$

DIVERSAS

33. $z = 1 + y^2 - x^2$
34. $4x^2 + 4y^2 = z^2$
35. $y = -(x^2 + z^2)$
36. $16x^2 + 4y^2 = 1$
37. $x^2 + y^2 - z^2 = 4$
38. $x^2 + z^2 = y$
39. $x^2 + z^2 = 1$
40. $16y^2 + 9z^2 = 4x^2$
41. $z = -(x^2 + y^2)$
42. $y^2 - x^2 - z^2 = 1$
43. $4y^2 + z^2 - 4x^2 = 4$
44. $x^2 + y^2 = z$

Teoría y ejemplos

45. ***a)*** Exprese el área A de la sección transversal cortada del elipsoide

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$

por el plano $z = c$ como una función de c. (El área de una elipse con semiejes a y b es πab).

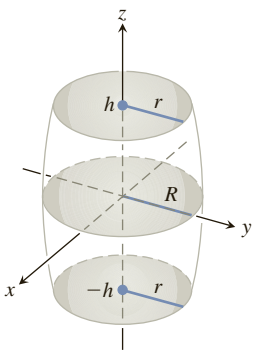
b) Use cortes perpendiculares al eje z para obtener el volumen del elipsoide del inciso *a*).

c) Ahora obtenga el volumen del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

¿Su fórmula permite obtener el volumen de una esfera de radio a si $a = b = c$?

46. El barril que se ilustra en la figura tiene la forma de un elipsoide, con piezas iguales cortadas desde los extremos por planos perpendiculares al eje z. Las secciones transversales perpendiculares al eje z son circulares. El barril tiene $2h$ unidades de altura, el radio de la sección media es R, y el radio de sus dos extremos es r. Obtenga una fórmula para el volumen del barril. Luego, verifique dos cuestiones. Primero, suponga que los lados del barril se enderezan hasta convertirlo en un cilindro de radio R y altura $2h$. ¿Su fórmula permite obtener el volumen del cilindro? Segundo, suponga que $r = 0$ y $h = R$, de manera que el barril es una esfera. ¿Su fórmula permite obtener el volumen de la esfera?



47. Demuestre que el volumen del segmento cortado de un paraboloide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

por el plano $z = h$ es igual a la mitad de la base del segmento por la altura.

48. ***a)*** Obtenga el volumen del sólido limitado por el hiperboloide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

y los planos $z = 0$ y $z = h$, $h > 0$.

b) Exprese la respuesta del inciso *a)* en términos de h y las áreas A_0 y A_h de las regiones cortadas por el hiperboloide con los planos $z = 0$ y $z = h$.

c) Demuestre que el volumen del inciso *a)* también se obtiene mediante la fórmula

$$V = \frac{h}{6}(A_0 + 4A_m + A_h),$$

donde A_m es el área de la región cortada por el hiperboloide con el plano $z = h/2$.

Visualización de superficies

T Grafique las superficies de los ejercicios 49 a 52 en los dominios indicados. Si es posible, gire la superficie para obtener varias perspectivas.

49. $z = y^2, \quad -2 \le x \le 2, \quad -0.5 \le y \le 2$

50. $z = 1 - y^2, \quad -2 \le x \le 2, \quad -2 \le y \le 2$

51. $z = x^2 + y^2, \quad -3 \le x \le 3, \quad -3 \le y \le 3$

52. $z = x^2 + 2y^2$ sobre

a) $-3 \le x \le 3, \quad -3 \le y \le 3$

b) $-1 \le x \le 1, \quad -2 \le y \le 3$

c) $-2 \le x \le 2, \quad -2 \le y \le 2$

d) $-2 \le x \le 2, \quad -1 \le y \le 1$

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Use un software matemático para graficar las superficies de los ejercicios 53 a 58. Identifique el tipo de superficie cuádrica mediante la gráfica.

53. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1 - \frac{z^2}{25}$

54. $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{9} = 1 - \frac{y^2}{16}$

55. $5x^2 = z^2 - 3y^2$

56. $\frac{y^2}{16} = 1 - \frac{x^2}{9} + z$

57. $\frac{x^2}{9} - 1 = \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{2}$

58. $y - \sqrt{4 - z^2} = 0$

Capítulo 12 Preguntas de repaso

1. ¿En qué casos los segmentos de recta dirigidos en el plano representan al mismo vector?

2. ¿Cómo se suman y restan geométricamente los vectores? ¿Y algebraicamente?

3. ¿Cómo se obtienen la magnitud y la dirección de un vector?

4. Si un vector se multiplica por un escalar positivo, ¿cuál es la relación del resultado con el vector original? ¿Qué ocurre si el escalar es cero? ¿Y si es negativo?

5. Defina el *producto punto* (o *producto escalar*) de dos vectores. ¿Cuáles leyes algebraicas satisface el producto punto? Dé ejemplos. ¿En qué casos el producto de dos vectores es igual a cero?

6. ¿Cuál es la interpretación geométrica del producto punto? Dé ejemplos.

7. ¿Cuál es el vector proyección de un vector $\mathbf{u}$ sobre un vector $\mathbf{v}$? Dé un ejemplo de una aplicación útil de un vector proyección.

8. Defina el *producto cruz* (*producto vectorial*) de dos vectores. ¿Cuáles leyes algebraicas satisface el producto cruz, y cuáles no? Dé ejemplos. ¿En qué casos el producto cruz de dos vectores es igual a cero?

9. ¿Qué interpretaciones geométricas o físicas tiene el producto cruz? Dé ejemplos.

10. ¿Cuál es la fórmula del determinante para calcular el producto cruz de dos vectores en relación con el sistema de coordenadas cartesiano $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$? Utilícela en un ejemplo.

11. ¿Cómo obtiene las ecuaciones de rectas, segmentos de recta y planos en el espacio? Dé ejemplos. ¿Puede representar una recta en el espacio con una ecuación particular? ¿Y en un plano?

12. ¿Cómo se obtiene la distancia de un punto a una recta en el espacio? ¿Y de un punto a un plano? Dé ejemplos.

13. ¿Qué son los productos caja? ¿Qué significado tienen? ¿Cómo se calculan? Dé un ejemplo.

14. ¿Cómo se determina la ecuación de una esfera en el espacio? Dé ejemplos.

15. ¿Cómo obtiene la intersección de dos rectas en el espacio? ¿Y de una recta y un plano? ¿De dos planos? Dé ejemplos.

16. ¿Qué es un cilindro? Dé ejemplos de ecuaciones que definan cilindros en coordenadas cartesianas.

17. ¿Qué son las superficies cuádricas? Dé ejemplos de diferentes clases de elipsoides, paraboloides, conos e hiperboloides (ecuaciones y gráficas).

Capítulo 12 Ejercicios de práctica

Cálculos con vectores en dos dimensiones

En los ejercicios 1 a 4, sean $\mathbf{u} = \langle -3, 4\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 2, -5\rangle$. Obtenga ***a)*** la expresión en componentes del vector y ***b)*** su magnitud.

1. $3\mathbf{u} - 4\mathbf{v}$ **2.** $\mathbf{u} + \mathbf{v}$

3. $-2\mathbf{u}$ **4.** $5\mathbf{v}$

En los ejercicios 5 a 8, obtenga la expresión en componentes de los vectores descritos.

5. El vector que se obtiene al hacer girar $\langle 0, 1\rangle$ un ángulo de $2\pi/3$ radianes

6. El vector unitario que forma un ángulo de $\pi/6$ radianes con el eje x positivo

7. El vector de 2 unidades de longitud en la dirección $4\mathbf{i} - \mathbf{j}$

8. El vector de 5 unidades de longitud en dirección opuesta a la dirección de $(3/5)\mathbf{i} + (4/5)\mathbf{j}$

Exprese los vectores de los ejercicios 9 a 12 en términos de sus longitudes y direcciones.

9. $\sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j}$ **10.** $-\mathbf{i} - \mathbf{j}$

11. Vector de velocidad $\mathbf{v} = (-2 \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (2 \cos t)\mathbf{j}$ cuando $t = \pi/2$.

12. Vector de velocidad $\mathbf{v} = (e^t \cos t - e^t \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t)\mathbf{j}$ cuando $t = \ln 2$.

Cálculo con vectores en tres dimensiones

Exprese los vectores de los ejercicios 13 y 14 en términos de sus longitudes y direcciones.

13. $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ **14.** $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

15. Obtenga un vector de 2 unidades de longitud en la dirección de $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

16. Obtenga un vector de 5 unidades de longitud en dirección opuesta a la dirección de $\mathbf{v} = (3/5)\mathbf{i} + (4/5)\mathbf{k}$.

En los ejercicios 17 y 18, obtenga $|\mathbf{v}|$, $|\mathbf{u}|$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, $|\mathbf{v} \times \mathbf{u}|$, el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}$, la componente escalar de $\mathbf{u}$ en la dirección de $\mathbf{v}$, y el vector proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$.

17. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

18. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = -\mathbf{i} - \mathbf{k}$

En los ejercicios 19 y 20, obtenga $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$.

19. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

20. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

En los ejercicios 21 y 22, dibuje los ejes de coordenadas y, luego, grafique $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ como vectores en el origen.

21. $\mathbf{u} = \mathbf{i}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ **22.** $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

23. Si $|\mathbf{v}| = 2$, $|\mathbf{w}| = 3$, y el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es $\pi/3$, obtenga $|\mathbf{v} - 2\mathbf{w}|$.

24. ¿Para cuál valor o valores de a serán paralelos los vectores $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + a\mathbf{k}$?

En los ejercicios 25 y 26, obtenga ***a)*** el área del paralelogramo determinado por los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, y ***b)*** el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

25. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{w} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

26. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

Rectas, planos y distancias

27. Suponga que $\mathbf{n}$ es normal a un plano y que $\mathbf{v}$ es paralelo al mismo plano. Describa cómo encontraría un vector $\mathbf{n}$ que sea, a la vez, perpendicular a $\mathbf{v}$ y paralelo al plano.

28. Determine un vector en el plano, paralelo a la recta $ax + by = c$.

En los ejercicios 29 y 30, calcule la distancia del punto a la recta.

29. $(2, 2, 0)$; $x = -t$, $y = t$, $z = -1 + t$

30. $(0, 4, 1)$; $x = 2 + t$, $y = 2 + t$, $z = t$

31. Parametrice la recta que pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y que es paralela al vector $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 7\mathbf{k}$.

32. Parametrice el segmento de recta que une los puntos $P(1, 2, 0)$ y $Q(1, 3, -1)$.

En los ejercicios 33 y 34, obtenga la distancia del punto al plano.

33. $(6, 0, -6)$, $x - y = 4$

34. $(3, 0, 10)$, $2x + 3y + z = 2$

35. Determine una ecuación del plano que pasa por el punto $(3, -2, 1)$ y que es normal al vector $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

36. Obtenga una ecuación del plano que pasa por el punto $(-1, 6, 0)$ y que es perpendicular a la recta $x = -1 + t$, $y = 6 - 2t$, $z = 3t$.

En los ejercicios 37 y 38, encuentre una ecuación del plano que pasa por los puntos P, Q y R.

37. $P(1, -1, 2)$, $Q(2, 1, 3)$, $R(-1, 2, -1)$

38. $P(1, 0, 0)$, $Q(0, 1, 0)$, $R(0, 0, 1)$

39. Obtenga los puntos donde la recta $x = 1 + 2t$, $y = -1 - t$, $z = 3t$ corta los tres planos de coordenadas.

40. Encuentre el punto en el cual la recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano $2x - y - z = 4$ corta al plano $3x - 5y + 2z = 6$.

41. Calcule el ángulo agudo entre los planos $x = 7$ y $x + y + \sqrt{2}z = -3$.

42. Obtenga el ángulo agudo entre los planos $x + y = 1$ y $y + z = 1$.

43. Determine las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los planos $x + 2y + z = 1$ y $x - y + 2z = -8$.

44. Demuestre que la recta de intersección de los planos

$$x + 2y - 2z = 5 \quad \text{y} \quad 5x - 2y - z = 0$$

es paralela a la recta

$$x = -3 + 2t, \quad y = 3t, \quad z = 1 + 4t.$$

45. Los planos $3x + 6z = 1$ y $2x + 2y - z = 3$ se cortan en una recta.

a) Demuestre que los planos son ortogonales.

b) Determine las ecuaciones de la recta de intersección de los planos.

46. Obtenga una ecuación del plano que pasa por el punto (1, 2, 3) y que es paralelo a $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

47. ¿Está relacionado $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ de algún modo con el plano $2x + y = 5$? Fundamente su respuesta.

48. La ecuación $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$ representa al plano que pasa por P_0 y que es normal a $\mathbf{n}$. ¿Qué conjunto representa la desigualdad $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} > 0$?

49. Calcule la distancia del punto $P(1, 4, 0)$ al plano que pasa por $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, -1)$ y $C(2, -1, 0)$.

50. Calcule la distancia del punto (2, 2, 3) al plano $2x + 3y + 5z = 0$.

51. Obtenga un vector paralelo al plano $2x - y - z = 4$ y ortogonal a $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

52. Obtenga un vector unitario ortogonal a $\mathbf{A}$ en el plano de $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$, si $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{C} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

53. Encuentre un vector de magnitud 2 paralelo a la recta de intersección de los planos $x + 2y + z - 1 = 0$ y $x - y + 2z + 7 = 0$.

54. Obtenga el punto donde la recta que pasa por el origen y que es perpendicular al plano $2x - y - z = 4$ corta al plano $3x - 5y + 2z = 6$.

55. Encuentre el punto donde la recta que pasa por $P(3, 2, 1)$ y es normal al plano $2x - y + 2z = -2$ corta a este último.

56. ¿Qué ángulo forma la recta de intersección de los planos $2x + y - z = 0$ y $x + y + 2z = 0$ con el eje x positivo?

57. La recta

$$L: \quad x = 3 + 2t, \quad y = 2t, \quad z = t$$

corta al plano $x + 3y - z = -4$ en un punto P. Encuentre las coordenadas de P y obtenga las ecuaciones de la recta en el plano que pasa por P y es perpendicular a L.

58. Demuestre que para cualquier número real k, el plano

$$x - 2y + z + 3 + k(2x - y - z + 1) = 0$$

contiene a la recta de intersección de los planos

$$x - 2y + z + 3 = 0 \quad \text{y} \quad 2x - y - z + 1 = 0.$$

59. Determine una ecuación para el plano que pasa por $A(-2, 0, -3)$ y $B(1, -2, 1)$ y que es paralelo a la recta que pasa por $C(-2, -13/5, 26/5)$ y $D(16/5, -13/5, 0)$.

60. La recta $x = 1 + 2t$, $y = -2 + 3t$, $z = -5t$ ¿tiene alguna relación con el plano $-4x - 6y + 10z = 9$? Justifique su respuesta.

61. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones corresponden al plano que pasa por los puntos $P(1, 1, -1)$, $Q(3, 0, 2)$ y $R(-2, 1, 0)$?

a) $(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot ((x + 2)\mathbf{i} + (y - 1)\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = 0$

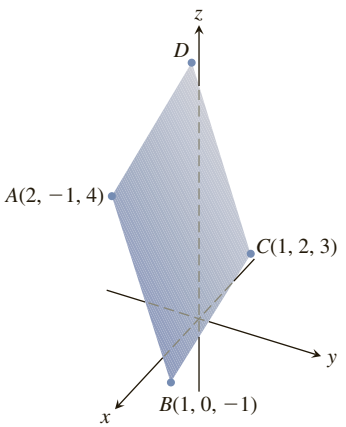
b) $x = 3 - t$, $y = -11t$, $z = 2 - 3t$

c) $(x + 2) + 11(y - 1) = 3z$

d) $(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \times ((x + 2)\mathbf{i} + (y - 1)\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = 0$

e) $(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \times (-3\mathbf{i} + \mathbf{k}) \cdot ((x + 2)\mathbf{i} + (y - 1)\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = 0$

62. El paralelogramo que se muestra en la figura tiene vértices en $A(2, -1, 4)$, $B(1, 0, -1)$, $C(1, 2, 3)$ y D. Encuentre



a) las coordenadas de D,

b) el coseno del ángulo interno en B,

c) el vector proyección de $\overrightarrow{BA}$ sobre $\overrightarrow{BC}$,

d) el área del paralelogramo,

e) una ecuación para el plano del paralelogramo,

f) las áreas de las proyecciones ortogonales del paralelogramo sobre los tres planos de coordenadas.

63. Distancia entre rectas sesgadas Encuentre la distancia entre la recta L_1 que pasa por los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(-1, 1, 0)$, y la recta L_2 que pasa por los puntos $C(3, 1, -1)$ y $D(4, 5, -2)$. La distancia se mide a lo largo de una recta perpendicular a las dos rectas. Primero, obtenga un vector $\mathbf{n}$ perpendicular a ambas rectas. Luego, proyecte $\overrightarrow{AC}$ sobre $\mathbf{n}$.

64. (*Continuación del ejercicio 63*). Encuentre la distancia entre la recta que pasa por los puntos $A(4, 0, 2)$ y $B(2, 4, 1)$, y la recta que pasa por los puntos $C(1, 3, 2)$ y $D(2, 2, 4)$.

Superficies cuádricas

Identifique y grafique las superficies de los ejercicios 65 a 76.

65. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

66. $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1$

67. $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$

68. $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$

69. $z = -(x^2 + y^2)$

70. $y = -(x^2 + z^2)$

71. $x^2 + y^2 = z^2$

72. $x^2 + z^2 = y^2$

73. $x^2 + y^2 - z^2 = 4$

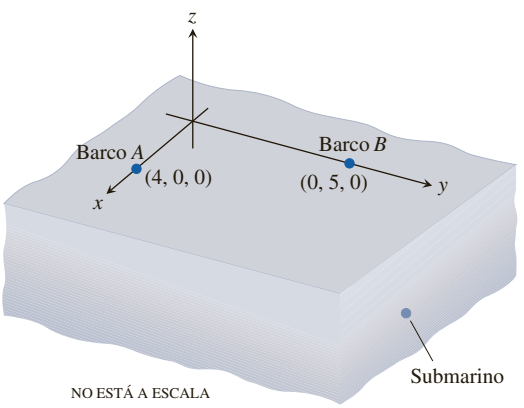
74. $4y^2 + z^2 - 4x^2 = 4$

75. $y^2 - x^2 - z^2 = 1$

76. $z^2 - x^2 - y^2 = 1$

Capítulo 12 Ejercicios adicionales y avanzados

1. Caza de submarinos Dos barcos maniobran en la superficie del mar tratando de determinar el curso y la rapidez de un submarino para preparar un ataque aéreo. Como se observa en la figura, el barco A se localiza en $(4, 0, 0)$, mientras que el barco B se ubica en $(0, 5, 0)$. Todas las coordenadas están expresadas en miles de pies. El barco A localiza el submarino en la dirección del vector $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - (1/3)\mathbf{k}$, y el barco B, en la dirección del vector $18\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Cuatro minutos antes, el submarino estaba localizado en $(2, -1, -1/3)$. Se espera que el avión para el ataque aéreo llegue en 20 minutos. Si el submarino se desplaza en línea recta a velocidad constante, ¿a qué posición deben dirigir los barcos al avión?

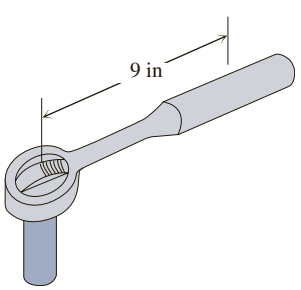


2. Rescate de un helicóptero Dos helicópteros, H_1 y H_2, viajan juntos. En el instante $t = 0$, se separan y siguen diferentes trayectorias rectas dadas por

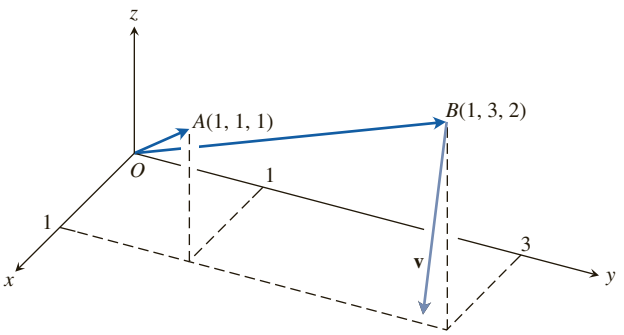
$$H_1: \quad x = 6 + 40t, \quad y = -3 + 10t, \quad z = -3 + 2t$$
$$H_2: \quad x = 6 + 110t, \quad y = -3 + 4t, \quad z = -3 + t.$$

El tiempo t se mide en horas y todas las coordenadas se miden en millas. Debido a fallas mecánicas, el helicóptero H_2 detiene su vuelo en $(446, 13, 1)$ y, en un lapso que se considera despreciable, aterriza en $(446, 13, 0)$. Dos horas después, H_1 es notificado de esto y se dirige hacia H_2 a 150 millas por hora. ¿Cuánto tiempo tardará H_1 en llegar a la posición de H_2?

3. Torque El manual del usuario de la podadora Toro® de 21 in dice: "Apriete la bujía a 15 libras-ft (20.4 N · m)". Si usted está instalando la bujía con una llave que tiene un brazo de 10.5 in, y coloca el centro de su mano a 9 in del eje de la bujía, ¿con qué fuerza debe dar el tirón? Dé la respuesta en libras.

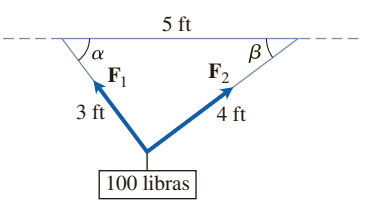


4. Cuerpo en rotación La recta que pasa por el origen y el punto $A(1, 1, 1)$ es el eje de rotación de un cuerpo rígido que gira con una rapidez angular constante de $3/2$ rad/s. La rotación es en el sentido de las manecillas del reloj cuando observamos el origen desde A. Obtenga la velocidad $\mathbf{v}$ del punto del cuerpo que está en la posición $B(1, 3, 2)$.

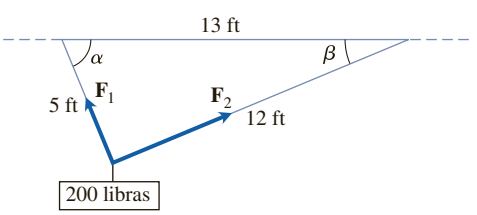


5. En cada uno de los siguientes diagramas, considere un peso suspendido por dos alambres. Obtenga la magnitud y las componentes de los vectores $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$, y los ángulos α y β.

a)

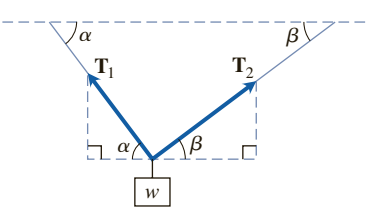


b)



(*Sugerencia:* Este triángulo es rectángulo).

6. Considere un peso de w N suspendido por dos alambres como en el diagrama, donde $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ son vectores de fuerza dirigidos a lo largo de los alambres.



a) Obtenga los vectores $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ y demuestre que sus magnitudes son

$$|\mathbf{T}_1| = \frac{w \cos \beta}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$$

y

$$|\mathbf{T}_2| = \frac{w \cos \alpha}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}.$$

b) Para β fijo, determine el valor de α que minimiza la magnitud de $|\mathbf{T}_1|$.

c) Para α fijo, determine el valor de β que minimiza la magnitud de $|\mathbf{T}_2|$.

7. Determinantes y planos

a) Demuestre que

$$\begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ x_2 - x & y_2 - y & z_2 - z \\ x_3 - x & y_3 - y & z_3 - z \end{vmatrix} = 0$$

es una ecuación del plano que pasa por los tres puntos no colineales $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ y $P_3(x_3, y_3, z_3)$.

b) ¿Qué conjunto de puntos en el espacio describe esta ecuación?

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

8. Determinantes y rectas Demuestre que las rectas

$$x = a_1 s + b_1,\ \ y = a_2 s + b_2,\ \ z = a_3 s + b_3,\ \ -\infty < s < \infty$$

y

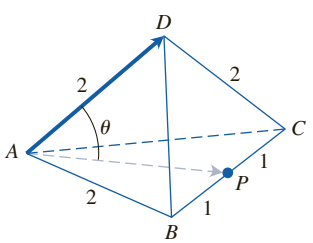
$$x = c_1 t + d_1,\ \ y = c_2 t + d_2,\ \ z = c_3 t + d_3,\ \ -\infty < t < \infty,$$

se cortan o son paralelas si y sólo si

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 - d_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 - d_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 - d_3 \end{vmatrix} = 0.$$

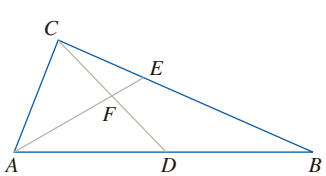
9. Considere un tetraedro regular con lado de longitud igual a 2.

a) Use vectores para encontrar el ángulo θ determinado por la base del tetraedro y cualquiera de sus otras aristas.



b) Use vectores para encontrar el ángulo θ determinado por dos caras adyacentes cualesquiera del tetraedro. Este ángulo comúnmente se conoce como ángulo diedro.

10. En la figura que se muestra, D es el punto medio del lado AB del triángulo ABC, y E es un tercio de la distancia entre C y B. Use vectores para demostrar que F es el punto medio del segmento de recta CD.



11. Use vectores para demostrar que la distancia de $P_1(x_1, y_1)$ a la recta $ax + by = c$ es

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

12. ***a)*** Use vectores para demostrar que la distancia de $P_1(x_1, y_1, z_1)$ al plano $Ax + By + Cz = D$ es

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

b) Obtenga una ecuación para la esfera que es tangente a los planos $x + y + z = 3$ y $x + y + z = 9$, si los planos $2x - y = 0$ y $3x - z = 0$ pasan por el centro de la esfera.

13. ***a)*** **Distancia entre planos paralelos** Demuestre que la distancia entre los planos paralelos $Ax + By + Cz = D_1$ y $Ax + By + Cz = D_2$ es

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{|A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}|}.$$

b) Obtenga la distancia entre los planos $2x + 3y - z = 6$ y $2x + 3y - z = 12$.

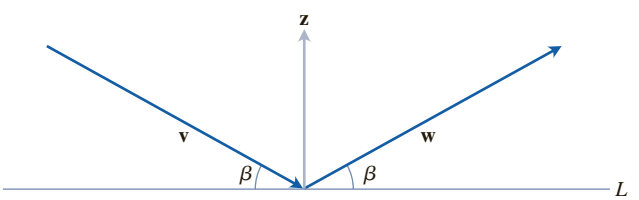
c) Determine una ecuación para el plano paralelo al plano $2x - y + 2z = -4$ si el punto $(3, 2, -1)$ es equidistante de ambos planos.

d) Escriba ecuaciones para los planos que son paralelos y están a 5 unidades del plano $x - 2y + z = 3$.

14. Demuestre que los cuatro puntos A, B, C y D son coplanares (se encuentran en un mismo plano) si y sólo si $\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}) = 0$.

15. La proyección de un vector sobre un plano Sean P un plano en el espacio y $\mathbf{v}$ un vector. El vector proyección de $\mathbf{v}$ sobre el plano P, $\text{proy}_P\ \mathbf{v}$, se puede definir de manera informal como sigue. Suponga que los rayos del sol son normales al plano P. Entonces, $\text{proy}_P\ \mathbf{v}$ es la "sombra" de $\mathbf{v}$ sobre P. Si P es el plano $x + 2y + 6z = 6$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, obtenga $\text{proy}_P\ \mathbf{v}$.

16. La siguiente figura muestra los vectores no nulos $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y $\mathbf{z}$, con $\mathbf{z}$ ortogonal a la recta L, mientras que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ forman ángulos iguales β con L. Suponiendo que $|\mathbf{v}| = |\mathbf{w}|$, calcule $\mathbf{w}$ en términos de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{z}$.



17. Triple producto vectorial Por lo general, los *triples productos vectoriales* $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ y $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ no son iguales, aunque las fórmulas para calcularlos a partir de sus componentes sean similares:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u},$$
$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}.$$

Verifique cada fórmula para los siguientes vectores evaluando ambos lados de la igualdad y comparando los resultados.

u	**v**	**w**
a) $2\mathbf{i}$	$2\mathbf{j}$	$2\mathbf{k}$
b) $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$	$2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$	$-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$
c) $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$	$2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$	$\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$
d) $\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$	$-\mathbf{i} - \mathbf{k}$	$2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

18. Productos cruz y punto Demuestre que si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y $\mathbf{r}$ son vectores cualesquiera, entonces,

a) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}$

b) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{k})\mathbf{k}$

c) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} & \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{r} & \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \end{vmatrix}$.

19. Productos cruz y punto Determine si la siguiente fórmula es correcta o incorrecta:

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})) \cdot \mathbf{w} = -|\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}.$$

20. Forme el producto cruz de dos vectores adecuados y deduzca la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}(A - B) = \operatorname{sen} A \cos B - \cos A \operatorname{sen} B.$$

21. Use vectores para demostrar que

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$$

para cualesquiera cuatro números a, b, c y d. (*Sugerencia:* Sean $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = c\mathbf{i} + d\mathbf{j}$).

22. El producto punto es positivo definido Demuestre que el producto punto de vectores es *positivo definido*; es decir, demuestre que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ para todo vector $\mathbf{u}$ y que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ si y sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

23. Demuestre que $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ para todo vector $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

24. Demuestre que $\mathbf{w} = |\mathbf{v}|\mathbf{u} + |\mathbf{u}|\mathbf{v}$ biseca el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

25. Demuestre que $|\mathbf{v}|\mathbf{u} + |\mathbf{u}|\mathbf{v}$ y $|\mathbf{v}|\mathbf{u} - |\mathbf{u}|\mathbf{v}$ son ortogonales.

Capítulo 12 Proyectos de aplicación tecnológica

Módulos Mathematica/Maple

Uso de vectores para representar rectas y calcular distancias

Partes I y II: Aprenda las ventajas de interpretar rectas como vectores.

Parte III: Use vectores para calcular la distancia de un punto a una recta.

Ubicar una escena en tres dimensiones sobre un lienzo bidimensional

Use el concepto de planos en el espacio para obtener una imagen bidimensional.

Introducción a la graficación en 3D

Parte I: Use la definición vectorial de rectas y planos para generar gráficas y ecuaciones, y compare diferentes formas de las ecuaciones de una recta particular.

Parte II: Grafique funciones definidas implícitamente.

13

Funciones con valores vectoriales y movimiento en el espacio

INTRODUCCIÓN Ahora que hemos estudiado los vectores y la geometría del espacio, podemos integrar estas ideas con nuestro conocimiento de las funciones. En este capítulo presentaremos el cálculo de funciones con valores vectoriales. Los dominios de estas funciones son conjuntos de números reales, como antes, pero sus rangos son vectores, no escalares. Cuando una función vectorial sufre un cambio, éste puede ser tanto en magnitud como en dirección, por lo que la derivada es en sí misma un vector. La integral de una función vectorial también es un vector. Usaremos el cálculo de estas funciones para describir las trayectorias y los movimientos de objetos que se desplazan en un plano o en el espacio, de manera que sus velocidades y aceleraciones son vectores. También presentaremos nuevos escalares que describen de qué manera la trayectoria de un objeto puede curvarse o torcerse en el espacio.

13.1 Curvas en el espacio y sus tangentes

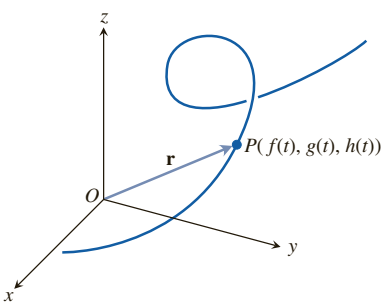


FIGURA 13.1 El vector de posición $\mathbf{r} = \overrightarrow{PO}$ de una partícula que se mueve en el espacio es una función del tiempo.

Cuando una partícula se mueve en el espacio durante un intervalo de tiempo I, visualizamos sus coordenadas como funciones definidas de I:

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t), \qquad t \in I. \tag{1}$$

Los puntos $(x, y, z) = (f(t), g(t), h(t))$, $t \in I$, forman la **curva** en el espacio que reconocemos como la **trayectoria** de la partícula. Las ecuaciones y el intervalo de la ecuación (1) parametrizan la curva.

Una curva en el espacio también se representa en forma vectorial. El vector

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP} = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \tag{2}$$

del origen a la posición de la partícula $P(f(t), g(t), h(t))$ en el tiempo t es el vector de posición de la partícula (figura 13.1). Las funciones f, g y h son las **funciones componentes** (o, simplemente, las **componentes**) del vector de posición. Consideramos la trayectoria de la partícula como la curva trazada por $\mathbf{r}$ durante el intervalo de tiempo I. La figura 13.2 muestra varias curvas en el espacio generadas mediante un programa de graficación por computadora. No sería fácil dibujar estas curvas a mano.

La ecuación (2) define $\mathbf{r}$ como una función vectorial de la variable real t en el intervalo I. Por lo general, una **función con valores vectoriales** o **función vectorial** sobre un dominio D es una regla que asigna un vector en el espacio a cada elemento de D. Por ahora, los dominios serán intervalos de números reales que producirán una curva en el espacio. Posteriormente, en el capítulo 16, los dominios serán regiones en el plano. Las funciones vectoriales representarán entonces superficies en el espacio. Las funciones vectoriales en un dominio del plano o del espacio también generan "campos vectoriales", los cuales son importantes en el estudio del flujo de un fluido, los campos gravitacionales y los fenómenos electromagnéticos. En el capítulo 16 investigaremos los campos vectoriales y sus aplicaciones.

Las funciones con valores reales se llaman **funciones escalares**, para distinguirlas de las funciones vectoriales. Las componentes de $\mathbf{r}$ en la ecuación (2) son funciones escalares

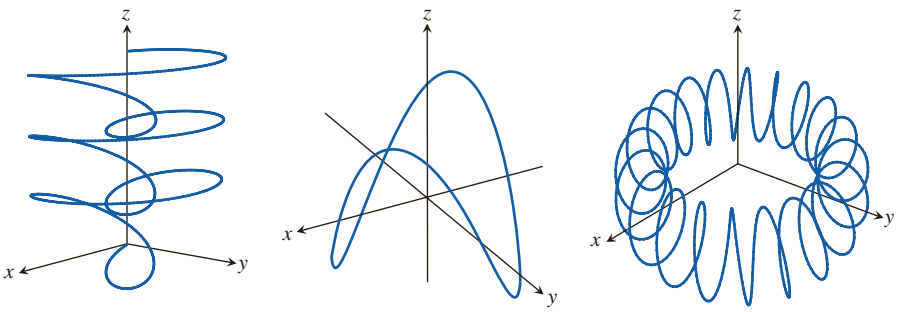


FIGURA 13.2 Las curvas en el espacio están definidas mediante los vectores de posición $\mathbf{r}(t)$.

de t. El dominio de una función con valores vectoriales es el dominio común de sus funciones componentes.

EJEMPLO 1 Grafique la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}.$$

Solución La función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

está definida para todos los números reales t. La curva trazada por $\mathbf{r}$ es una hélice que se enrolla alrededor del cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$ (figura 13.3). La curva está en el cilindro, puesto que las componentes $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ de $\mathbf{r}$, al ser las coordenadas x y y del extremo del vector de $\mathbf{r}$, satisfacen la ecuación del cilindro:

$$x^2 + y^2 = (\cos t)^2 + (\operatorname{sen} t)^2 = 1.$$

La curva sube cuando la componente $\mathbf{k}$, $z = t$, se incrementa. Cada vez que t aumenta en 2π, la curva completa una vuelta alrededor del cilindro. La curva descrita se llama **hélice** (el término proviene de un vocablo griego que significa "espiral"). Las ecuaciones

$$x = \cos t, \qquad y = \operatorname{sen} t, \qquad z = t$$

parametrizan la hélice, en el intervalo $-\infty < t < \infty$. La figura 13.4 muestra más hélices. Observe cómo los múltiplos constantes del parámetro t pueden cambiar el número de vueltas por unidad de tiempo. ■

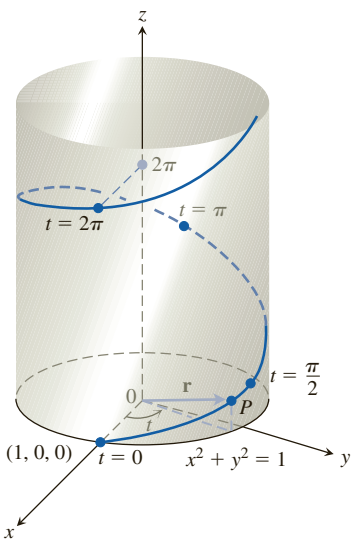


FIGURA 13.3 Mitad superior de la hélice $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ (ejemplo 1).

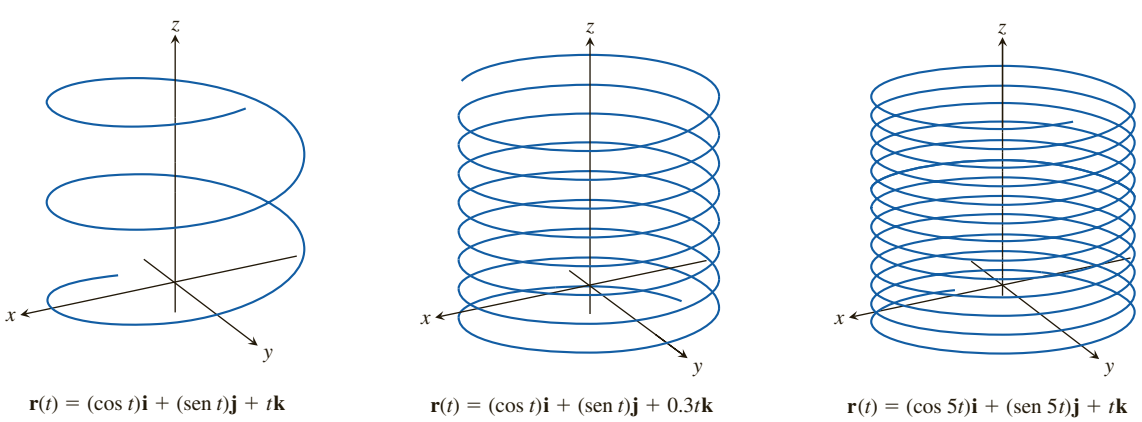


FIGURA 13.4 Hélices con espiral hacia arriba alrededor de un cilindro, como alambres embobinados.

Límites y continuidad

La forma en que definimos los límites de las funciones con valores vectoriales es similar al modo como definimos los límites de las funciones con valores reales.

DEFINICIÓN Sean $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ una función vectorial con dominio D, y $\mathbf{L}$ un vector. Decimos que $\mathbf{r}$ tiene **límite** $\mathbf{L}$ cuando t se aproxima a t_0. De esta forma, escribimos

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$$

si para todo número $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$, tal que para toda $t \in D$

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{L}| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |t - t_0| < \delta.$$

Si $\mathbf{L} = L_1\mathbf{i} + L_2\mathbf{j} + L_3\mathbf{k}$, entonces, es posible demostrar que $\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{L}$ precisamente cuando

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = L_1, \qquad \lim_{t \to t_0} g(t) = L_2 \qquad \lim_{t \to t_0} h(t) = L_3.$$

Para calcular el límite de una función vectorial, debemos encontrar el límite de cada función escalar componente.

Omitimos la demostración. La ecuación

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \left(\lim_{t \to t_0} f(t)\right)\mathbf{i} + \left(\lim_{t \to t_0} g(t)\right)\mathbf{j} + \left(\lim_{t \to t_0} h(t)\right)\mathbf{k} \tag{3}$$

ofrece un modo práctico de calcular límites de funciones vectoriales.

EJEMPLO 2 Si $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, entonces,

$$\lim_{t \to \pi/4} \mathbf{r}(t) = \left(\lim_{t \to \pi/4} \cos t\right)\mathbf{i} + \left(\lim_{t \to \pi/4} \operatorname{sen} t\right)\mathbf{j} + \left(\lim_{t \to \pi/4} t\right)\mathbf{k}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} + \frac{\pi}{4}\mathbf{k}.$$

■

Definimos la continuidad para funciones vectoriales del mismo modo en que definimos la continuidad para funciones escalares en un intervalo.

DEFINICIÓN Una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ es **continua en un punto** $t = t_0$ de su dominio, si $\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$. La función es **continua** si lo es en cada punto de su dominio.

A partir de la ecuación (3), vemos que $\mathbf{r}(t)$ es continua en el punto $t = t_0$, si y sólo si cada una de sus funciones componentes es continua en tal punto (ejercicio 31).

EJEMPLO 3

a) Todas las curvas en el espacio mostradas en las figuras 13.2 y 13.4 son continuas porque sus funciones componentes son continuas para todo valor de t en $(-\infty, \infty)$.

b) La función

$$\mathbf{g}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + \lfloor t \rfloor \mathbf{k}$$

es discontinua en cada entero donde la función mayor entero $\lfloor t \rfloor$ es discontinua. ■

Derivadas y movimiento

Suponga que $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ es el vector de posición de una partícula que se desplaza a lo largo de una curva en el espacio, y que f, g y h son funciones derivables de t. Entonces, la diferencia entre las posiciones de la partícula en el tiempo t y el tiempo $t + \Delta t$ es

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

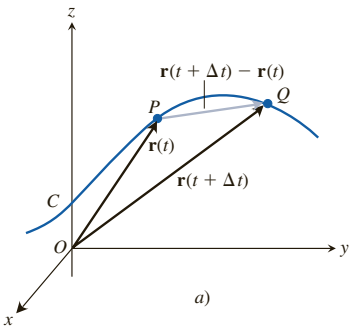
(figura 13.5*a*). En términos de componentes,

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{r} &= \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)\\ &= [\,f(t + \Delta t)\mathbf{i} + g(t + \Delta t)\mathbf{j} + h(t + \Delta t)\mathbf{k}\,]\\ &\quad - [\,f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}\,]\\ &= [\,f(t + \Delta t) - f(t)\,]\mathbf{i} + [\,g(t + \Delta t) - g(t)\,]\mathbf{j} + [\,h(t + \Delta t) - h(t)\,]\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Cuando Δt tiende a cero, parecen ocurrir tres situaciones de manera simultánea. Primero, Q se aproxima a P a lo largo de la curva. Segundo, la recta secante PQ parece aproximarse a una posición límite, tangente a la curva en P. Tercero, el cociente $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ (figura 13.5*b*) aproxima el límite

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} &= \left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}\right]\mathbf{j}\\ &\quad + \left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t}\right]\mathbf{k}\\ &= \left[\frac{df}{dt}\right]\mathbf{i} + \left[\frac{dg}{dt}\right]\mathbf{j} + \left[\frac{dh}{dt}\right]\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Esto nos conduce a la siguiente definición.



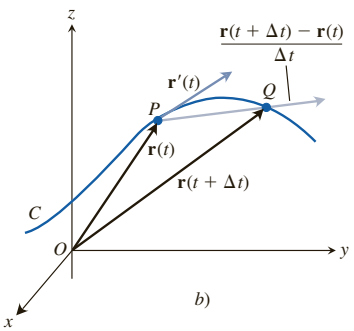


FIGURA 13.5 Cuando $\Delta t \to 0$, el punto Q se aproxima al punto P a lo largo de la curva C. En el límite, el vector $\overrightarrow{PQ}/\Delta t$ se convierte en el vector tangente $\mathbf{r}'(t)$.

DEFINICIÓN La función vectorial $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ tiene una **derivada (es diferenciable) en t** si f, g y h tienen derivadas en t. La derivada es la función vectorial

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{df}{dt}\mathbf{i} + \frac{dg}{dt}\mathbf{j} + \frac{dh}{dt}\mathbf{k}.$$

Una función vectorial $\mathbf{r}$ es **diferenciable** si lo es en cada punto de su dominio. La curva trazada por $\mathbf{r}$ es **suave** si $d\mathbf{r}/dt$ es continua y nunca es $\mathbf{0}$, es decir, si f, g y h tienen primeras derivadas continuas y éstas no se anulan de forma simultánea.

El significado geométrico de la definición de derivada queda de manifiesto en la figura 13.5. Los puntos P y Q tienen vectores de posición $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}(t + \Delta t)$, y el vector $\overrightarrow{PQ}$ se representa mediante $\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$. Para $\Delta t > 0$, el múltiplo escalar $(1/\Delta t)(\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t))$ apunta en la misma dirección que el vector $\overrightarrow{PQ}$. Cuando $\Delta t \to 0$, este vector tiende a un vector tangente a la curva en P (figura 13.5*b*). Cuando el vector $\mathbf{r}'(t)$ es diferente de 0, se define como el vector **tangente** a la curva en P. La **recta tangente** a la curva en un punto $(f(t_0), g(t_0), h(t_0))$ se define como la recta que pasa por el punto y es paralela a $\mathbf{r}'(t_0)$. Requerimos que $d\mathbf{r}/dt \neq \mathbf{0}$ en una curva suave para asegurar que ésta tenga una tangente que varíe continuamente en cada punto. En una curva suave no hay esquinas ni cúspides.

Una curva formada por un número finito de curvas suaves unidas de manera continua se llama **suave por tramos** (figura 13.6).

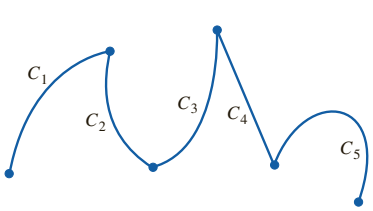


FIGURA 13.6 Una curva suave por tramos, formada por cinco curvas suaves conectadas por sus extremos de manera continua. Esta curva no es suave en los puntos donde se unen las cinco curvas suaves.

Observe una vez más la figura 13.5. Dibujamos la figura para Δt positivo, de manera que $\Delta\mathbf{r}$ apunta hacia delante, en la dirección del movimiento. El vector $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ tiene la misma dirección que $\Delta\mathbf{r}$, así que también apunta hacia delante. En caso de que Δt fuera negativo, $\Delta\mathbf{r}$ apuntaría hacia atrás, en contra de la dirección de movimiento. Sin embargo, el cociente $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$, al ser un múltiplo escalar negativo de $\Delta\mathbf{r}$, otra vez apuntaría hacia delante. Sin importar hacia dónde apunte $\Delta\mathbf{r}$, $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ apuntará hacia delante y esperamos que el vector $d\mathbf{r}/dt = \lim_{\Delta t\to 0}\Delta\mathbf{r}/\Delta t$, cuando sea diferente de $\mathbf{0}$, cumpla lo mismo. Esto significa que la derivada $d\mathbf{r}/dt$, que es la razón de cambio de la posición con respecto al tiempo, siempre apunta en la dirección del movimiento. Para una curva suave, $d\mathbf{r}/dt$ nunca es cero, ya que la partícula no se detiene ni invierte su dirección.

DEFINICIONES Si $\mathbf{r}$ es el vector de posición de una partícula que se desplaza a lo largo de una curva suave en el espacio, entonces,

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

es el **vector de velocidad** de la partícula, tangente a la curva. En cualquier momento t, la dirección de $\mathbf{v}$ es la **dirección del movimiento**, la magnitud de $\mathbf{v}$ es la **rapidez** de la partícula, y la derivada $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, cuando existe, es el **vector de aceleración** de la partícula. En resumen,

1. La velocidad es la derivada de la posición: $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$.
2. La rapidez es la magnitud de la velocidad: Rapidez $= |\mathbf{v}|$.
3. La aceleración es la derivada de la velocidad: $\mathbf{a} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$.
4. El vector unitario $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ es la dirección del movimiento en el tiempo t.

EJEMPLO 4 Obtenga la velocidad, rapidez y aceleración de una partícula cuyo movimiento en el espacio está dado por el vector de posición $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + 5\cos^2 t\,\mathbf{k}$. Trace el vector de velocidad $\mathbf{v}(7\pi/4)$.

Solución Los vectores de velocidad y aceleración en el tiempo t son

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) &= -2\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} - 10\cos t\operatorname{sen} t\,\mathbf{k}\\ &= -2\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} - 5\operatorname{sen} 2t\,\mathbf{k},\end{aligned}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = -2\cos t\,\mathbf{i} - 2\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} - 10\cos 2t\,\mathbf{k},$$

y la rapidez es

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{(-2\operatorname{sen} t)^2 + (2\cos t)^2 + (-5\operatorname{sen} 2t)^2} = \sqrt{4 + 25\operatorname{sen}^2 2t}.$$

Cuando $t = 7\pi/4$, tenemos

$$\mathbf{v}\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \qquad \mathbf{a}\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j}, \qquad \left|\mathbf{v}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right| = \sqrt{29}.$$

El bosquejo de la curva del movimiento y del vector de velocidad, cuando $t = 7\pi/4$, se presenta en la figura 13.7. ■

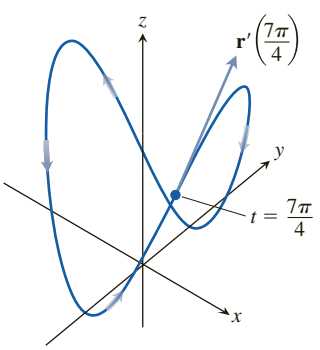


FIGURA 13.7 La curva y el vector de velocidad cuando $t = 7\pi/4$ para el movimiento descrito en el ejemplo 4.

Podemos expresar la velocidad de una partícula en movimiento como el producto de su rapidez y su dirección:

$$\text{Velocidad} = |\mathbf{v}|\left(\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right) = (\text{rapidez})(\text{dirección}).$$

Reglas de diferenciación

Debido a que las derivadas de las funciones vectoriales se pueden calcular por componentes, las reglas para diferenciar las funciones vectoriales tienen la misma forma que las reglas para diferenciar funciones escalares.

Reglas de diferenciación para funciones vectoriales

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ funciones vectoriales diferenciables de t, $\mathbf{C}$ un vector constante, c un escalar y f una función escalar diferenciable.

1. *Regla para funciones constantes:* $\dfrac{d}{dt}\mathbf{C} = \mathbf{0}$

2. *Reglas para múltiplos escalares:* $\dfrac{d}{dt}[\,c\mathbf{u}(t)\,] = c\mathbf{u}'(t)$

$$\frac{d}{dt}[\,f(t)\mathbf{u}(t)\,] = f'(t)\mathbf{u}(t) + f(t)\mathbf{u}'(t)$$

3. *Regla de la suma:* $\dfrac{d}{dt}[\,\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)\,] = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$

4. *Regla de la resta:* $\dfrac{d}{dt}[\,\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)\,] = \mathbf{u}'(t) - \mathbf{v}'(t)$

5. *Regla del producto punto:* $\dfrac{d}{dt}[\,\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)\,] = \mathbf{u}'(t)\cdot\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}'(t)$

6. *Regla del producto cruz:* $\dfrac{d}{dt}[\,\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)\,] = \mathbf{u}'(t)\times\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}'(t)$

7. *Regla de la cadena:* $\dfrac{d}{dt}[\,\mathbf{u}(f(t))\,] = f'(t)\mathbf{u}'(f(t))$

Cuando use la regla del producto cruz, recuerde conservar el orden de los factores. Si $\mathbf{u}$ viene primero en el lado izquierdo de la ecuación, también debe aparecer primero en el lado derecho; de otra forma, los signos serán incorrectos.

Demostraremos las reglas de los productos y de la cadena, pero dejaremos como ejercicios las reglas para constantes, múltiplos escalares, sumas y restas.

Demostración de la regla del producto punto Suponga que

$$\mathbf{u} = u_1(t)\mathbf{i} + u_2(t)\mathbf{j} + u_3(t)\mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{v} = v_1(t)\mathbf{i} + v_2(t)\mathbf{j} + v_3(t)\mathbf{k}.$$

Así,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) &= \frac{d}{dt}(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)\\ &= \underbrace{u_1'v_1 + u_2'v_2 + u_3'v_3}_{\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v}} + \underbrace{u_1v_1' + u_2v_2' + u_3v_3'}_{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}'}.\end{aligned}$$

■

Demostración de la regla del producto cruz Esta demostración sigue el modelo de la demostración de la regla del producto para funciones escalares. De acuerdo con la definición de derivada,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{u}(t+h)\times\mathbf{v}(t+h) - \mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)}{h}.$$

Para cambiar esta fracción en una equivalente que incluya los cocientes diferenciales para las derivadas de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, sumamos y restamos $\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t+h)$ en el numerador. Así,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\\ &\quad= \lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{u}(t+h)\times\mathbf{v}(t+h) - \mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t+h) + \mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t+h) - \mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)}{h}\\ &\quad= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\mathbf{u}(t+h) - \mathbf{u}(t)}{h}\times\mathbf{v}(t+h) + \mathbf{u}(t)\times\frac{\mathbf{v}(t+h) - \mathbf{v}(t)}{h}\right]\\ &\quad= \lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{u}(t+h) - \mathbf{u}(t)}{h}\times\lim_{h\to 0}\mathbf{v}(t+h) + \lim_{h\to 0}\mathbf{u}(t)\times\lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{v}(t+h) - \mathbf{v}(t)}{h}.\end{aligned}$$

La última de estas igualdades es válida porque el límite del producto cruz de dos funciones vectoriales es el producto cruz de sus límites, si es que estos últimos existen (ejercicio 32). Cuando h tiende a cero, $\mathbf{v}(t+h)$ tiende a $\mathbf{v}(t)$ porque $\mathbf{v}$, al ser diferenciable en t, es continua en t (ejercicio 33). Las dos fracciones tienden a los valores de $d\mathbf{u}/dt$ y $d\mathbf{v}/dt$ en t. En resumen,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$ ■

Demostración de la regla de la cadena Suponga que $\mathbf{u}(s) = a(s)\mathbf{i} + b(s)\mathbf{j} + c(s)\mathbf{k}$ es una función vectorial diferenciable de s, y que $s = f(t)$ es una función escalar diferenciable de t. Entonces, a, b y c son funciones diferenciables de t, y la regla de la cadena para funciones reales diferenciables da

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(s)] &= \frac{da}{dt}\mathbf{i} + \frac{db}{dt}\mathbf{j} + \frac{dc}{dt}\mathbf{k} \\
&= \frac{da}{ds}\frac{ds}{dt}\mathbf{i} + \frac{db}{ds}\frac{ds}{dt}\mathbf{j} + \frac{dc}{ds}\frac{ds}{dt}\mathbf{k} \\
&= \frac{ds}{dt}\left(\frac{da}{ds}\mathbf{i} + \frac{db}{ds}\mathbf{j} + \frac{dc}{ds}\mathbf{k}\right) \\
&= \frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{u}}{ds} \\
&= f'(t)\mathbf{u}'(f(t)). \qquad s = f(t)
\end{aligned}$$ ■

Por conveniencia algebraica, algunas veces escribiremos el producto de un escalar c y un vector $\mathbf{v}$ como $\mathbf{v}c$ en vez de $c\mathbf{v}$. Esto permite, por ejemplo, escribir la regla de la cadena en una forma conocida:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{ds}\frac{ds}{dt},$$

donde $s = f(t)$.

Funciones vectoriales de magnitud constante

Cuando seguimos una partícula que se mueve sobre una esfera con centro en el origen (figura 13.8), el vector de posición tiene longitud constante e igual al radio de la esfera. El vector de velocidad $d\mathbf{r}/dt$, al ser tangente a la trayectoria del movimiento, es tangente a la esfera y perpendicular a $\mathbf{r}$. Éste es siempre el caso para una función vectorial diferenciable de magnitud constante: el vector y su primera derivada son ortogonales. Si hacemos el cálculo directamente,

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) &= c^2 && |\mathbf{r}(t)| = c \text{ es constante.} \\
\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)] &= 0 && \text{Se toma la derivada en ambos lados.} \\
\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) &= 0 && \text{Regla 5 con } \mathbf{r}(t) = \mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t). \\
2\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) &= 0.
\end{aligned}$$

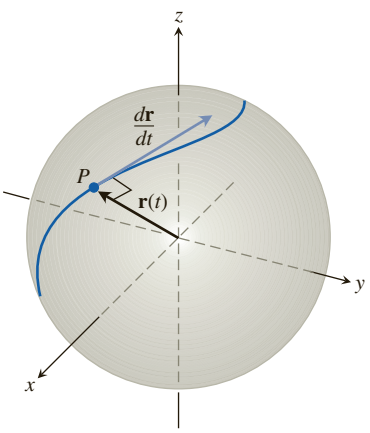


FIGURA 13.8 Si una partícula se mueve sobre una esfera de manera que su posición $\mathbf{r}$ es una función diferenciable del tiempo, entonces, $\mathbf{r} \cdot (d\mathbf{r}/dt) = 0$.

Los vectores $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{r}(t)$ son ortogonales debido a que su producto punto es 0. En resumen,

> Si $\mathbf{r}$ es una función vectorial diferenciable de t, de longitud constante, entonces,
>
> $$\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0. \qquad (4)$$

Recurriremos a esta observación varias veces en la sección 13.4. El inverso también es cierto (vea el ejercicio 27).

Ejercicios 13.1

Movimiento en el plano

En los ejercicios 1 a 4, $\mathbf{r}(t)$ es la posición de una partícula en el plano xy en el instante t. Obtenga una ecuación en x y en y cuya gráfica sea la trayectoria de la partícula. Luego, determine los vectores de velocidad y aceleración de la partícula en el valor dado de t.

1. $\mathbf{r}(t) = (t+1)\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}, \quad t = 1$

2. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{t}{t+1}\mathbf{i} + \dfrac{1}{t}\mathbf{j}, \quad t = -\dfrac{1}{2}$

3. $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + \dfrac{2}{9}e^{2t}\mathbf{j}, \quad t = \ln 3$

4. $\mathbf{r}(t) = (\cos 2t)\mathbf{i} + (3\,\text{sen}\, 2t)\mathbf{j}, \quad t = 0$

En los ejercicios 5 a 8 se proporcionan los vectores de posición de partículas que se desplazan a lo largo de varias curvas en el plano xy. En cada caso, determine los vectores de velocidad y aceleración de la partícula en los tiempos indicados y grafíquelos como vectores en la curva.

5. Movimiento en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$

$$\mathbf{r}(t) = (\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}; \quad t = \pi/4 \text{ y } \pi/2$$

6. Movimiento en la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$

$$\mathbf{r}(t) = \left(4\cos\frac{t}{2}\right)\mathbf{i} + \left(4\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right)\mathbf{j}; \quad t = \pi \text{ y } 3\pi/2$$

7. Movimiento en la cicloide $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$

$$\mathbf{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j}; \quad t = \pi \text{ y } 3\pi/2$$

8. Movimiento en la parábola $y = x^2 + 1$

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (t^2 + 1)\mathbf{j}; \quad t = -1, 0 \text{ y } 1$$

Movimiento en el espacio

En los ejercicios 9 a 14, $\mathbf{r}(t)$ es la posición de una partícula en el espacio en el instante t. Determine los vectores de velocidad y aceleración de la partícula. Luego, obtenga la rapidez y la dirección de movimiento de la partícula en el valor dado de t. Exprese la velocidad de la partícula en ese instante como el producto de su rapidez y dirección.

9. $\mathbf{r}(t) = (t + 1)\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}, \quad t = 1$

10. $\mathbf{r}(t) = (1 + t)\mathbf{i} + \dfrac{t^2}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \dfrac{t^3}{3}\mathbf{k}, \quad t = 1$

11. $\mathbf{r}(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (3\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}, \quad t = \pi/2$

12. $\mathbf{r}(t) = (\sec t)\mathbf{i} + (\tan t)\mathbf{j} + \dfrac{4}{3}t\mathbf{k}, \quad t = \pi/6$

13. $\mathbf{r}(t) = (2\ln(t + 1))\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \dfrac{t^2}{2}\mathbf{k}, \quad t = 1$

14. $\mathbf{r}(t) = (e^{-t})\mathbf{i} + (2\cos 3t)\mathbf{j} + (2\operatorname{sen} 3t)\mathbf{k}, \quad t = 0$

En los ejercicios 15 a 18, $\mathbf{r}(t)$ es la posición de una partícula en el espacio en el instante t. Obtenga el ángulo entre los vectores de velocidad y aceleración en el instante $t = 0$.

15. $\mathbf{r}(t) = (3t + 1)\mathbf{i} + \sqrt{3}t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$

16. $\mathbf{r}(t) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)\mathbf{i} + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}t - 16t^2\right)\mathbf{j}$

17. $\mathbf{r}(t) = (\ln(t^2 + 1))\mathbf{i} + (\tan^{-1} t)\mathbf{j} + \sqrt{t^2 + 1}\,\mathbf{k}$

18. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{4}{9}(1 + t)^{3/2}\mathbf{i} + \dfrac{4}{9}(1 - t)^{3/2}\mathbf{j} + \dfrac{1}{3}t\mathbf{k}$

Tangentes a curvas

Como se mencionó en el texto, la **recta tangente** a una curva suave $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ en $t = t_0$ es la recta que pasa por el punto $(f(t_0), g(t_0), h(t_0))$ y es paralela a $\mathbf{v}(t_0)$, el vector de velocidad de la curva en t_0. En los ejercicios 19 a 22, obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta que es tangente a cada curva en el valor indicado del parámetro $t = t_0$.

19. $\mathbf{r}(t) = (\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (t^2 - \cos t)\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}, \quad t_0 = 0$

20. $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + (2t - 1)\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, \quad t_0 = 2$

21. $\mathbf{r}(t) = \ln t\,\mathbf{i} + \dfrac{t - 1}{t + 2}\mathbf{j} + t\ln t\,\mathbf{k}, \quad t_0 = 1$

22. $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + (\operatorname{sen} 2t)\mathbf{k}, \quad t_0 = \dfrac{\pi}{2}$

Teoría y ejemplos

23. Movimiento a lo largo de una circunferencia Cada una de las siguientes ecuaciones en los incisos desde *a*) hasta *e*) describe el movimiento de una partícula con la misma trayectoria, a saber, la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$. Si bien la trayectoria de todas las partículas de los incisos desde *a*) hasta *e*) es la misma, el comportamiento o la "dinámica" de cada partícula es diferente. En cada caso, conteste las siguientes preguntas.

i. ¿La partícula tiene rapidez constante? Si es así, ¿cuál es?

ii. ¿El vector de aceleración de la partícula siempre es ortogonal a su vector de velocidad?

iii. ¿La partícula se mueve sobre la circunferencia en el sentido de las manecillas del reloj o en el sentido contrario?

iv. ¿La partícula inicia en el punto (1, 0)?

a) $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j}, \quad t \geq 0$

b) $\mathbf{r}(t) = \cos(2t)\mathbf{i} + \operatorname{sen}(2t)\mathbf{j}, \quad t \geq 0$

c) $\mathbf{r}(t) = \cos(t - \pi/2)\mathbf{i} + \operatorname{sen}(t - \pi/2)\mathbf{j}, \quad t \geq 0$

d) $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} - (\operatorname{sen} t)\mathbf{j}, \quad t \geq 0$

e) $\mathbf{r}(t) = \cos(t^2)\mathbf{i} + \operatorname{sen}(t^2)\mathbf{j}, \quad t \geq 0$

24. Movimiento a lo largo de una circunferencia Demuestre que la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) + \cos t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}\right) + \operatorname{sen} t\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}\right)$$

describe el movimiento de una partícula que se desplaza sobre una circunferencia de radio 1 con centro en el punto (2, 2, 1) y contenida en el plano $x + y - 2z = 2$.

25. Movimiento a lo largo de una parábola Una partícula se mueve a lo largo de la parte superior de la parábola $y^2 = 2x$, de izquierda a derecha, con rapidez constante de 5 unidades por segundo. Obtenga la velocidad de la partícula cuando pasa por el punto (2, 2).

26. Movimiento a lo largo de una cicloide Una partícula se mueve en el plano xy de tal forma que su posición en el instante t es

$$\mathbf{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j}.$$

T ***a)*** Grafique $\mathbf{r}(t)$. La curva resultante es una cicloide.

b) Obtenga los valores máximo y mínimo de $|\mathbf{v}|$ y $|\mathbf{a}|$. (*Sugerencia:* Primero encuentre los valores extremos de $|\mathbf{v}|^2$ y $|\mathbf{a}|^2$ y, después, saque la raíz cuadrada).

27. Sea $\mathbf{r}$ una función vectorial diferenciable de t. Demuestre que si $\mathbf{r} \cdot (d\mathbf{r}/dt) = 0$ para toda t, entonces, $|\mathbf{r}|$ es constante.

28. Derivadas del triple producto escalar

a) Demuestre que si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son funciones vectoriales diferenciables de t, entonces,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} + \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{w} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{w}}{dt}.$$

b. Demuestre que

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right) = \mathbf{r} \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}\right).$$

(*Sugerencia:* Derive el lado izquierdo y busque los vectores cuyos productos sean cero).

29. Pruebe las dos reglas de múltiplos escalares de las funciones vectoriales.

30. Pruebe las reglas de suma y resta de las funciones vectoriales.

31. Prueba por componentes de la continuidad en un punto Demuestre que la función vectorial $\mathbf{r}$ dada por $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ es continua en $t = t_0$ si y sólo si las funciones f, g y h son continuas en t_0.

32. Límites del producto cruz de funciones vectoriales Suponga que $\mathbf{r}_1(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2(t) = g_1(t)\mathbf{i} + g_2(t)\mathbf{j} + g3(t)\mathbf{k}$, $\lim_{t\to t_0} \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{A}$ y $\lim_{t\to t_0} \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{B}$. Utilice la fórmula del determinante para el producto cruz y la regla del límite del producto de funciones escalares para demostrar que

$$\lim_{t\to t_0} (\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)) = \mathbf{A} \times \mathbf{B}.$$

33. Las funciones vectoriales diferenciables son continuas Demuestre que si $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ es diferenciable en $t = t_0$, entonces, también es continua en t_0.

34. Regla de la función constante Compruebe que si $\mathbf{u}$ es una función vectorial con valor constante $\mathbf{C}$, entonces $d\mathbf{u}/dt = 0$.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Use algún software matemático para ejecutar los siguientes pasos en los ejercicios 35 a 38.

a) Grafique la curva espacial trazada por el vector de posición $\mathbf{r}$.

b) Obtenga las componentes del vector de velocidad $d\mathbf{r}/dt$.

c) Calcule $d\mathbf{r}/dt$ en el punto t_0 dado y determine la ecuación para la recta tangente a la curva en $\mathbf{r}(t_0)$.

d) Grafique la recta tangente junto con la curva en el intervalo dado.

35. $\mathbf{r}(t) = (\text{sen } t - t\cos t)\mathbf{i} + (\cos t + t \text{ sen } t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $0 \le t \le 6\pi$, $t_0 = 3\pi/2$

36. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$, $-2 \le t \le 3$, $t_0 = 1$

37. $\mathbf{r}(t) = (\text{sen } 2t)\mathbf{i} + (\ln(1 + t))\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 4\pi$, $t_0 = \pi/4$

38. $\mathbf{r}(t) = (\ln(t^2 + 2))\mathbf{i} + (\tan^{-1} 3t)\mathbf{j} + \sqrt{t^2 + 1}\,\mathbf{k}$, $-3 \le t \le 5$, $t_0 = 3$

En los ejercicios 39 y 40 analizará gráficamente el comportamiento de la hélice

$$\mathbf{r}(t) = (\cos at)\mathbf{i} + (\text{sen } at)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$$

cuando se modifican los valores de las constantes a y b. Use un software matemático para ejecutar los pasos en cada ejercicio.

39. Sea $b = 1$. Grafique la hélice $\mathbf{r}(t)$ junto con la recta tangente a la curva en $t = 3\pi/2$ para $a = 1$, 2, 4 y 6 sobre el intervalo $0 \le t \le 4\pi$. Describa con sus propias palabras qué sucede con la gráfica de la hélice y con la posición de la recta tangente cuando a aumenta según los valores positivos dados.

40. Ahora sea $a = 1$. Grafique la hélice $\mathbf{r}(t)$ junto con la recta tangente a la curva en $t = 3\pi/2$ para $b = 1/4$, $1/2$, 2 y 4 en el intervalo $0 \le t \le 4\pi$. Describa con sus propias palabras qué le sucede a la gráfica de la hélice y a la posición de la recta tangente cuando b aumenta de acuerdo con los valores positivos dados.

13.2 Integrales de funciones vectoriales; movimiento de proyectiles

En esta sección investigaremos integrales de funciones vectoriales y sus aplicaciones al movimiento a lo largo de una trayectoria en el espacio o en un plano.

Integrales de funciones vectoriales

Una función vectorial diferenciable $\mathbf{R}(t)$ es una **antiderivada** de una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ en un intervalo I si $d\mathbf{R}/dt = \mathbf{r}$ para cada punto de I. Si $\mathbf{R}$ es una antiderivada de $\mathbf{r}$ en I, es posible demostrar, mediante componentes, que todas las antiderivadas de $\mathbf{r}$ en I tienen la forma $\mathbf{R} + \mathbf{C}$ para algún vector constante $\mathbf{C}$ (ejercicio 41). El conjunto de todas las antiderivadas de $\mathbf{r}$ en I es la **integral indefinida** de $\mathbf{r}$ en I.

DEFINICIÓN La **integral indefinida** de $\mathbf{r}$ con respecto a t es el conjunto de todas las antiderivadas de $\mathbf{r}$, denotado con $\int \mathbf{r}(t)\,dt$. Si $\mathbf{R}$ es cualquier antiderivada de $\mathbf{r}$, entonces,

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{R}(t) + \mathbf{C}.$$

Las reglas aritméticas usuales de las integrales indefinidas siguen siendo válidas.

EJEMPLO 1 Para integrar una función vectorial, integramos cada una de sus componentes

$$\int ((\cos t)\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2t\mathbf{k})\,dt = \left(\int \cos t\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int dt\right)\mathbf{j} - \left(\int 2t\,dt\right)\mathbf{k} \qquad (1)$$

$$= (\operatorname{sen} t + C_1)\mathbf{i} + (t + C_2)\mathbf{j} - (t^2 + C_3)\mathbf{k} \qquad (2)$$

$$= (\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} - t^2\mathbf{k} + \mathbf{C} \qquad C = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} - C_3\mathbf{k}$$

Al igual que en el caso de la integración de funciones escalares, recomendamos que se salte los pasos de las ecuaciones (1) y (2) y vaya directamente a la forma final. Obtenga una antiderivada de cada componente y sume un *vector constante* al final. ■

Las integrales definidas de las funciones vectoriales se expresan mejor en términos de componentes. La definición es congruente con la manera de calcular los límites y las derivadas de las funciones vectoriales.

DEFINICIÓN Si las componentes de $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ son integrables en $[a, b]$, entonces, también lo es $\mathbf{r}$, y la **integral definida** de $\mathbf{r}$ de a a b es

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b g(t)\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int_a^b h(t)\,dt\right)\mathbf{k}.$$

EJEMPLO 2 Como en el ejemplo 1, integramos cada componente.

$$\int_0^{\pi} ((\cos t)\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2t\mathbf{k})\,dt = \left(\int_0^{\pi} \cos t\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_0^{\pi} dt\right)\mathbf{j} - \left(\int_0^{\pi} 2t\,dt\right)\mathbf{k}$$

$$= \left[\operatorname{sen} t\right]_0^{\pi}\mathbf{i} + \left[t\right]_0^{\pi}\mathbf{j} - \left[t^2\right]_0^{\pi}\mathbf{k}$$

$$= [0 - 0]\mathbf{i} + [\pi - 0]\mathbf{j} - [\pi^2 - 0^2]\mathbf{k}$$

$$= \pi\mathbf{j} - \pi^2\mathbf{k}$$ ■

El teorema fundamental del cálculo para funciones vectoriales continuas afirma que

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{R}(t)\Big]_a^b = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a)$$

donde $\mathbf{R}$ es cualquier antiderivada de $\mathbf{r}$, de manera que $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$ (ejercicio 42). Observe que la antiderivada de una función vectorial también es una función vectorial, mientras que una integral definida de una función vectorial es un vector constante.

EJEMPLO 3 Suponga que desconocemos la trayectoria de un planeador; sólo conocemos su vector de aceleración, que es $\mathbf{a}(t) = -(3\cos t)\mathbf{i} - (3\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. También sabemos que inicialmente (en el instante $t = 0$), el planeador partió del punto (4, 0, 0) con una velocidad $\mathbf{v}(0) = 3\mathbf{j}$. Obtenga la posición del planeador como una función de t.

Solución Nuestro objetivo es calcular $\mathbf{r}(t)$ conociendo

La ecuación diferencial: $\mathbf{a} = \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -(3\cos t)\mathbf{i} - (3\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

Las condiciones iniciales: $\mathbf{v}(0) = 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{r}(0) = 4\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$.

Al integrar ambos lados de la ecuación diferencial con respecto a t, obtenemos

$$\mathbf{v}(t) = -(3\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (3\cos t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k} + \mathbf{C}_1.$$

Consideramos $\mathbf{v}(0) = 3\mathbf{j}$ para obtener $\mathbf{C}_1$:

$$3\mathbf{j} = -(3\operatorname{sen} 0)\mathbf{i} + (3\cos 0)\mathbf{j} + (0)\mathbf{k} + \mathbf{C}_1$$
$$3\mathbf{j} = 3\mathbf{j} + \mathbf{C}_1$$
$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{0}.$$

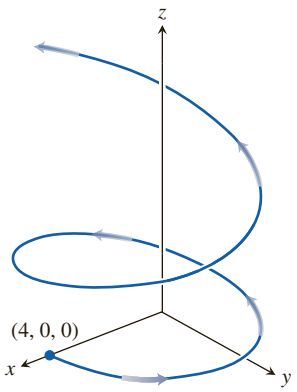


FIGURA 13.9 Trayectoria del planeador del ejemplo 3. Aunque la trayectoria es como una espiral alrededor del eje z, no es una hélice.

La velocidad del planeador como una función del tiempo es

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(t) = -(3\,\text{sen}\,t)\mathbf{i} + (3\cos t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}.$$

Al integrar ambos lados de esta última ecuación diferencial, tenemos

$$\mathbf{r}(t) = (3\cos t)\mathbf{i} + (3\,\text{sen}\,t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k} + \mathbf{C}_2.$$

Luego, consideramos la condición inicial $\mathbf{r}(0) = 4\mathbf{i}$ para encontrar $\mathbf{C}_2$:

$$\begin{aligned} 4\mathbf{i} &= (3\cos 0)\mathbf{i} + (3\,\text{sen}\,0)\mathbf{j} + (0^2)\mathbf{k} + \mathbf{C}_2 \\ 4\mathbf{i} &= 3\mathbf{i} + (0)\mathbf{j} + (0)\mathbf{k} + \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_2 &= \mathbf{i}. \end{aligned}$$

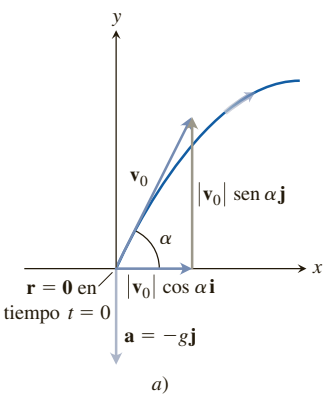
La posición del planeador como una función de t es

$$\mathbf{r}(t) = (1 + 3\cos t)\mathbf{i} + (3\,\text{sen}\,t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}.$$

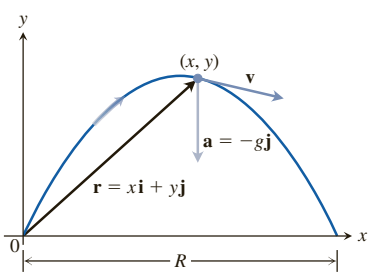
Ésta es la trayectoria del planeador mostrada en la figura 13.9. Si bien la trayectoria se parece a la de una hélice, porque es como una espiral alrededor del eje z, no es una hélice por el modo de elevarse. (Diremos más acerca de esto en la sección 13.5). ■

Ecuaciones vectoriales y paramétricas para el movimiento de un proyectil ideal

Un ejemplo clásico de integración de funciones vectoriales es la deducción de las ecuaciones para el movimiento de un proyectil. En física, el movimiento de proyectiles describe cómo un objeto disparado con cierto ángulo, desde una posición inicial y sobre el que actúa solamente la fuerza de la gravedad, se mueve en un plano coordenado vertical. En el ejemplo clásico, ignoramos los efectos de cualquier fuerza de fricción sobre el objeto, la cual puede variar con la rapidez y la altura del proyectil; también ignoramos el hecho de que la fuerza de gravedad cambia ligeramente al variar la altura del proyectil. Además, ignoramos los efectos en distancias largas producidos por la rotación de la Tierra, debajo del proyectil, tal como sucede en el despegue de un cohete o el disparo de un proyectil por un cañón. Al ignorar estos efectos, obtenemos una aproximación razonable del movimiento en la mayoría de los casos.



a)



b)

FIGURA 13.10 *a*) Posición, velocidad, aceleración y ángulo de lanzamiento en $t = 0$. *b*) Posición, velocidad y aceleración en un instante posterior t.

Para deducir las ecuaciones de movimiento de un proyectil, suponemos que éste se comporta como una partícula que se mueve en un plano coordenado vertical, y que la única fuerza que actúa sobre el proyectil durante su vuelo es la fuerza constante de la gravedad, la cual siempre apunta en sentido descendente. Suponemos que el proyectil es lanzado desde el origen en el instante $t = 0$ hacia el primer cuadrante, con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ (figura 13.10). Si $\mathbf{v}_0$ forma un ángulo a con la horizontal, entonces,

$$\mathbf{v}_0 = (|\mathbf{v}_0|\cos\alpha)\mathbf{i} + (|\mathbf{v}_0|\,\text{sen}\,\alpha)\mathbf{j}.$$

Si usamos la notación más sencilla v_0 para la rapidez inicial $|\mathbf{v}_0|$, entonces,

$$\mathbf{v}_0 = (v_0\cos\alpha)\mathbf{i} + (v_0\,\text{sen}\,\alpha)\mathbf{j}. \tag{3}$$

La posición inicial del proyectil es

$$\mathbf{r}_0 = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} = \mathbf{0}. \tag{4}$$

La segunda ley de Newton para el movimiento afirma que la fuerza que actúa sobre el proyectil es igual a la masa m del proyectil multiplicada por su aceleración, es decir, $m(d^2\mathbf{r}/dt^2)$ si $\mathbf{r}$ es el vector de posición del proyectil y t es el tiempo. Si la fuerza es solamente la fuerza gravitacional $-mg\mathbf{j}$, entonces,

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -mg\mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -g\mathbf{j},$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. Obtenemos $\mathbf{r}$ como una función de t al resolver el siguiente problema con valores iniciales.

$$\text{Ecuación diferencial:} \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -g\mathbf{j}$$

$$\text{Condiciones iniciales:} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_0 \quad \text{cuando } t = 0$$

Al integrar una vez, se obtiene

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -(gt)\mathbf{j} + \mathbf{v}_0.$$

Si integramos de nuevo, obtenemos

$$\mathbf{r} = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0.$$

Al sustituir los valores de $\mathbf{v}_0$ y $\mathbf{r}_0$ de las ecuaciones (3) y (4), se obtiene

$$\mathbf{r} = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \underbrace{(v_0 \cos\alpha)t\mathbf{i} + (v_0 \operatorname{sen}\alpha)t\mathbf{j}}_{\mathbf{v}_0 t} + \mathbf{0}.$$

Al agrupar términos, tenemos

Ecuación del movimiento para un proyectil ideal

$$\mathbf{r} = (v_0 \cos\alpha)t\mathbf{i} + \left((v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right)\mathbf{j}. \tag{5}$$

La ecuación (5) es la *ecuación vectorial* para el movimiento de un proyectil ideal. El ángulo α es el **ángulo de lanzamiento** (**ángulo de disparo** o **ángulo de elevación**) del proyectil, y v_0, como dijimos antes, es su **rapidez inicial**. Las componentes de $\mathbf{r}$ dan las ecuaciones paramétricas

$$x = (v_0 \cos\alpha)t \quad \text{y} \quad y = (v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2, \tag{6}$$

donde x es la distancia horizontal recorrida, y y es la altura del proyectil en el instante $t \geq 0$.

EJEMPLO 4 Un proyectil es disparado desde el origen sobre suelo horizontal con una rapidez inicial de 500 m/s y un ángulo de lanzamiento de 60°. ¿Dónde se encontrará el proyectil 10 segundos después?

Solución Usamos la ecuación (5) con $v_0 = 500$, $\alpha = 60°$, $g = 9.8$ y $t = 10$ para encontrar las componentes del vector de posición del proyectil 10 segundos después del disparo.

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= (v_0 \cos\alpha)t\mathbf{i} + \left((v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right)\mathbf{j} \\ &= (500)\left(\frac{1}{2}\right)(10)\mathbf{i} + \left((500)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)10 - \left(\frac{1}{2}\right)(9.8)(100)\right)\mathbf{j} \\ &\approx 2500\mathbf{i} + 3840\mathbf{j}\end{aligned}$$

Diez segundos después del disparo, el proyectil se localiza aproximadamente a 3840 m sobre el suelo y a 2500 m de distancia horizontal del origen. ■

Los proyectiles ideales se mueven a lo largo de parábolas, como deduciremos de la ecuación (6). Si sustituimos $t = x/(v_0 \cos \alpha)$ de la primera ecuación en la segunda, obtenemos la ecuación en coordenadas cartesianas

$$y = -\left(\frac{g}{2{v_0}^2 \cos^2 \alpha}\right)x^2 + (\tan \alpha)x.$$

Esta ecuación tiene la forma $y = ax^2 + bx$, por lo que su gráfica es una parábola.

Un proyectil alcanza su punto más alto cuando la componente vertical de su velocidad es cero. Si se dispara desde una superficie horizontal, el proyectil aterriza cuando su componente vertical es cero en la ecuación (5), y el **alcance** R es la distancia del origen al punto de impacto. Aquí resumimos los resultados, los cuales habrá que verificar en el ejercicio 27.

Altura, tiempo de vuelo y alcance para el movimiento de un proyectil ideal

Para el movimiento de un proyectil ideal, cuando se lanza un objeto desde el origen sobre una superficie horizontal con rapidez inicial v_0 y ángulo de lanzamiento α:

Altura máxima: $$y_{\text{máx}} = \frac{(v_0 \operatorname{sen} \alpha)^2}{2g}$$

Tiempo de vuelo: $$t = \frac{2v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g}$$

Alcance: $$R = \frac{{v_0}^2}{g} \operatorname{sen} 2\alpha.$$

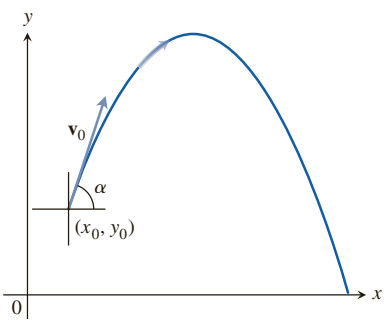


FIGURA 13.11 La trayectoria de un proyectil disparado desde (x_0, y_0) con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ y un ángulo de α grados con respecto a la horizontal.

Si disparamos el proyectil ideal desde el punto (x_0, y_0) y no desde el origen (figura 13.11), el vector de posición para la trayectoria del movimiento será

$$\mathbf{r} = (x_0 + (v_0 \cos \alpha)t)\mathbf{i} + \left(y_0 + (v_0 \operatorname{sen} \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right)\mathbf{j}, \tag{7}$$

como se pide demostrar en el ejercicio 29.

Movimiento de un proyectil con ráfagas de viento

El siguiente ejemplo ilustra cómo tomar en cuenta otra fuerza que actúa sobre un proyectil y que se debe a ráfagas de viento. También suponemos que la trayectoria de la pelota de béisbol del ejemplo 5 está en un plano vertical.

EJEMPLO 5 Una pelota de béisbol es bateada cuando se encuentra a 3 ft sobre el suelo. Abandona el bate con una rapidez inicial de 152 ft/s, formando un ángulo de 20° con la horizontal. En el instante en que la pelota es bateada, una ráfaga instantánea de viento sopla en dirección horizontal en sentido opuesto a la dirección que la pelota está tomando hacia el jardín, agregando una componente de $-8.8\mathbf{i}$ (ft/s) a la velocidad inicial de la pelota (8.8 ft/s = 6 mph).

a) Obtenga una ecuación vectorial (vector de posición) de la trayectoria de la pelota.

b) ¿Qué tan alto sube la pelota y cuándo alcanzará la altura máxima?

c) Suponiendo que la pelota no es atrapada, obtenga su alcance y tiempo de vuelo.

Solución

a) Usando la ecuación (3) y tomando en cuenta la ráfaga de viento, la velocidad inicial de la pelota es

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_0 &= (v_0 \cos \alpha)\mathbf{i} + (v_0 \operatorname{sen} \alpha)\mathbf{j} - 8.8\mathbf{i} \\ &= (152 \cos 20^\circ)\mathbf{i} + (152 \operatorname{sen} 20^\circ)\mathbf{j} - (8.8)\mathbf{i} \\ &= (152 \cos 20^\circ - 8.8)\mathbf{i} + (152 \operatorname{sen} 20^\circ)\mathbf{j}.\end{aligned}$$

La posición inicial es $\mathbf{r}_0 = 0\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. La integración de $d^2\mathbf{r}/dt^2 = -g\mathbf{j}$ da como resultado

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -(gt)\mathbf{j} + \mathbf{v}_0.$$

Una segunda integración da por resultado

$$\mathbf{r} = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0.$$

Al sustituir los valores de $\mathbf{v}_0$ y $\mathbf{r}_0$ en la última ecuación, obtenemos el vector de posición de la pelota.

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 \\ &= -16t^2\mathbf{j} + (152 \cos 20^\circ - 8.8)t\mathbf{i} + (152 \operatorname{sen} 20^\circ)t\mathbf{j} + 3\mathbf{j} \\ &= (152 \cos 20^\circ - 8.8)t\mathbf{i} + \left(3 + (152 \operatorname{sen} 20^\circ)t - 16t^2\right)\mathbf{j}.\end{aligned}$$

b) La pelota alcanza su punto más alto cuando la componente vertical de la velocidad es cero o

$$\frac{dy}{dt} = 152 \operatorname{sen} 20^\circ - 32t = 0.$$

Al despejar t, obtenemos

$$t = \frac{152 \operatorname{sen} 20^\circ}{32} \approx 1.62 \text{ s}.$$

Al sustituir este valor de tiempo en la componente vertical de $\mathbf{r}$, obtenemos la altura máxima

$$\begin{aligned}y_{\text{máx}} &= 3 + (152 \operatorname{sen} 20^\circ)(1.62) - 16(1.62)^2 \\ &\approx 45.2 \text{ ft}.\end{aligned}$$

Es decir, la altura máxima de la pelota es de alrededor de 45.2 ft, y se alcanza aproximadamente 1.6 s después del instante en que es bateada.

c) Para ver cuándo toca tierra la pelota, igualamos a 0 la componente vertical de $\mathbf{r}$ y despejamos t:

$$\begin{aligned}3 + (152 \operatorname{sen} 20^\circ)t - 16t^2 &= 0 \\ 3 + (51.99)t - 16t^2 &= 0.\end{aligned}$$

Los valores que resuelven la ecuación son, aproximadamente, $t = 3.3$ s y $t = -0.06$ s. Al sustituir el valor positivo en la componente horizontal de $\mathbf{r}$, obtenemos el alcance

$$\begin{aligned}R &= (152 \cos 20^\circ - 8.8)(3.3) \\ &\approx 442 \text{ ft}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el alcance horizontal es de aproximadamente 442 ft, y el tiempo de vuelo es de alrededor de 3.3 segundos. ■

En los ejercicios 37 y 38 consideramos el movimiento del proyectil cuando existe resistencia del aire que frena el vuelo.

Ejercicios 13.2

Integración de funciones vectoriales

Calcule las integrales de los ejercicios 1 a 10.

1. $\displaystyle\int_0^1 [\,t^3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + (t+1)\mathbf{k}\,]\,dt$

2. $\displaystyle\int_1^2 \left[(6-6t)\mathbf{i} + 3\sqrt{t}\mathbf{j} + \left(\frac{4}{t^2}\right)\mathbf{k}\right] dt$

3. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} [\,(\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (1+\cos t)\mathbf{j} + (\sec^2 t)\mathbf{k}\,]\,dt$

4. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} [\,(\sec t \tan t)\mathbf{i} + (\tan t)\mathbf{j} + (2\operatorname{sen} t \cos t)\mathbf{k}\,]\,dt$

5. $\displaystyle\int_1^4 \left[\frac{1}{t}\mathbf{i} + \frac{1}{5-t}\mathbf{j} + \frac{1}{2t}\mathbf{k}\right] dt$

6. $\displaystyle\int_0^1 \left[\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{1+t^2}\mathbf{k}\right] dt$

7. $\displaystyle\int_0^1 [\,te^{t^2}\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + \mathbf{k}\,]\,dt$

8. $\displaystyle\int_1^{\ln 3} [\,te^t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + \ln t\,\mathbf{k}\,]\,dt$

9. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} [\,\cos t\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} 2t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen}^2 t\,\mathbf{k}\,]\,dt$

10. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} [\,\sec t\,\mathbf{i} + \tan^2 t\,\mathbf{j} - t\operatorname{sen} t\,\mathbf{k}\,]\,dt$

Problemas con valores iniciales

Resuelva los problemas con valores iniciales que se indican en los ejercicios 11 a 16, para $\mathbf{r}$ como una función vectorial de t.

11. Ecuación diferencial: $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = -t\mathbf{i} - t\mathbf{j} - t\mathbf{k}$

Condición inicial: $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

12. Ecuación diferencial: $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = (180t)\mathbf{i} + (180t - 16t^2)\mathbf{j}$

Condición inicial: $\mathbf{r}(0) = 100\mathbf{j}$

13. Ecuación diferencial: $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \dfrac{3}{2}(t+1)^{1/2}\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + \dfrac{1}{t+1}\mathbf{k}$

Condición inicial: $\mathbf{r}(0) = \mathbf{k}$

14. Ecuación diferencial: $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = (t^3 + 4t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$

Condición inicial: $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

15. Ecuación diferencial: $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -32\mathbf{k}$

Condición inicial: $\mathbf{r}(0) = 100\mathbf{k}$ y $\left.\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_{t=0} = 8\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

16. Ecuación diferencial: $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

Condición inicial: $\mathbf{r}(0) = 10\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$ y $\left.\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_{t=0} = \mathbf{0}$

Movimiento a lo largo de una línea recta

17. En el instante $t = 0$, una partícula se localiza en el punto (1, 2, 3). Viaja en línea recta hasta el punto (4, 1, 4), tiene una rapidez de 2 en (1, 2, 3) y aceleración constante $3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Obtenga la ecuación para el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ de la partícula en el instante t.

18. Una partícula que viaja en línea recta se localiza en el punto (1, −1, 2) y tiene una rapidez de 2 en el instante $t = 0$. La partícula se desplaza hacia el punto (3, 0, 3) con una aceleración constante $2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Obtenga el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ en el instante t.

Movimiento de proyectiles

Los proyectiles de los siguientes ejercicios deben considerarse ideales, a menos que se indique lo contrario. Se supone que los ángulos de lanzamiento se miden con respecto a la horizontal. Considere que todos los proyectiles se lanzan desde el origen y sobre una superficie horizontal, a menos que se especifique de otra forma.

19. Tiempo de recorrido Se dispara un proyectil con una rapidez de 840 m/s con un ángulo de 60°. ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar un desplazamiento horizontal de 21 km?

20. Alcance y altura contra rapidez

a) Demuestre que al duplicar la rapidez inicial del proyectil para un ángulo de lanzamiento dado, el alcance se multiplica por 4.

b) ¿En qué porcentaje debería aumentar la rapidez inicial para duplicar la altura y el alcance?

21. Tiempo de vuelo y altura Un proyectil se dispara con una rapidez inicial de 500 m/s con un ángulo de elevación de 45°.

a) ¿Cuándo y qué tan lejos tocará tierra el proyectil?

b) ¿A qué altura estará el proyectil cuando se encuentre a una distancia horizontal de 5 km con respecto al punto de partida?

c) ¿Cuál es la máxima altura que alcanza el proyectil?

22. Lanzamiento de una pelota Una pelota de béisbol se lanza desde las gradas a 32 ft sobre el campo, con un ángulo de 30° hacia arriba con respecto a la horizontal. ¿Cuándo y a qué distancia tocará el suelo si su rapidez inicial es de 32 ft/s?

23. Lanzamiento de pelotas de golf Una máquina que lanza pelotas de golf dispara al nivel del suelo una pelota con un ángulo de 45°. La pelota toca tierra a 10 m de distancia.

a) ¿Cuál fue la rapidez inicial de la pelota?

b) Para la misma rapidez inicial, obtenga los dos ángulos de lanzamiento que ocasionan que el alcance sea de 6 m.

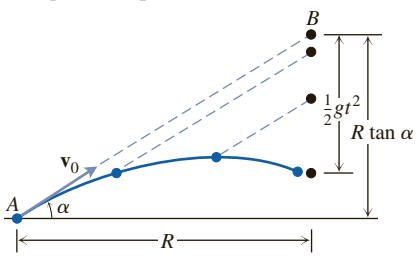
24. Haz de electrones Un electrón en un cinescopio de TV es lanzado horizontalmente con una rapidez de 5×10^6 m/s hacia la parte delantera del tubo que se encuentra a 40 cm de distancia. ¿Aproximadamente a qué altura caerá el electrón antes de que choque?

25. Ángulos de disparo de igual alcance ¿Cuáles son los dos ángulos de elevación que harán que un proyectil alcance un objetivo a 16 km de distancia al mismo nivel del arma, si la rapidez inicial del proyectil es de 400 m/s?

26. Rapidez del disparo de un cañón Calcule la rapidez de boca de un cañón cuyo alcance máximo es de 24.5 km.

27. Verifique los resultados que se presentan en el texto (a continuación del ejemplo 4) para la altura máxima, el tiempo de vuelo y el alcance del movimiento de un proyectil ideal.

28. Choque de canicas La siguiente figura ilustra un experimento con dos canicas. La canica A fue lanzada hacia la canica B con un ángulo de lanzamiento α y una rapidez inicial v_0. En el mismo instante, la canica B, en reposo, se dejó caer desde $R \tan \alpha$ unidades directamente sobre un punto a R unidades de distancia horizontal de A. Se encontró que las canicas chocan sin importar cuál es la velocidad de v_0. ¿Fue esto mera coincidencia o debía ocurrir? Justifique su respuesta.



29. Disparo desde (x_0, y_0) Deduzca las ecuaciones

$$x = x_0 + (v_0 \cos \alpha)t,$$

$$y = y_0 + (v_0 \operatorname{sen} \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

[vea la ecuación (7) del libro] resolviendo el siguiente problema con los valores iniciales que se indican para un vector $\mathbf{r}$ en el plano.

Ecuación diferencial: $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -g\mathbf{j}$

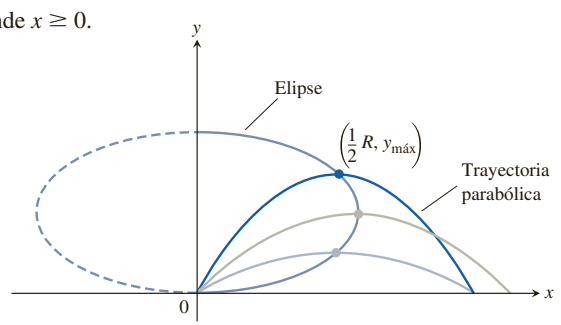
Condiciones iniciales: $\mathbf{r}(0) = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}(0) = (v_0 \cos \alpha)\mathbf{i} + (v_0 \operatorname{sen} \alpha)\mathbf{j}$$

30. Cima de una trayectoria Para un proyectil que se dispara desde el suelo con un ángulo de inclinación α y rapidez inicial v_0, considere a como una variable y v_0 como una constante. Para cada α, $0 < \alpha < \pi/2$, se obtiene una trayectoria parabólica como se muestra en la siguiente figura. Demuestre que los puntos en el plano que proporcionan las alturas máximas de estas trayectorias parabólicas están en la elipse

$$x^2 + 4\left(y - \frac{{v_0}^2}{4g}\right)^2 = \frac{{v_0}^4}{4g^2},$$

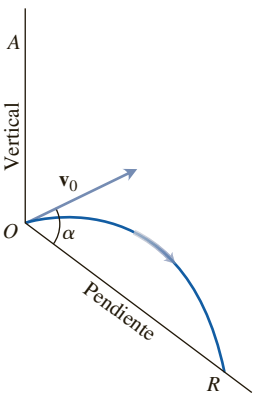
donde $x \geq 0$.



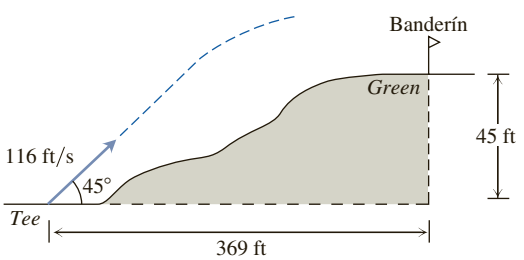
31. Lanzamiento cuesta abajo Un proyectil ideal se lanza directamente hacia abajo en un plano inclinado, como se muestra en la figura.

a) Demuestre que el alcance máximo cuesta abajo se obtiene cuando el vector de velocidad inicial biseca al ángulo AOR.

b) Si el proyectil se lanzara hacia arriba y no hacia abajo, ¿qué ángulo de lanzamiento maximizaría su alcance? Justifique su respuesta.



32. *Green* elevado Una pelota de golf es golpeada hacia el *green* que está 45 ft arriba del *tee* (soporte donde se coloca la bola), como se muestra en la figura, con una rapidez inicial de 116 ft/s y con un ángulo de elevación de 45° desde el *tee*. Suponiendo que el banderín, ubicado a una distancia horizontal de 369 ft, no se encuentra en el camino de la pelota, ¿dónde caerá esta última en relación con el banderín?



NO ESTÁ A ESCALA

33. Voleibol Un balón de voleibol es golpeado cuando se encuentra a 4 ft sobre el suelo y a 12 ft de una red que mide 6 ft de altura. El balón deja el punto de impacto con una velocidad inicial de 35 ft/s a un ángulo de 27°, y pasa para el equipo contrario sin ser tocado.

a) Obtenga la ecuación vectorial para la trayectoria del balón.

b) ¿Qué altura alcanza el balón y cuándo alcanza su altura máxima?

c) Obtenga su alcance y su tiempo de vuelo.

d) ¿Cuándo se encuentra a 7 ft sobre el suelo? ¿A qué distancia horizontal se encuentra en ese instante el balón del punto donde tocará el suelo?

e) Suponga que la red se eleva a 8 ft. ¿Esto cambia la situación? Explique.

34. Lanzamiento de bala En 1987, en Moscú, Natalya Lisouskaya estableció un récord mundial femenino en lanzamiento de bala de 8 libras 13 onzas lanzándola a una distancia de 73 ft y 10 in. Suponiendo que lanzó la bala a un ángulo de 40° con respecto a la horizontal, desde 6.5 ft sobre el suelo, ¿cuál fue la rapidez inicial de la bala?

35. Tren miniatura La siguiente fotografía multiflash muestra un tren miniatura que se desplaza con rapidez constante por una vía horizontal recta. Conforme la máquina se desplaza, una canica se lanza hacia el aire mediante un resorte instalado en la chimenea de la locomotora. La canica continúa desplazándose con la misma rapidez hacia delante de la máquina, y regresa a ésta un segundo después del lanzamiento. Mida el ángulo que forma la trayectoria de la canica con la horizontal y use la información para determinar la altura máxima de la canica y la rapidez de la locomotora.

Fuente: PSSC Physics, 2a. ed. Reimpresa con permiso de Educational Development Center, Inc.

36. Bateo de una pelota de béisbol bajo la influencia de una ráfaga de viento Un beisbolista batea la pelota cuando ésta se encuentra a 2.5 ft sobre el suelo. La pelota abandona el bate con una rapidez inicial de 145 ft/s y un ángulo de lanzamiento de 23°. En el instante del golpe, una ráfaga instantánea de viento sopla contra la pelota, agregando un componente de $-14\mathbf{i}$ (ft/s) a la velocidad inicial de la pelota. Una barda de 15 ft de alto se encuentra a 300 pies del home (el pentágono en la caja de bateo) en la dirección del vuelo.

***a*)** Obtenga una ecuación vectorial para la trayectoria de la pelota.

***b*)** ¿A qué altura llega la pelota, y cuándo alcanza su máxima altura?

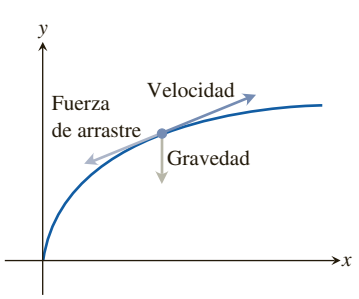
***c*)** Calcule el alcance y el tiempo de vuelo de la pelota, suponiendo que nadie la atrapa.

***d*)** ¿Cuándo se encuentra la pelota a 20 ft de altura? ¿A qué distancia (horizontal) está la pelota del *home* a esa altura?

***e*)** ¿Conecta el bateador un jonrón? Explique.

Movimiento de proyectiles con arrastre lineal

La principal fuerza que incide en el movimiento de un proyectil, además de la gravedad, es la resistencia del aire. Esta fuerza de resistencia es la **fuerza de arrastre**, y actúa en dirección *opuesta* a la velocidad del proyectil (vea la figura). Sin embargo, para el movimiento de proyectiles a través del aire con una rapidez relativamente baja, la fuerza de arrastre es (aproximadamente) proporcional a la rapidez (elevada a la primera potencia) y, por lo mismo, se llama **lineal**.



37. Arrastre lineal Deduzca las ecuaciones

$$x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})\cos\alpha$$

$$y = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})(\operatorname{sen}\alpha) + \frac{g}{k^2}(1 - kt - e^{-kt})$$

resolviendo el siguiente problema con condiciones iniciales para un vector $\mathbf{r}$ en el plano.

Ecuación diferencial: $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -g\mathbf{j} - k\mathbf{v} = -g\mathbf{j} - k\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$

Condiciones iniciales: $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$

$$\left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_{t=0} = \mathbf{v}_0 = (v_0\cos\alpha)\mathbf{i} + (v_0\operatorname{sen}\alpha)\mathbf{j}$$

El **coeficiente de arrastre** k es una constante positiva que representa la resistencia debida a la densidad del aire, v_0 y α son la rapidez inicial y el ángulo de lanzamiento del proyectil, respectivamente, y g es la aceleración de la gravedad.

38. Bateo de una pelota de béisbol con arrastre lineal Considere el problema de la pelota de béisbol del ejemplo 5 cuando hay un arrastre lineal (vea el ejercicio 37). Suponga que el coeficiente de arrastre es $k = 0.12$, pero sin ráfagas de viento.

***a*)** Con base en el ejercicio 37, obtenga la forma vectorial de la trayectoria de la pelota.

***b*)** ¿Qué altura alcanza la pelota, y cuándo llega a su máxima altura?

***c*)** Obtenga el alcance y el tiempo de vuelo de la pelota.

***d*)** ¿Cuándo se encuentra la pelota a 30 ft de altura? ¿A qué distancia (horizontal) está la pelota del *home* a esa altura?

***e*)** Una barda de 10 ft de altura se encuentra a 340 ft del *home* en dirección del vuelo de la pelota. El jardinero puede saltar y atrapar cualquier pelota a 11 ft por arriba del suelo para impedir que se vaya sobre la barda. ¿El bateador conecta un jonrón?

Teoría y ejemplos

39. Establezca las siguientes propiedades de las funciones vectoriales integrables.

***a*)** La *regla de múltiplos escalares constantes*:

$$\int_a^b k\mathbf{r}(t)\,dt = k\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt \quad \text{(cualquier escalar } k\text{)}$$

La *regla para negativos*,

$$\int_a^b (-\mathbf{r}(t))\,dt = -\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt,$$

se obtiene considerando $k = -1$.

***b*)** Las *reglas de suma y resta*:

$$\int_a^b (\mathbf{r}_1(t) \pm \mathbf{r}_2(t))\,dt = \int_a^b \mathbf{r}_1(t)\,dt \pm \int_a^b \mathbf{r}_2(t)\,dt$$

***c*)** La *regla de múltiplos vectoriales constantes*:

$$\int_a^b \mathbf{C}\cdot\mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{C}\cdot\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt \quad \text{(cualquier vector constante } \mathbf{C}\text{)}$$

y

$$\int_a^b \mathbf{C} \times \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{C} \times \int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt \quad \text{(cualquier vector constante } \mathbf{C}\text{)}$$

40. Productos de funciones escalares y vectoriales Suponga que la función escalar $u(t)$ y la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ están definidas para $a \le t \le b$.

a) Demuestre que $u\mathbf{r}$ es continua en $[a, b]$ si u y $\mathbf{r}$ son continuas en $[a, b]$.

b) Si u y $\mathbf{r}$ son diferenciables en $[a, b]$, demuestre que $u\mathbf{r}$ es diferenciable en $[a, b]$ y que

$$\frac{d}{dt}(u\mathbf{r}) = u\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{r}\frac{du}{dt}.$$

41. Antiderivadas de funciones vectoriales

a) Con base en el corolario 2 del teorema del valor medio para funciones escalares, demuestre que si dos funciones vectoriales $\mathbf{R}_1(t)$ y $\mathbf{R}_2(t)$ tienen derivadas idénticas en un intervalo I, entonces, las funciones difieren en I por un valor vectorial constante.

b) Con base en el resultado del inciso *a*), demuestre que si $\mathbf{R}(t)$ es cualquier antiderivada de $\mathbf{r}(t)$ en I, entonces, cualquier otra antiderivada de $\mathbf{r}$ en I es igual a $\mathbf{R}(t) + \mathbf{C}$ para algún vector constante $\mathbf{C}$.

42. El teorema fundamental del cálculo El teorema fundamental del cálculo de las funciones escalares de una variable real se aplica también a las funciones vectoriales de una variable real. Demuéstrelo mediante el teorema de las funciones escalares para mostrar primero que si una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ es continua en $a \le t \le b$, entonces,

$$\frac{d}{dt}\int_a^t \mathbf{r}(\tau)\,d\tau = \mathbf{r}(t)$$

en cada punto t de (a, b). Luego, con base en la conclusión del inciso *b*) del ejercicio 41, demuestre que si $\mathbf{R}$ es cualquier antiderivada de $\mathbf{r}$ en $[a, b]$ entonces,

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a).$$

43. Bateo de una pelota de béisbol con arrastre lineal bajo una ráfaga de viento Considere otra vez el problema de la pelota de béisbol del ejemplo 5. Esta vez, suponga un coeficiente de arrastre de 0.08 *y* una ráfaga instantánea de viento que agrega un componente de $-17.6\mathbf{i}$ (ft/s) a la rapidez inicial en el momento en que se batea la pelota.

a) Obtenga una ecuación vectorial para la trayectoria de la pelota.

b) ¿Qué altura alcanza la pelota, y cuándo llega a su máxima altura?

c) Calcule el alcance y tiempo de vuelo de la pelota.

d) ¿Cuándo se encuentra la pelota a 35 ft de altura? ¿A qué distancia (horizontal) está la pelota del *home* a esa altura?

e) Una barda de 20 ft de alto se encuentra a 380 ft del *home* en la dirección del vuelo de la pelota. ¿El bateador conecta un jonrón? Si la respuesta es afirmativa, ¿qué cambio en la componente horizontal de la velocidad inicial de la pelota hubiera mantenido a la pelota dentro del campo de juego? En caso negativo, ¿qué cambio le habría permitido conectar un jonrón?

44. Altura contra tiempo Demuestre que un proyectil llega a tres cuartos de su altura máxima en la mitad del tiempo que le toma alcanzar la máxima altura.

13.3 Longitud de arco en el espacio

En esta sección y en las dos siguientes, estudiaremos los parámetros matemáticos asociados con la forma de una curva que describen qué tanto dicha curva se dobla o se tuerce.

Longitud de arco a lo largo de una curva en el espacio

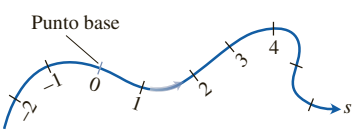


FIGURA 13.12 En las curvas suaves, es posible marcar una escala como en las rectas numéricas. La coordenada de cada punto es su distancia dirigida a lo largo de la curva hasta un punto base preseleccionado.

Una de las características de las curvas suaves en el espacio y en un plano es que tienen longitud medible. Esto nos permite localizar puntos en tales curvas por medio de su distancia dirigida, s, a lo largo de la curva desde un punto base, de la misma forma en que localizamos puntos en los ejes de coordenadas al conocer su distancias dirigidas a partir del origen (figura 13.12). Esto es lo que hicimos para curvas en el plano en la sección 13.2.

Para medir la distancia a lo largo de una curva suave en el espacio, agregamos el término z a la fórmula que usamos para las curvas en el plano.

DEFINICIÓN La **longitud** de una curva suave $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, $a \le t \le b$, recorrida exactamente una vez conforme t aumenta desde $t = a$ hasta $t = b$, es

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt. \qquad (1)$$

Al igual que en el caso de las curvas planas, podemos calcular la longitud de una curva en el espacio a partir de cualquier parametrización conveniente que satisfaga las condiciones requeridas. Omitiremos la prueba.

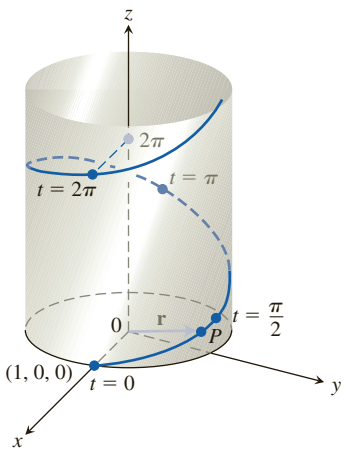


FIGURA 13.13 La hélice del ejemplo (1), $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$.

La raíz cuadrada en la ecuación (1) es $|\mathbf{v}|$, la longitud del vector de velocidad $d\mathbf{r}/dt$. Esto nos permite escribir la fórmula de la longitud en forma simplificada.

Fórmula para la longitud de un arco

$$L = \int_a^b |\mathbf{v}|\, dt \tag{2}$$

EJEMPLO 1 Un planeador se eleva a lo largo de la hélice $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$. ¿Cuál es la longitud de la trayectoria del planeador, desde $t = 0$ hasta $t = 2\pi$?

Solución El segmento de la trayectoria durante este tiempo corresponde a una vuelta completa de la hélice (figura 13.13). La longitud de esta parte de la curva es

$$L = \int_a^b |\mathbf{v}|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2 + (1)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\pi\sqrt{2} \text{ unidades de longitud.}$$

Esto es $\sqrt{2}$ veces la longitud de la circunferencia en el plano xy sobre el cual se eleva la hélice. ■

Si seleccionamos un punto base $P(t_0)$ en una curva suave C parametrizada por t, cada valor de t determina un punto $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ en C y una "distancia dirigida"

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{v}(\tau)|\, d\tau,$$

medida a lo largo de C desde el punto base (figura 13.14). Ésta es la función de longitud de arco que definimos en la sección 11.2 para curvas planas que no tienen una componente z. Si $t > t_0$, $s(t)$ es la distancia a lo largo de la curva desde $P(t_0)$ hasta $P(t)$. Si $t < t_0$, $s(t)$ es el negativo de la distancia. Cada valor de s determina un punto en C, y esto parametriza a C con respecto a s. Llamamos a s un **parámetro de longitud de arco** de la curva. El valor del parámetro se incrementa en la dirección en la que crece t. Veremos que el parámetro de longitud de arco es particularmente útil al estudiar los giros y las torsiones naturales de una curva en el espacio.

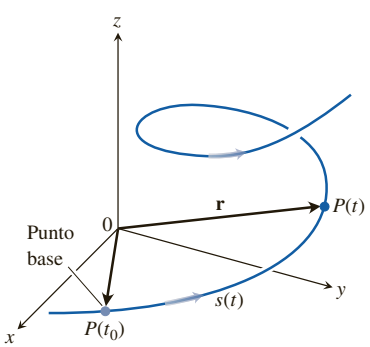


FIGURA 13.14 La distancia dirigida a lo largo de la curva desde $P(t_0)$ hasta cualquier punto $P(t)$ es

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{v}(\tau)|\, d\tau.$$

Parámetro de longitud de arco con punto base $P(t_0)$

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2 + [z'(\tau)]^2}\, d\tau = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{v}(\tau)|\, d\tau \tag{3}$$

Usamos la letra griega τ ("tau") como variable de integración en la ecuación (3), porque la letra t ya se está empleando como límite superior.

Si una curva $\mathbf{r}(t)$ ya está dada en términos de algún parámetro t, y $s(t)$ es la función de longitud de arco dada por la ecuación (3), entonces, podemos despejar t como función de s: $t = t(s)$. Así, la curva se puede reparametrizar en términos de s sustituyendo a t: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s))$. La nueva parametrización identifica un punto en la curva con su distancia dirigida a lo largo de la curva desde el punto base.

EJEMPLO 2 Éste es un ejemplo en el cual sí podemos encontrar la parametrización usando la longitud de arco de una curva. Si $t_0 = 0$, el parámetro de la longitud de arco a lo largo de la hélice

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

de t_0 a t es

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{v}(\tau)|\, d\tau \qquad \text{Ecuación (3)}$$

$$= \int_{0}^{t} \sqrt{2}\, d\tau \qquad \text{Valor del ejemplo 1}$$

$$= \sqrt{2}\, t.$$

Al despejar t de esta ecuación, obtenemos $t = s/\sqrt{2}$. Sustituimos este valor en el vector de posición $\mathbf{r}$ para obtener la siguiente parametrización usando la longitud de arco para la hélice:

$$\mathbf{r}(t(s)) = \left(\cos \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{i} + \left(\operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{j} + \frac{s}{\sqrt{2}}\mathbf{k}. \qquad \blacksquare$$

A diferencia del ejemplo 2, la parametrización usando la longitud de arco es, en general, difícil de calcular para una curva que ya se encuentra en términos de algún otro parámetro t. Sin embargo, y por fortuna, rara vez necesitamos una fórmula exacta para $s(t)$ o su inversa $t(s)$.

Rapidez en una curva suave

Puesto que las derivadas dentro del radical de la ecuación (3) son continuas (la curva es suave), el teorema fundamental del cálculo nos dice que s es una función diferenciable de t con derivada

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}(t)|. \tag{4}$$

La ecuación (4) indica que la rapidez con la cual se mueve una partícula a lo largo de su trayectoria es la magnitud de $\mathbf{v}$, lo cual es congruente con lo que ya sabemos.

Si bien el punto base $P(t_0)$ tiene que ver con la definición de s en la ecuación (3), no desempeña ningún papel en la ecuación (4). La tasa a la que una partícula en movimiento recorre cierta distancia a lo largo de su trayectoria es independiente de lo lejos que se encuentre del punto base.

Observe que $ds/dt > 0$ puesto que, por definición, $|\mathbf{v}|$ nunca se anula para una curva suave. Vemos otra vez que s es una función creciente de t.

Vector tangente unitario

Ya sabemos que el vector de velocidad $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ es tangente a la curva $\mathbf{r}(t)$ y que el vector

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

es, por lo tanto, un vector tangente unitario a la curva (suave), llamado **vector tangente unitario** (figura 13.15). El vector tangente unitario $\mathbf{T}$ es una función diferenciable de t siempre que $\mathbf{v}$ sea una función diferenciable de t. Como veremos en la sección 13.5, $\mathbf{T}$ es uno de tres vectores unitarios en un sistema de referencia itinerante que se usa para describir el movimiento de objetos que viajan en tres dimensiones.

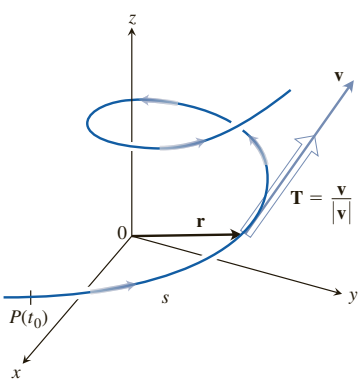


FIGURA 13.15 El vector tangente unitario $\mathbf{T}$ se obtiene dividiendo $\mathbf{v}$ entre $|\mathbf{v}|$.

EJEMPLO 3 Obtenga el vector tangente unitario a la curva

$$\mathbf{r}(t) = (1 + 3\cos t)\mathbf{i} + (3 \operatorname{sen} t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$

que representa la trayectoria del planeador del ejemplo 3, en la sección 13.2.

Solución En aquel ejemplo, obtuvimos

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -(3 \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (3 \cos t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$

y

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{9 + 4t^2}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = -\frac{3 \operatorname{sen} t}{\sqrt{9 + 4t^2}}\mathbf{i} + \frac{3 \cos t}{\sqrt{9 + 4t^2}}\mathbf{j} + \frac{2t}{\sqrt{9 + 4t^2}}\mathbf{k}.$$ ■

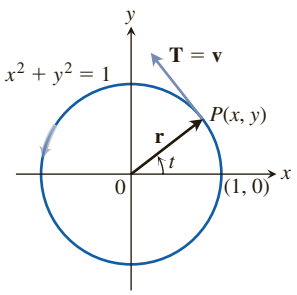


FIGURA 13.16 Movimiento en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor de una circunferencia unitaria.

Para el movimiento en sentido contrario al de las manecillas del reloj

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j}$$

alrededor de la circunferencia unitaria, vemos que

$$\mathbf{v} = (-\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}$$

ya es un vector unitario, de manera que $\mathbf{T} = \mathbf{v}$ y $\mathbf{T}$ es ortogonal a $\mathbf{r}$ (figura 13.16).

El vector de velocidad es el cambio en el vector de posición $\mathbf{r}$ con respecto al tiempo t, pero ¿cómo cambia el vector de posición con respecto a la longitud de arco? Más exactamente, ¿cuál es la derivada $d\mathbf{r}/ds$? Puesto que $ds/dt > 0$ para las curvas que estamos considerando, s es uno a uno y tiene una inversa que pone a t como una función diferenciable de s (sección 3.8). La derivada de la inversa es

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{ds/dt} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}.$$

Esto hace a $\mathbf{r}$ una función diferenciable de s cuya derivada puede calcularse con la regla de la cadena, de la siguiente forma:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds} = \mathbf{v}\frac{1}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \mathbf{T}. \tag{5}$$

Esta ecuación indica que $d\mathbf{r}/ds$ es el vector tangente unitario en la dirección del vector de velocidad $\mathbf{v}$ (figura 13.15).

Ejercicios 13.3

Obtención de vectores tangentes y longitudes

En los ejercicios 1 a 8, obtenga el vector tangente unitario a la curva. También, calcule la longitud de la parte indicada de cada una.

1. $\mathbf{r}(t) = (2 \cos t)\mathbf{i} + (2 \operatorname{sen} t)\mathbf{j} + \sqrt{5}t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi$
2. $\mathbf{r}(t) = (6 \operatorname{sen} 2t)\mathbf{i} + (6 \cos 2t)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi$
3. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (2/3)t^{3/2}\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 8$
4. $\mathbf{r}(t) = (2 + t)\mathbf{i} - (t + 1)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 3$
5. $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{j} + (\operatorname{sen}^3 t)\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi/2$
6. $\mathbf{r}(t) = 6t^3\mathbf{i} - 2t^3\mathbf{j} - 3t^3\mathbf{k}, \quad 1 \le t \le 2$
7. $\mathbf{r}(t) = (t \cos t)\mathbf{i} + (t \operatorname{sen} t)\mathbf{j} + \left(2\sqrt{2}/3\right)t^{3/2}\mathbf{k}$, $0 \le t \le \pi$
8. $\mathbf{r}(t) = (t \operatorname{sen} t + \cos t)\mathbf{i} + (t \cos t - \operatorname{sen} t)\mathbf{j}$, $\sqrt{2} \le t \le 2$
9. Obtenga el punto sobre la curva

$$\mathbf{r}(t) = (5 \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (5 \cos t)\mathbf{j} + 12t\mathbf{k}$$

que se encuentra a una distancia, a lo largo de la curva, de 26π unidades desde el punto (0, 5, 0) y en la dirección en la que aumenta la longitud de arco.

10. Determine el punto en la curva

$$\mathbf{r}(t) = (12 \operatorname{sen} t)\mathbf{i} - (12 \cos t)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}$$

que se encuentra a una distancia de 13π unidades a lo largo de la curva desde el punto $(0, -12, 0)$ en la dirección opuesta a la dirección en que aumenta la longitud de arco.

Parámetro de longitud de arco

En los ejercicios 11 a 14, obtenga el parámetro de longitud de arco a lo largo de la curva desde el punto donde $t = 0$, calculando la integral

$$s = \int_0^t |\mathbf{v}(\tau)|\, d\tau$$

de la ecuación (3). Luego, calcule la longitud de la parte indicada de la curva.

11. $\mathbf{r}(t) = (4\cos t)\mathbf{i} + (4\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + 3t\,\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi/2$

12. $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t - t\cos t)\mathbf{j}, \quad \pi/2 \le t \le \pi$

13. $\mathbf{r}(t) = (e^t\cos t)\mathbf{i} + (e^t\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + e^t\,\mathbf{k}, \quad -\ln 4 \le t \le 0$

14. $\mathbf{r}(t) = (1 + 2t)\mathbf{i} + (1 + 3t)\mathbf{j} + (6 - 6t)\mathbf{k}, \quad -1 \le t \le 0$

Teoría y ejemplos

15. Longitud de arco Calcule la longitud de la curva

$$\mathbf{r}(t) = \left(\sqrt{2}t\right)\mathbf{i} + \left(\sqrt{2}t\right)\mathbf{j} + (1 - t^2)\mathbf{k}$$

de $(0, 0, 1)$ a $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\right)$.

16. Longitud de una hélice La longitud $2\pi\sqrt{2}$ de una de las vueltas de la hélice del ejemplo 1 también es la longitud de la diagonal de un cuadrado de 2π unidades de longitud por lado. Muestre cómo obtener este cuadrado cortando y aplanando una parte del cilindro en el que se enrolla la hélice.

17. Elipse

a) Demuestre que la curva $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + (1 - \cos t)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$, es una elipse. Para ello, demuestre que es la intersección de un cilindro circular recto y un plano. Obtenga las ecuaciones del cilindro y del plano.

b) Dibuje la elipse en el cilindro. Agregue a su diagrama los vectores tangentes unitarios en $t = 0, \pi/2, \pi$ y $3\pi/2$.

c) Demuestre que el vector de aceleración siempre es paralelo al plano (ortogonal a un vector normal al plano). De esta forma, si dibuja la aceleración como un vector unido a la elipse, éste se encontrará en el plano de la elipse. Agregue a su dibujo los vectores de aceleración para $t = 0, \pi/2, \pi$ y $3\pi/2$.

d) Escriba una integral para la longitud de la elipse. No trate de calcular la integral, pues no se puede hacer en términos elementales.

T ***e)*** **Integrador numérico** Calcule la longitud de la elipse con precisión de dos cifras decimales.

18. La longitud es independiente de la parametrización Para ilustrar el hecho de que la longitud de una curva suave en el espacio no depende de la parametrización que use para calcularla, determine la longitud de una vuelta de la hélice del ejemplo 1 con las siguientes parametrizaciones.

a) $\mathbf{r}(t) = (\cos 4t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} 4t)\mathbf{j} + 4t\,\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi/2$

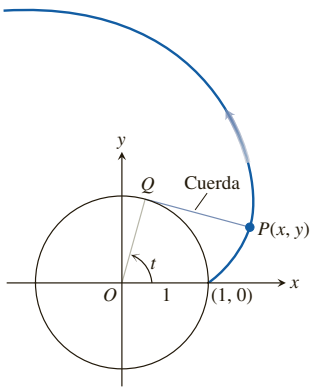
b) $\mathbf{r}(t) = [\cos(t/2)]\mathbf{i} + [\operatorname{sen}(t/2)]\mathbf{j} + (t/2)\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 4\pi$

c) $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} - (\operatorname{sen} t)\mathbf{j} - t\,\mathbf{k}, \quad -2\pi \le t \le 0$

19. La involuta de una circunferencia Si una cuerda enrollada alrededor de una circunferencia fija se desenrolla manteniéndola tensa y en el plano de la circunferencia, su extremo P traza una *involuta* de la circunferencia. En la siguiente figura se muestra la circunferencia en cuestión, la cual está dada por $x^2 + y^2 = 1$, y el punto que traza la curva comienza en $(1, 0)$. La parte no desenrollada de la cuerda es tangente a la circunferencia en Q, y t es la medida en radianes del ángulo del eje x positivo al segmento OQ. Deduzca las ecuaciones paramétricas

$$x = \cos t + t\operatorname{sen} t, \quad y = \operatorname{sen} t - t\cos t, \quad t > 0$$

del punto $P(x, y)$ de la involuta.



20. (*Continuación del ejercicio 19*). Obtenga el vector tangente unitario de la involuta de la circunferencia en el punto $P(x, y)$.

21. Distancia a lo largo de una recta Demuestre que si $\mathbf{u}$ es un vector unitario, entonces, el parámetro de la longitud de arco a lo largo de la recta $\mathbf{r}(t) = P_0 + t\mathbf{u}$ desde el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, donde $t = 0$, es t mismo.

22. Utilice la regla de Simpson con $n = 10$ para aproximar la longitud de arco de $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ del origen al punto $(2, 4, 8)$.

13.4 Curvatura y vectores normales de una curva

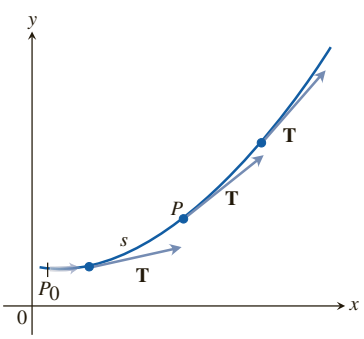


FIGURA 13.17 Cuando P se mueve a lo largo de la curva, en la dirección en la que crece la longitud del arco, el vector tangente unitario gira. El valor de $|d\mathbf{T}/ds|$ en P se llama *curvatura* de la curva en P.

En esta sección estudiaremos cómo se dobla o tuerce una curva. Veremos primero las curvas en el plano coordenado y, luego, las curvas en el espacio.

Curvatura de una curva plana

Cuando una partícula se mueve a lo largo de una curva suave en el plano, $\mathbf{T} = d\mathbf{r}/ds$ gira conforme la curva se va doblando. Puesto que $\mathbf{T}$ es un vector unitario, su longitud es constante y sólo cambia su dirección cuando la partícula se desplaza a lo largo de la curva. La razón a la que $\mathbf{T}$ gira por unidad de longitud a lo largo de la curva se llama *curvatura* (figura 13.17). El símbolo que se emplea comúnmente para la función de curvatura es la letra griega κ ("kappa").

DEFINICIÓN Si $\mathbf{T}$ es el vector tangente unitario de una curva suave, la función de **curvatura** de la curva es

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|.$$

Si $|d\mathbf{T}/ds|$ es grande, $\mathbf{T}$ gira rápidamente cuando la partícula pasa por P, y la curvatura en P también será grande. Si $|d\mathbf{T}/ds|$ es cercano a cero, $\mathbf{T}$ gira más lentamente y la curvatura en P es menor.

Si una curva suave $\mathbf{r}(t)$ está dada en términos de algún parámetro t diferente al parámetro de longitud de arco s, podemos calcular la curvatura como

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{dt}{ds}\right| \qquad \text{Regla de la cadena}$$

$$= \frac{1}{|ds/dt|}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right|$$

$$= \frac{1}{|\mathbf{v}|}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right|. \qquad \frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}|$$

Fórmula para el cálculo de la curvatura

Si $\mathbf{r}(t)$ es una curva suave, entonces, la curvatura es la función escalar

$$\kappa = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right|, \tag{1}$$

donde $\mathbf{T} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ es el vector tangente unitario.

Para someter a prueba la definición, veremos en los ejemplos 1 y 2, los cuales aparecen a continuación, que la curvatura es constante para líneas rectas y circunferencias.

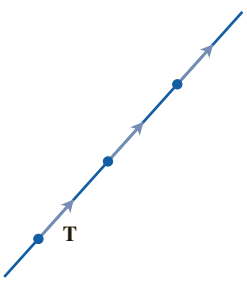


FIGURA 13.18 A lo largo de una línea recta, $\mathbf{T}$ siempre apunta en la misma dirección. La curvatura, $|d\mathbf{T}/ds|$, es cero (ejemplo 1).

EJEMPLO 1 Una línea recta es parametrizada por $\mathbf{r}(t) = \mathbf{C} + t\mathbf{v}$ para vectores constantes $\mathbf{C}$ y $\mathbf{v}$. Por lo tanto, $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}$ y el vector tangente unitario $\mathbf{T} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ es un vector constante que siempre apunta en la misma dirección y cuya derivada es $\mathbf{0}$ (figura 13.18). Se deduce que, para cualquier valor del parámetro t, la curvatura de la línea recta es cero:

$$\kappa = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| = \frac{1}{|\mathbf{v}|}|\mathbf{0}| = 0. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Aquí obtenemos la curvatura de una circunferencia. Comenzamos con la parametrización

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\,\text{sen}\,t)\mathbf{j}$$

de una circunferencia de radio a. Entonces,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -(a\,\text{sen}\,t)\mathbf{i} + (a\cos t)\mathbf{j}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-a\,\text{sen}\,t)^2 + (a\cos t)^2} = \sqrt{a^2} = |a| = a. \qquad \text{Puesto que } a > 0,\ |a| = a.$$

A partir de lo anterior, obtenemos

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = -(\text{sen}\,t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = -(\cos t)\mathbf{i} - (\text{sen}\,t)\mathbf{j}$$

$$\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| = \sqrt{\cos^2 t + \text{sen}^2 t} = 1.$$

Por lo tanto, para cualquier valor del parámetro t, la curvatura de la circunferencia es

$$\kappa = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| = \frac{1}{a}(1) = \frac{1}{a} = \frac{1}{\text{radio}}. \quad \blacksquare$$

Si bien la fórmula para el cálculo de kappa en la ecuación (1) también es válida para curvas en el espacio, en la siguiente sección encontraremos otra fórmula que es más conveniente de aplicar para efectuar el cálculo.

Entre los vectores ortogonales al vector tangente unitario **T**, hay uno de particular importancia porque apunta en la dirección en la cual gira la curva. Puesto que **T** tiene longitud constante (a saber, 1), la derivada $d\mathbf{T}/ds$ es ortogonal a **T** (ecuación 4, sección 13.1). Por consiguiente, si dividimos $d\mathbf{T}/ds$ entre su longitud kappa, obtenemos un vector *unitario* **N** ortogonal a **T** (figura 13.19).

DEFINICIÓN En un punto donde $\kappa \neq 0$, el vector **normal unitario principal** de una curva suave en el plano es

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\mathbf{T}}{ds}.$$

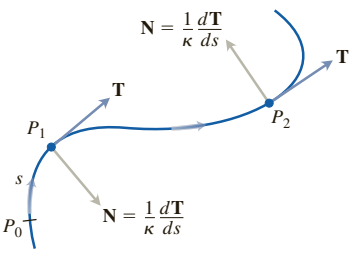


FIGURA 13.19 El vector $d\mathbf{T}/ds$, normal a la curva, siempre apunta en la dirección en la cual **T** está girando. El vector normal unitario **N** es la dirección de $d\mathbf{T}/ds$.

El vector $d\mathbf{T}/ds$ apunta en la dirección en la que **T** gira al doblarse la curva. Por lo tanto, si observamos en la dirección en la que la longitud del arco aumenta, el vector $d\mathbf{T}/ds$ apunta hacia la derecha si **T** gira en el sentido de las manecillas del reloj, y hacia la izquierda si **T** gira en sentido contrario. En otras palabras, el vector normal principal **N** apuntará hacia el lado cóncavo de la curva (figura 13.19).

Si una curva suave $\mathbf{r}(t)$ está dada en términos de algún parámetro t diferente del parámetro de longitud de arco s, podemos usar la regla de la cadena para calcular **N** directamente:

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \frac{d\mathbf{T}/ds}{|d\mathbf{T}/ds|} \\ &= \frac{(d\mathbf{T}/dt)(dt/ds)}{|d\mathbf{T}/dt|\,|dt/ds|} \\ &= \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|}. \qquad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{ds/dt} > 0 \text{ se cancela.}\end{aligned}$$

Esta fórmula nos permite obtener **N** sin necesidad de hallar primero κ y s.

Fórmula para calcular N

Si $\mathbf{r}(t)$ es una curva suave, entonces, el vector normal unitario principal es

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|}, \tag{2}$$

donde $\mathbf{T} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ es el vector tangente unitario.

EJEMPLO 3 Obtenga **T** y **N** para el movimiento circular

$$\mathbf{r}(t) = (\cos 2t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} 2t)\mathbf{j}.$$

Solución Primero encontramos **T**:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= -(2\operatorname{sen} 2t)\mathbf{i} + (2\cos 2t)\mathbf{j} \\ |\mathbf{v}| &= \sqrt{4\operatorname{sen}^2 2t + 4\cos^2 2t} = 2 \\ \mathbf{T} &= \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = -(\operatorname{sen} 2t)\mathbf{i} + (\cos 2t)\mathbf{j}.\end{aligned}$$

A partir de esto, vemos que

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{T}}{dt} &= -(2\cos 2t)\mathbf{i} - (2\operatorname{sen} 2t)\mathbf{j} \\ \left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| &= \sqrt{4\cos^2 2t + 4\operatorname{sen}^2 2t} = 2\end{aligned}$$

y

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|}$$
$$= -(\cos 2t)\mathbf{i} - (\operatorname{sen} 2t)\mathbf{j}. \quad \text{Ecuación (2)}$$

Observe que $\mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0$, verificando que $\mathbf{N}$ es ortogonal a $\mathbf{T}$. Observe también que para el movimiento circular en este caso, $\mathbf{N}$ apunta de $\mathbf{r}(t)$ hacia el centro del círculo en el origen. ■

Círculo de curvatura para curvas planas

El **círculo de curvatura** o **círculo osculador** en un punto P de una curva plana donde kappa $\neq 0$ es el círculo en el plano de la curva que

1. es tangente a la curva en P (tiene la misma recta tangente que la curva)
2. tiene la misma curvatura que la curva en P
3. tiene centro ubicado hacia la parte cóncava o el interior de la curva (como en la figura 13.20).

El **radio de curvatura** de la curva en P es el radio del círculo de curvatura, el cual, de acuerdo con el ejemplo 2, es

$$\text{Radio de curvatura} = \rho = \frac{1}{\kappa}.$$

Para determinar ρ, obtenemos κ y tomamos su recíproco. El **centro de curvatura** de la curva en P es el centro del círculo de curvatura.

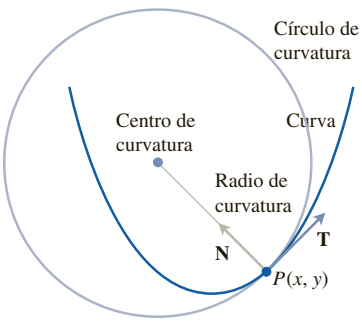


FIGURA 13.20 El centro del círculo osculador en $P(x, y)$ se encuentra hacia el interior de la curva.

EJEMPLO 4 Obtenga y grafique el círculo osculador de la parábola $y = x^2$ en el origen.

Solución Parametrizamos la parábola con el parámetro $t = x$ (sección 11.1, ejemplo 5):

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}.$$

Primero calculamos la curvatura de la parábola en el origen, mediante la ecuación (1):

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$$
$$|\mathbf{v}| = \sqrt{1 + 4t^2}$$

de manera que

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = (1 + 4t^2)^{-1/2}\mathbf{i} + 2t(1 + 4t^2)^{-1/2}\mathbf{j}.$$

A partir de esto, vemos que

$$\frac{d\,\mathbf{T}}{dt} = -4t(1 + 4t^2)^{-3/2}\mathbf{i} + [\,2(1 + 4t^2)^{-1/2} - 8t^2(1 + 4t^2)^{-3/2}\,]\,\mathbf{j}.$$

En el origen, $t = 0$, por lo que la curvatura es

$$\kappa(0) = \frac{1}{|\mathbf{v}(0)|}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}(0)\right| \quad \text{Ecuación (1)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1}}|0\mathbf{i} + 2\mathbf{j}|$$
$$= (1)\sqrt{0^2 + 2^2} = 2.$$

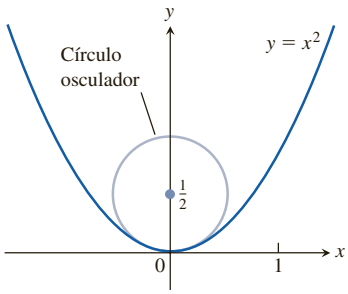


FIGURA 13.21 Círculo osculador de la parábola $y = x^2$ en el origen (ejemplo 4).

Por lo tanto, el radio de curvatura es $1/\text{kappa} = 1/2$. En el origen, tenemos $t = 0$ y $\mathbf{T} = \mathbf{i}$, de manera que $\mathbf{N} = \mathbf{j}$. Por lo tanto, el centro del círculo es $(0, 1/2)$. Así, la ecuación para el círculo osculador es

$$(x - 0)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Como podrá ver en la figura 13.21, el círculo osculador es una mejor aproximación a la parábola en el origen que la aproximación por la recta tangente $y = 0$. ■

Curvatura y vectores normales para curvas en el espacio

Si una curva suave en el espacio está especificada por el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ como función de algún parámetro t, y si s es el parámetro de longitud de arco de la curva, entonces, el vector tangente unitario $\mathbf{T}$ es $d\mathbf{r}/ds = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$. Por consiguiente, la **curvatura** en el espacio se define como

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| \tag{3}$$

justo como en el caso de curvas planas. El vector $d\mathbf{T}/ds$ es ortogonal a $\mathbf{T}$, y definimos el vector **normal unitario principal** como

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|}. \tag{4}$$

EJEMPLO 5 Obtenga la curvatura de la hélice (figura 13.22)

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\,\text{sen}\,t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}, \qquad a, b \geq 0, \qquad a^2 + b^2 \neq 0.$$

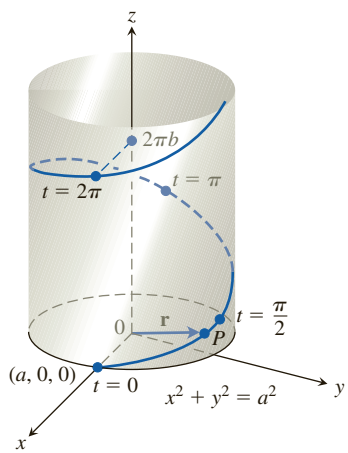


FIGURA 13.22 La hélice

$\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\,\text{sen}\,t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$,

dibujada con a y b positivos y $t \geq 0$ (ejemplo 5).

Solución Calculamos $\mathbf{T}$ a partir del vector de velocidad $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} = -(a\,\text{sen}\,t)\mathbf{i} + (a\cos t)\mathbf{j} + b\mathbf{k}$$
$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2\,\text{sen}^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\left[-(a\,\text{sen}\,t)\mathbf{i} + (a\cos t)\mathbf{j} + b\mathbf{k}\right].$$

Luego, empleamos la ecuación (3),

$$\kappa = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right|$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\left|\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\left[-(a\cos t)\mathbf{i} - (a\,\text{sen}\,t)\mathbf{j}\right]\right|$$
$$= \frac{a}{a^2 + b^2}\left|-(\cos t)\mathbf{i} - (\text{sen}\,t)\mathbf{j}\right|$$
$$= \frac{a}{a^2 + b^2}\sqrt{(\cos t)^2 + (\text{sen}\,t)^2} = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

A partir de esta ecuación, vemos que al aumentar b y manteniendo constante el valor de a, la curvatura decrece. Pero si a decrece y b se mantiene fija, con el tiempo, también decrecerá la curvatura.

Si $b = 0$, la hélice se reduce a una circunferencia de radio a y su curvatura se reduce a $1/a$, como debe ser. Si $a = 0$, la hélice es el eje z y su curvatura se reduce a 0, como debería. ■

EJEMPLO 6 Obtenga **N** para la hélice del ejemplo 5 y describa hacia dónde apunta el vector.

Solución Tenemos

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}[\,(a\cos t)\mathbf{i} + (a\,\text{sen}\,t)\mathbf{j}\,] \qquad \text{Ejemplo 5}$$

$$\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sqrt{a^2\cos^2 t + a^2\,\text{sen}^2 t} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|} \qquad \text{Ecuación (4)}$$

$$= -\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}[\,(a\cos t)\mathbf{i} + (a\,\text{sen}\,t)\mathbf{j}\,]$$

$$= -(\cos t)\mathbf{i} - (\text{sen}\,t)\mathbf{j}.$$

Por lo tanto, **N** es paralelo al plano xy y siempre apunta hacia el eje z. ■

Ejercicios 13.4

Curvas planas

Obtenga **T**, **N** y kappa para las curvas planas de los ejercicios 1 a 4.

1. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (\ln\cos t)\mathbf{j}, \quad -\pi/2 < t < \pi/2$
2. $\mathbf{r}(t) = (\ln\sec t)\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad -\pi/2 < t < \pi/2$
3. $\mathbf{r}(t) = (2t + 3)\mathbf{i} + (5 - t^2)\mathbf{j}$
4. $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t\,\text{sen}\,t)\mathbf{i} + (\text{sen}\,t - t\cos t)\mathbf{j}, \quad t > 0$
5. **Fórmula de la curvatura para la gráfica de una función en el plano xy**

   a) La gráfica $y = f(x)$ en el plano xy automáticamente tiene la parametrización $x = x$, $y = f(x)$ y la fórmula vectorial $\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + f(x)\mathbf{j}$. Use esta fórmula para demostrar que si f es una función de x dos veces diferenciable, entonces,

   $$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[\,1 + (f'(x))^2\,]^{3/2}}.$$

   b) Use la fórmula para kappa del inciso *a*) para determinar la curvatura de $y = \ln(\cos x)$, $-\pi/2 < x < \pi/2$. Compare su respuesta con la del ejercicio 1.

   c) Demuestre que la curvatura es cero en un punto de inflexión.
6. **Fórmula para la curvatura de una curva plana parametrizada**

   a) Demuestre que la curvatura de una curva suave $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ definida mediante las funciones dos veces diferenciables $x = f(t)$ y $y = g(t)$ está dada por la fórmula

   $$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

   Los puntos en la fórmula denotan diferenciación con respecto a t, una derivada por cada punto. Aplique la fórmula para determinar las curvaturas de las siguientes curvas.

   b) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (\ln\,\text{sen}\,t)\mathbf{j}, \quad 0 < t < \pi$

   c) $\mathbf{r}(t) = [\,\tan^{-1}(\text{senh}\,t)\,]\mathbf{i} + (\ln\cosh t)\mathbf{j}$
7. **Normales a curvas planas**

   a) Demuestre que $\mathbf{n}(t) = -g'(t)\mathbf{i} + f'(t)\mathbf{j}$ y $-\mathbf{n}(t) = g'(t)\mathbf{i} - f'(t)\mathbf{j}$ son normales a la curva $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ en el punto $(f(t), g(t))$.

   Si deseamos obtener **N** para una curva plana en particular, podemos seleccionar entre **n** o $-\mathbf{n}$ del inciso *a*), el que apunte hacia la parte concava de la curva, y convertirlo en un vector unitario. (Vea la figura 13.19). Aplique este método y encuentre **N** para las siguientes curvas.

   b) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j}$

   c) $\mathbf{r}(t) = \sqrt{4 - t^2}\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad -2 \le t \le 2$
8. (*Continuación del ejercicio 7*).

   a) Con base en el método del ejercicio 7, determine **N** para la curva $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1/3)t^3\mathbf{j}$ cuando $t < 0$, y cuando $t > 0$.

   b) Calcule **N** para $t \neq 0$, directamente de **T**, usando la ecuación (4) con la curva del inciso *a*). ¿Existe **N** en $t = 0$? Grafique la curva y explique qué ocurre con **N** cuando t pasa de valores negativos a positivos.

Curvas espaciales

Obtenga **T**, **N** y kappa para las curvas espaciales de los ejercicios 9 a 16.

9. $\mathbf{r}(t) = (3\,\text{sen}\,t)\mathbf{i} + (3\cos t)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$
10. $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t\,\text{sen}\,t)\mathbf{i} + (\text{sen}\,t - t\cos t)\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
11. $\mathbf{r}(t) = (e^t\cos t)\mathbf{i} + (e^t\,\text{sen}\,t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
12. $\mathbf{r}(t) = (6\,\text{sen}\,2t)\mathbf{i} + (6\cos 2t)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}$
13. $\mathbf{r}(t) = (t^3/3)\mathbf{i} + (t^2/2)\mathbf{j}, \quad t > 0$
14. $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{i} + (\text{sen}^3 t)\mathbf{j}, \quad 0 < t < \pi/2$
15. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (a\cosh(t/a))\mathbf{j}, \quad a > 0$
16. $\mathbf{r}(t) = (\cosh t)\mathbf{i} - (\text{senh}\,t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

Más sobre la curvatura

17. Demuestre que la parábola $y = ax^2$, $a \neq 0$, tiene su mayor curvatura en su vértice y que no tiene curvatura mínima. (*Nota:* Puesto que la curvatura de una curva permanece igual si ésta se traslada o se gira, tal resultado es verdadero para cualquier parábola).

18. Demuestre que la elipse $x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$, $a > b > 0$, tiene su curvatura máxima en el eje mayor, y su curvatura mínima en el eje menor. (Como en el ejercicio 17, esto es válido para cualquier elipse).

19. Maximización de la curvatura de una hélice En el ejemplo 5 encontramos que la curvatura de la hélice $\mathbf{r}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \operatorname{sen} t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$ $(a, b \geq 0)$ es kappa $= a/(a^2 + b^2)$. ¿Cuál es el máximo valor que puede tener kappa para un valor dado de b? Justifique su respuesta.

20. Curvatura total Obtenemos la **curvatura total** de la porción de una curva suave que va de $s = s_0$ a $s = s_1 > s_0$ integrando kappa de s_0 a s_1. Si la curva tiene algún otro parámetro (por ejemplo, t), entonces, la curvatura total es

$$K = \int_{s_0}^{s_1} \kappa \, ds = \int_{t_0}^{t_1} \kappa \frac{ds}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_1} \kappa |\mathbf{v}| \, dt,$$

donde t_0 y t_1 corresponden a s_0 y s_1. Calcule las curvaturas totales de

a) La porción de la hélice $\mathbf{r}(t) = (3 \cos t)\mathbf{i} + (3 \operatorname{sen} t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 4\pi$.

b) La parábola $y = x^2$, $-\infty < x < \infty$.

21. Obtenga una ecuación para el círculo de curvatura que corresponde a la curva $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j}$, en el punto $(\pi/2, 1)$. (La curva parametriza la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ en el plano xy).

22. Determine una ecuación para el círculo de curvatura de la curva $\mathbf{r}(t) = (2 \ln t)\mathbf{i} - [t + (1/t)]\mathbf{j}$, $e^{-2} \leq t \leq e^2$, en el punto $(0, -2)$, donde $t = 1$.

T La fórmula

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{\left[1 + (f'(x))^2\right]^{3/2}},$$

obtenida en el ejercicio 5, expresa la curvatura kappa(x) de una curva plana dos veces diferenciable $y = f(x)$ como función de x. Obtenga la función de curvatura de cada una de las curvas de los ejercicios 23 a 26. Luego, grafique $f(x)$ junto con $\kappa(x)$ sobre el intervalo que se especifica. Encontrará algunas sorpresas.

23. $y = x^2$, $-2 \leq x \leq 2$ **24.** $y = x^4/4$, $-2 \leq x \leq 2$

25. $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq 2\pi$ **26.** $y = e^x$, $-1 \leq x \leq 2$

27. Círculo osculador Demuestre que el centro del círculo osculador para la parábola $y = x^2$ en el punto (a, a^2) está ubicado en $\left(-4a^3, 3a^2 + \frac{1}{2}\right)$.

28. Círculo osculador Encuentre una parametrización del círculo osculador para la parábola $y = x^2$ cuando $x = 1$.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 29 a 36, use un software matemático para explorar el círculo osculador en un punto P de una curva plana donde $\kappa \neq 0$. Use dicho software para ejecutar los siguientes pasos:

a) Grafique la curva plana expresada en forma paramétrica o como una función en el intervalo especificado para ver su apariencia.

b) Calcule la curvatura κ de la curva en t_0 usando la fórmula adecuada de los ejercicios 5 o 6. Use la parametrización $x = t$ y $y = f(t)$ si la curva está dada como una función $y = f(x)$.

c) Obtenga el vector normal unitario $\mathbf{N}$ en t_0. Observe que los signos de las componentes de $\mathbf{N}$ dependen de que el vector tangente unitario $\mathbf{T}$, en $t = t_0$, gire en el sentido de las manecillas del reloj o en el sentido contrario. (Vea el ejercicio 7).

d) Si $\mathbf{C} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ es el vector que va del origen al centro (a, b) del círculo osculador, determine el centro $\mathbf{C}$ a partir de la ecuación vectorial

$$\mathbf{C} = \mathbf{r}(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}\mathbf{N}(t_0).$$

El punto $P(x_0, y_0)$ en la curva está dado por el vector de posición $\mathbf{r}(t_0)$.

e) Grafique implícitamente la ecuación $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 1/\kappa^2$ del círculo osculador. Luego, trace juntos la curva y el círculo osculador. Tal vez sea necesario experimentar con el tamaño de la ventana de la gráfica, pero asegúrese de que los ejes tengan la misma escala.

29. $\mathbf{r}(t) = (3 \cos t)\mathbf{i} + (5 \operatorname{sen} t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $t_0 = \pi/4$

30. $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}^3 t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $t_0 = \pi/4$

31. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t^3 - 3t)\mathbf{j}$, $-4 \leq t \leq 4$, $t_0 = 3/5$

32. $\mathbf{r}(t) = (t^3 - 2t^2 - t)\mathbf{i} + \dfrac{3t}{\sqrt{1 + t^2}}\mathbf{j}$, $-2 \leq t \leq 5$, $t_0 = 1$

33. $\mathbf{r}(t) = (2t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (2 - 2 \cos t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 3\pi$, $t_0 = 3\pi/2$

34. $\mathbf{r}(t) = (e^{-t} \cos t)\mathbf{i} + (e^{-t} \operatorname{sen} t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 6\pi$, $t_0 = \pi/4$

35. $y = x^2 - x$, $-2 \leq x \leq 5$, $x_0 = 1$

36. $y = x(1 - x)^{2/5}$, $-1 \leq x \leq 2$, $x_0 = 1/2$

13.5 Componentes tangencial y normal de la aceleración

Si usted viaja a lo largo de una curva en el espacio, representar los vectores que describen su movimiento en el sistema de coordenadas cartesiano $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ no es realmente relevante para usted. Lo que sí es importante son los vectores representativos de la dirección hacia donde se dirige (el vector tangente unitario $\mathbf{T}$), la dirección en la que gira su trayectoria (el vector normal unitario $\mathbf{N}$), y la tendencia de su movimiento a "torcerse" y salirse del plano creado por estos vectores en la dirección perpendicular a dicho plano (definido por el *vector binormal unitario* $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$). Expresar el vector de aceleración a lo largo de la curva como una combinación lineal de este sistema **TNB** de vectores unitarios mutuamente ortogonales, que viaja

siguiendo al movimiento (figura 13.23), es particularmente revelador de la naturaleza de la trayectoria y del movimiento a lo largo de ésta.

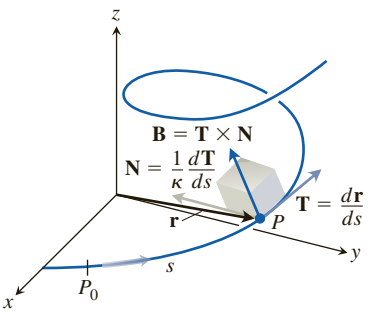


FIGURA 13.23 El marco o sistema **TNB** de vectores unitarios mutuamente ortogonales que viajan a lo largo de una curva en el espacio.

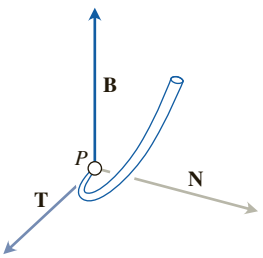


FIGURA 13.24 Los vectores **T**, **N** y **B** (en ese orden) definen un marco de referencia vectorial de mano derecha de vectores unitarios mutuamente ortogonales en el espacio.

El marco TNB

El **vector binormal** de una curva en el espacio es $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$, un vector unitario ortogonal a **T** y **N** (figura 13.24). Juntos, **T**, **N** y **B** definen un marco de referencia vectorial de mano derecha, en movimiento, que desempeña un papel central para el cálculo de las trayectorias de las partículas que se mueven en el espacio. Se conoce como **marco de Frenet** (o sistema Frenet, en honor de Jean-Frédéric Frenet, 1816-1900) o **marco TNB**.

Componentes tangencial y normal de la aceleración

Cuando un cuerpo es acelerado por la gravedad, los frenos o una combinación de motores en un cohete, por lo general deseamos saber qué parte de la aceleración actúa en la dirección del movimiento, es decir, en la dirección tangencial **T**. Esto se puede calcular mediante la regla de la cadena, para rescribir **v** como

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \mathbf{T}\frac{ds}{dt}.$$

Luego, diferenciamos los dos extremos de esta cadena de igualdades para obtener

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{T}\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{T}}{dt} \\ &= \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\left(\frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\left(\kappa\mathbf{N}\frac{ds}{dt}\right) \qquad \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N} \\ &= \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\mathbf{N}.\end{aligned}$$

DEFINICIÓN Si el vector de aceleración se escribe como

$$\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}, \tag{1}$$

entonces,

$$a_T = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt}|\mathbf{v}| \qquad \text{y} \qquad a_N = \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \kappa|\mathbf{v}|^2 \tag{2}$$

son las componentes escalares **tangencial** y **normal** de la aceleración.

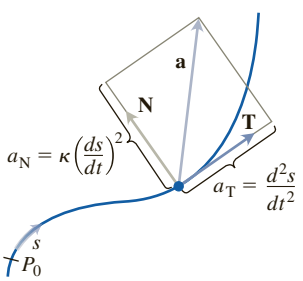


FIGURA 13.25 Componentes tangencial y normal de la aceleración. La aceleración **a** siempre se encuentra en el plano de **T** y **N**, ortogonal a **B**.

Advierta que el vector binormal **B** no aparece en la ecuación (1). Sin importar cuánto parezca torcerse y girar en el espacio la trayectoria del cuerpo que observamos moverse, la aceleración **a** *siempre está en el plano de* **T** y **N**, el cual es ortogonal a **B**. La ecuación también nos indica exactamente cuánto de la aceleración es tangente al movimiento (d^2s/dt^2) y cuánto es normal al movimiento [$\kappa(ds/dt)^2$] (figura 13.25).

¿Qué información podemos obtener de la ecuación (2)? Por definición, la aceleración **a** es la razón de cambio de la velocidad **v** y, en general, tanto la longitud como la dirección de **v** varían cuando un cuerpo se mueve a lo largo de su trayectoria. La componente tangencial de la aceleración a_T mide la razón del cambio de la *longitud* de **v** (es decir, el cambio en la rapidez). La componente normal de la aceleración a_N mide la razón de cambio de la *dirección* de **v**.

Observe que la componente escalar normal de la aceleración es el producto de la curvatura por el *cuadrado* de la rapidez. Esto explica por qué no se debe acelerar cuando su automóvil da una vuelta muy pronunciada (kappa grande), con gran rapidez ($|\mathbf{v}|$ grande). Si duplica la rapidez de su automóvil, experimentará cuatro veces la componente normal de la aceleración para la misma curvatura.

Si un cuerpo se mueve en una circunferencia con una rapidez constante, d^2s/dt^2 es cero y la aceleración apunta en la dirección de **N** hacia el centro de la circunferencia. Si el cuerpo acelera o frena, **a** tiene una componente tangencial no nula (figura 13.26).

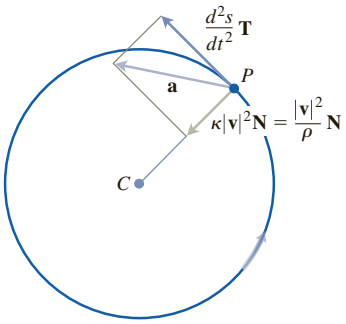


FIGURA 13.26 Componentes tangencial y normal de la aceleración de un cuerpo que aumenta su rapidez conforme se mueve en sentido contrario al de las manecillas del reloj, alrededor de una circunferencia de radio p.

Para calcular a_N, por lo general usamos la fórmula $a_N = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - {a_T}^2}$, la cual proviene de despejar a_N de la ecuación $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = {a_T}^2 + {a_N}^2$. Con esta fórmula, podemos obtener a_N sin tener que calcular primero κ.

Fórmula para calcular la componente normal de la aceleración

$$a_N = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - {a_T}^2} \tag{3}$$

EJEMPLO 1 Sin encontrar $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$, escriba la aceleración del movimiento

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t - t \cos t)\mathbf{j}, \qquad t > 0$$

en la forma $\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$. (La trayectoria del movimiento es la involuta de la circunferencia de la figura 13.27. Vea también la sección 13.3, ejercicio 19).

Solución Usamos la primera de las ecuaciones (2) para determinar a_T:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t + t\cos t)\mathbf{i} + (\cos t - \cos t + t \operatorname{sen} t)\mathbf{j} \\ &= (t\cos t)\mathbf{i} + (t \operatorname{sen} t)\mathbf{j}\end{aligned}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2 \operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{t^2} = |t| = t \qquad t > 0$$

$$a_T = \frac{d}{dt}|\mathbf{v}| = \frac{d}{dt}(t) = 1. \qquad \text{Ecuación (2)}$$

Al conocer a_T, utilizamos la ecuación (3) para obtener a_N:

$$\mathbf{a} = (\cos t - t \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t + t\cos t)\mathbf{j}$$

$$|\mathbf{a}|^2 = t^2 + 1 \qquad \text{Después de un poco de álgebra}$$

$$\begin{aligned}a_N &= \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - {a_T}^2} \\ &= \sqrt{(t^2 + 1) - (1)} = \sqrt{t^2} = t.\end{aligned}$$

Luego, empleamos la ecuación (1) para determinar $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N} = (1)\mathbf{T} + (t)\mathbf{N} = \mathbf{T} + t\mathbf{N}. \quad \blacksquare$$

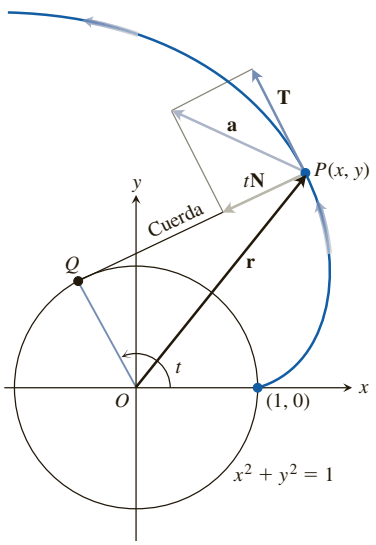


FIGURA 13.27 Las componentes tangencial y normal de la aceleración del movimiento $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t - t\cos t)\mathbf{j}$, para $t > 0$. Si una cuerda enrollada en una circunferencia fija se desenrolla mientras se mantiene tensa en el plano de la circunferencia, su extremo P traza una involuta de la circunferencia (ejemplo 1).

Torsión

¿Cómo se comporta $d\mathbf{B}/ds$ en relación con $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ y $\mathbf{B}$? De acuerdo con la regla para diferenciar un producto cruz (sección 13.1), tenemos

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d(\mathbf{T} \times \mathbf{N})}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \times \mathbf{N} + \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds}.$$

Puesto que $\mathbf{N}$ está en la dirección de $d\mathbf{T}/ds$, $(d\mathbf{T}/ds) \times \mathbf{N} = \mathbf{0}$ y

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \mathbf{0} + \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds}.$$

Aquí vemos que $d\mathbf{B}/ds$ es ortogonal a $\mathbf{T}$, puesto que un producto cruz es ortogonal a sus factores.

Como $d\mathbf{B}/ds$ también es ortogonal a $\mathbf{B}$ (este último tiene longitud constante), se deduce que $d\mathbf{B}/ds$ es ortogonal al plano de $\mathbf{B}$ y $\mathbf{T}$. En otras palabras, $d\mathbf{B}/ds$ es paralela a $\mathbf{N}$, es decir, $d\mathbf{B}/ds$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{N}$. En símbolos,

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}.$$

El signo negativo en esta ecuación es una tradición. Al escalar τ se le llama la *torsión* a lo largo de la curva. Observe que

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{N} = -\tau\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = -\tau(1) = -\tau.$$

Usamos esta ecuación para nuestra siguiente definición.

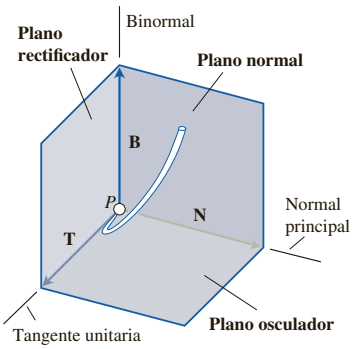


FIGURA 13.28 Los nombres de los tres planos determinados por **T**, **N** y **B**.

DEFINICIÓN Sea $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$. La función de **torsión** de una curva suave es

$$\tau = -\frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{N}. \tag{4}$$

A diferencia de la curvatura κ, la cual nunca es negativa, la torsión τ puede ser positiva, negativa o nula.

Los tres planos determinados por **T**, **N** y **B** están identificados en la figura 13.28. La curvatura $\kappa = |d\mathbf{T}/ds|$ puede considerarse como la razón a la cual el plano normal gira cuando el punto P se mueve a lo largo de su trayectoria. De manera análoga, la torsión $\tau = -(d\mathbf{B}/ds) \cdot \mathbf{N}$ es la razón a la cual el plano osculador gira alrededor de **T** cuando P se mueve a lo largo de la curva. La torsión mide cuánto se tuerce la curva.

Observe la figura 13.29. Si P es un tren que sube por una vía curva, la razón a la que las luces de sus faros giran de un lado a otro por unidad de distancia es la curvatura de la vía. La razón a la cual la locomotora tiende a salir del plano formado por **T** y **N** es la torsión. Es posible demostrar que una curva en el espacio es una hélice si y sólo si tiene una curvatura y una torsión constantes no nulas.

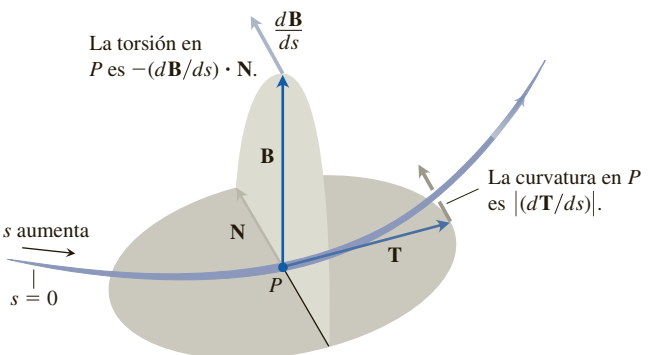


FIGURA 13.29 Todo cuerpo en movimiento viaja con un marco **TNB** que caracteriza la geometría de su trayectoria.

Fórmulas para calcular curvatura y torsión

Ahora presentamos las fórmulas fáciles de usar para calcular la curvatura y la torsión de una curva suave. De las ecuaciones (1) y (2), se tiene

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \left(\frac{ds}{dt}\mathbf{T}\right) \times \left[\frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\mathbf{N}\right] \qquad \mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = (ds/dt)\mathbf{T}$$

$$= \left(\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}\right)(\mathbf{T} \times \mathbf{T}) + \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^3(\mathbf{T} \times \mathbf{N})$$

$$= \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^3\mathbf{B}. \qquad \mathbf{T} \times \mathbf{T} = \mathbf{0} \text{ y } \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \mathbf{B}$$

De ahí que

$$|\mathbf{v} \times \mathbf{a}| = \kappa\left|\frac{ds}{dt}\right|^3|\mathbf{B}| = \kappa|\mathbf{v}|^3. \qquad \frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}| \quad \text{y} \quad |\mathbf{B}| = 1$$

Al despejar κ se obtiene la siguiente fórmula.

Fórmula vectorial para la curvatura

$$\kappa = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3} \tag{5}$$

La ecuación (5) permite calcular la curvatura, una propiedad geométrica de la curva, a partir de la velocidad y la aceleración de cualquier representación vectorial de la curva, tal que $|\mathbf{v}|$ sea diferente de cero. A partir de cualquier fórmula para el movimiento a lo largo de una curva, sin importar lo variable que sea el movimiento (siempre que $\mathbf{v}$ no se anule), podemos calcular una propiedad geométrica de la curva que, al parecer, no tiene que ver con la forma en que ésta se define paramétricamente.

La fórmula más utilizada para la torsión, que se deduce en textos más avanzados, está expresada como un determinante.

Fórmula para la torsión

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2} \qquad (\text{si } \mathbf{v} \times \mathbf{a} \neq \mathbf{0}) \tag{6}$$

Notación de Newton para derivadas

Los puntos de la ecuación (6) denotan diferenciación con respecto a t, una derivada por cada punto. Así, $\dot{x}$ ("x punto") significa dx/dt, $\ddot{x}$ ("x dos puntos") significa d^2x/dt^2, y $\dddot{x}$ ("x tres puntos") significa d^3x/dt^3. De manera similar, $\dot{y} = dy/dt$, etcétera.

Esta fórmula permite calcular la torsión directamente de las derivadas de las funciones componentes $x = f(t)$, $y = g(t)$ y $z = h(t)$, que conforman $\mathbf{r}$. El primer renglón del determinante proviene de $\mathbf{v}$, el segundo de $\mathbf{a}$, y el tercero de $\dot{\mathbf{a}} = d\mathbf{a}/dt$. La notación tradicional de Newton es a base de puntos para representar a las derivadas.

EJEMPLO 2 Use las ecuaciones (5) y (6) para determinar la curvatura kappa y la torsión τ para la hélice

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \operatorname{sen} t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}, \qquad a, b \geq 0, \qquad a^2 + b^2 \neq 0.$$

Solución Con la ecuación (5), calculamos la curvatura:

$$\mathbf{v} = -(a \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (a \cos t)\mathbf{j} + b\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = -(a \cos t)\mathbf{i} - (a \operatorname{sen} t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a \operatorname{sen} t & a \cos t & b \\ -a \cos t & -a \operatorname{sen} t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (ab \operatorname{sen} t)\mathbf{i} - (ab \cos t)\mathbf{j} + a^2\mathbf{k}$$

$$\kappa = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3} = \frac{\sqrt{a^2b^2 + a^4}}{(a^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{(a^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{a}{a^2 + b^2}. \tag{7}$$

Observe que la ecuación (7) coincide con el resultado del ejemplo 5 de la sección 13.4, donde calculamos la curvatura directamente de su definición.

Para evaluar la ecuación (6) y obtener la torsión, encontramos las entradas del determinante, diferenciando $\mathbf{r}$ con respecto a t. Ya tenemos a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$, y

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} = (a \operatorname{sen} t)\mathbf{i} - (a \cos t)\mathbf{j}.$$

Por lo tanto,

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2} = \frac{\begin{vmatrix} -a \operatorname{sen} t & a \cos t & b \\ -a \cos t & -a \operatorname{sen} t & 0 \\ a \operatorname{sen} t & -a \cos t & 0 \end{vmatrix}}{\left(a\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2}$$

Valor de $|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|$ de la ecuación 7

$$= \frac{b(a^2 \cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t)}{a^2(a^2 + b^2)}$$

$$= \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

A partir de esta última ecuación, vemos que la torsión de una hélice alrededor de un cilindro circular es constante. De hecho, la curvatura y la torsión constantes distinguen a la hélice de las otras curvas en el espacio. ■

Fórmulas para cálculo de curvas en el espacio

Vector tangente unitario: $\mathbf{T} = \dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$

Vector normal unitario principal: $\mathbf{N} = \dfrac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|}$

Vector binormal: $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$

Curvatura: $\kappa = \left|\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \dfrac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3}$

Torsión: $\tau = -\dfrac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{N} = \dfrac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2}$

Componentes escalares tangencial y normal de la aceleración:

$$\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$$

$$a_T = \frac{d}{dt}|\mathbf{v}|$$

$$a_N = \kappa|\mathbf{v}|^2 = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - a_T{}^2}$$

Ejercicios 13.5

Obtención de las componentes tangencial y normal

En los ejercicios 1 y 2, escriba $\mathbf{a}$ en la forma $\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$ sin calcular $\mathbf{T}$ ni $\mathbf{N}$.

1. $\mathbf{r}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \operatorname{sen} t)\mathbf{j} + bt\,\mathbf{k}$
2. $\mathbf{r}(t) = (1 + 3t)\mathbf{i} + (t - 2)\mathbf{j} - 3t\,\mathbf{k}$

En los ejercicios 3 a 6, escriba $\mathbf{a}$ en la forma $\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$ en el valor dado de t sin calcular $\mathbf{T}$ ni $\mathbf{N}$.

3. $\mathbf{r}(t) = (t + 1)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad t = 1$
4. $\mathbf{r}(t) = (t \cos t)\mathbf{i} + (t \operatorname{sen} t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad t = 0$
5. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t + (1/3)t^3)\mathbf{j} + (t - (1/3)t^3)\mathbf{k}, \quad t = 0$
6. $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \operatorname{sen} t)\mathbf{j} + \sqrt{2}e^t\mathbf{k}, \quad t = 0$

Obtención del marco TNB

En los ejercicios 7 y 8, obtenga $\mathbf{r}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ y $\mathbf{B}$ para el valor dado de t. Luego, encuentre las ecuaciones de los planos osculador, normal y rectificador para ese valor de t.

7. $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad t = \pi/4$
8. $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}, \quad t = 0$

En los ejercicios 9 a 16 de la sección 13.4, obtuvo **T**, **N** y κ. Ahora, en los ejercicios 9 a 16, obtenga **B** y t para esas curvas en el espacio.

9. $\mathbf{r}(t) = (3 \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (3 \cos t)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$

10. $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t - t \cos t)\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

11. $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \operatorname{sen} t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

12. $\mathbf{r}(t) = (6 \operatorname{sen} 2t)\mathbf{i} + (6 \cos 2t)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}(t) = (t^3/3)\mathbf{i} + (t^2/2)\mathbf{j}, \quad t > 0$

14. $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}^3 t)\mathbf{j}, \quad 0 < t < \pi/2$

15. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (a \cosh(t/a))\mathbf{j}, \quad a > 0$

16. $\mathbf{r}(t) = (\cosh t)\mathbf{i} - (\operatorname{senh} t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

Aplicaciones físicas

17. En el velocímetro de su automóvil se leen 35 mph continuamente. ¿Podría estar acelerando? Explique su respuesta.

18. ¿Puede decirse algo acerca de la aceleración de una partícula que se mueve con rapidez constante? Justifique su respuesta.

19. ¿Puede decirse algo acerca de la rapidez de una partícula cuya aceleración siempre es ortogonal a su velocidad? Justifique su respuesta.

20. Un objeto de masa m viaja a lo largo de la parábola $y = x^2$ con una rapidez constante de 10 unidades/s. ¿Cuál es la fuerza sobre el objeto debida a su aceleración en (0, 0)? ¿Y en el punto $(2^{1/2}, 2)$? Escriba sus respuestas en términos de **i** y **j**. (Recuerde la ley de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$).

Teoría y ejemplos

21. Demuestre que kappa y τ son iguales a cero para la recta

$$\mathbf{r}(t) = (x_0 + At)\mathbf{i} + (y_0 + Bt)\mathbf{j} + (z_0 + Ct)\mathbf{k}.$$

22. Demuestre que una partícula en movimiento continuará moviéndose en línea recta si la componente normal de su aceleración es cero.

23. Atajo para la curvatura Si usted ya conoce $|a_N|$ y $|\mathbf{v}|$, entonces, la fórmula $a_N = \kappa|\mathbf{v}|^2$ ofrece una manera conveniente de obtener la curvatura. Úsela para calcular la curvatura y el radio de curvatura de la curva

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t - t \cos t)\mathbf{j}, \quad t > 0.$$

(Tome a_N y $|\mathbf{v}|$ del ejemplo 1).

24. ¿Qué se puede decir acerca de la torsión de una curva suave y plana $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$? Justifique su respuesta.

25. Curvas diferenciables con torsión cero en planos El hecho de que una curva suficientemente diferenciable con torsión cero se encuentre en un plano es un caso especial de la situación en la que una partícula cuya velocidad permanece perpendicular a un vector fijo **C** se mueve en un plano perpendicular a **C**. Esto, a la vez, puede verse como el siguiente resultado.

Suponga que $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ es dos veces diferenciable para toda t en el intervalo $[a, b]$, que $\mathbf{r} = 0$ cuando $t = a$, y que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = 0$ para toda t en el intervalo $[a, b]$. Demuestre que $h(t) = 0$ para toda t en el intervalo $[a, b]$. (*Sugerencia:* Inicie con $\mathbf{a} = d^2\mathbf{r}/dt^2$ y aplique las condiciones iniciales en sentido inverso).

26. Fórmula para calcular τ a partir de B y v Si comenzamos con la definición de $\tau = -(d\mathbf{B}/ds) \cdot \mathbf{N}$ y aplicamos la regla de la cadena para reescribir $d\mathbf{B}/ds$ como

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d\mathbf{B}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{d\mathbf{B}}{dt}\frac{1}{|\mathbf{v}|},$$

llegamos a la fórmula

$$\tau = -\frac{1}{|\mathbf{v}|}\left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{N}\right).$$

Use esta fórmula para determinar la torsión de la hélice del ejemplo 2.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Redondee las respuestas a cuatro decimales. Use un software matemático para determinar **v**, **a**, la rapidez, **T**, **N**, **B**, kappa, τ y las componentes tangencial y normal de la aceleración para las curvas de los ejercicios 27 a 30, considerando los valores dados de t.

27. $\mathbf{r}(t) = (t \cos t)\mathbf{i} + (t \operatorname{sen} t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t = \sqrt{3}$

28. $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \operatorname{sen} t)\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}, \quad t = \ln 2$

29. $\mathbf{r}(t) = (t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j} + \sqrt{-t}\mathbf{k}, \quad t = -3\pi$

30. $\mathbf{r}(t) = (3t - t^2)\mathbf{i} + (3t^2)\mathbf{j} + (3t + t^3)\mathbf{k}, \quad t = 1$

13.6 Velocidad y aceleración en coordenadas polares

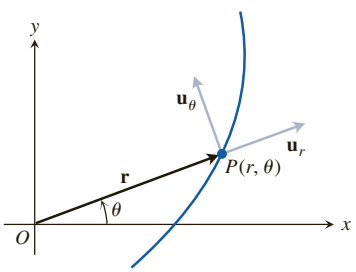


FIGURA 13.30 La longitud de **r** es la coordenada polar positiva r del punto P. Así, $\mathbf{u}_r$, que es $\mathbf{r}/|\mathbf{r}|$, también es $\mathbf{r}/r$. Las ecuaciones (1) expresan $\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{u}_\theta$ en términos de **i** y **j**.

En esta sección deduciremos las ecuaciones de velocidad y aceleración en coordenadas polares. Estas ecuaciones son útiles para calcular las trayectorias de planetas y satélites en el espacio, y las usaremos para revisar las tres leyes de Kepler referentes al movimiento planetario.

Movimiento en coordenadas polares y cilíndricas

Cuando una partícula en el punto $P(r, \theta)$ se mueve a lo largo de una curva en el plano de coordenadas polares, expresamos su posición, velocidad y aceleración en términos de los vectores unitarios móviles

$$\mathbf{u}_r = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}, \qquad \mathbf{u}_\theta = -(\operatorname{sen}\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j}, \tag{1}$$

representados en la figura 13.30. El vector $\mathbf{u}_r$ apunta en la dirección del vector de posición $\overrightarrow{OP}$, de manera que $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$. El vector $\mathbf{u}_\theta$, ortogonal a $\mathbf{u}_r$, apunta en la dirección de crecimiento de θ.

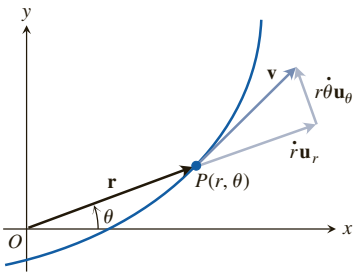


FIGURA 13.31 En coordenadas polares, el vector de velocidad es $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$.

A partir de las ecuaciones (1), encontramos que

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta} = -(\operatorname{sen}\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j} = \mathbf{u}_\theta$$
$$\frac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta} = -(\cos\theta)\mathbf{i} - (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j} = -\mathbf{u}_r.$$

Cuando diferenciamos $\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{u}_\theta$ con respecto a t, podemos saber cómo cambian con el tiempo. La regla de la cadena da por resultado

$$\dot{\mathbf{u}}_r = \frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta}\dot{\theta} = \dot{\theta}\mathbf{u}_\theta, \qquad \dot{\mathbf{u}}_\theta = \frac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta}\dot{\theta} = -\dot{\theta}\mathbf{u}_r. \tag{2}$$

Por lo tanto, podemos expresar el vector de velocidad en términos de $\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{u}_\theta$ como

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{u}_r) = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\mathbf{u}}_r = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta.$$

Vea la figura 13.31. Al igual que en la sección anterior, usamos la notación de Newton con puntos para denotar las derivadas con respecto al tiempo, con la finalidad de simplificar las fórmulas: $\ddot{\mathbf{u}}_r$ significa $d\mathbf{u}_r/dt$, $\dot{\theta}$ significa $d\theta/dt$, y así sucesivamente.

La aceleración es

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = (\ddot{r}\mathbf{u}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{u}}_r) + (\dot{r}\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{u}}_\theta).$$

Cuando se usan las ecuaciones (2) para calcular $\dot{\mathbf{u}}_r$ y $\dot{\mathbf{u}}_\theta$, y las componentes están separadas, la ecuación para la aceleración en términos de $\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{u}_\theta$ se convierte en

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta.$$

Para aplicar estas ecuaciones al movimiento en el espacio, agregamos $z\mathbf{k}$ al lado derecho de la ecuación $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$. Entonces, en *coordenadas cilíndricas*, tenemos

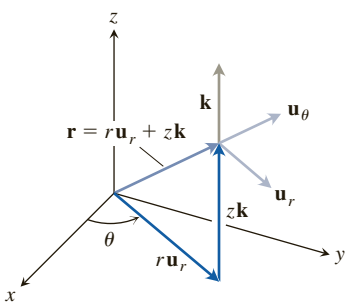


FIGURA 13.32 Vector de posición y vectores unitarios básicos en coordenadas cilíndricas. Observe que $|\mathbf{r}| \neq r$ si $z \neq 0$, ya que $|\mathbf{r}| = \sqrt{r^2 + z^2}$.

Posición:	$\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r + z\mathbf{k}$	
Velocidad:	$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + \dot{z}\mathbf{k}$	(3)
Aceleración:	$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta + \ddot{z}\mathbf{k}$	

Los vectores $\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_\theta$ y $\mathbf{k}$ forman un marco de referencia vectorial de mano derecha (figura 13.32), en el cual

$$\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\theta = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{u}_\theta \times \mathbf{k} = \mathbf{u}_r, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{u}_r = \mathbf{u}_\theta.$$

Los planetas se mueven en planos

La ley de Newton de la gravitación afirma que si $\mathbf{r}$ es el radio vector desde el centro de un sol de masa M hasta el centro de un planeta de masa m, entonces, la fuerza $\mathbf{F}$ de la atracción gravitacional entre el planeta y el sol es

$$\mathbf{F} = -\frac{GmM}{|\mathbf{r}|^2}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

(figura 13.33). El número G es la **constante de gravitación universal**. Si medimos la masa en kilogramos, la fuerza en newtons y la distancia en metros, G es aproximadamente $6.6738 \times 10^{-11}\ \text{Nm}^2\,\text{kg}^{-2}$.

Al combinar la ley de la gravitación con la segunda ley de Newton, $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$, para la fuerza que actúa sobre el planeta, tenemos

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GmM}{|\mathbf{r}|^2}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|},$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{|\mathbf{r}|^2}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}.$$

Por lo tanto, el planeta se acelera todo el tiempo hacia el centro de masa del sol.

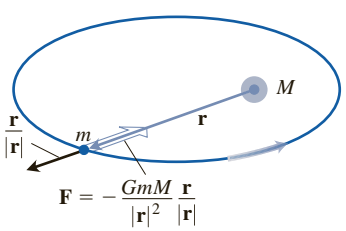


FIGURA 13.33 La fuerza de gravedad está dirigida a lo largo de la línea que une los centros de masa.

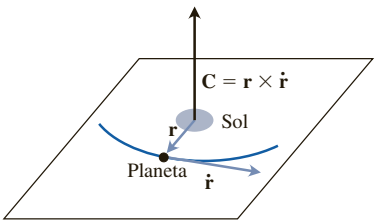


FIGURA 13.34 Un planeta que obedece las leyes de Newton referentes a la gravitación y el movimiento viaja en el plano que pasa por el centro de masa del sol perpendicular a $\mathbf{C} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$.

Puesto que $\ddot{\mathbf{r}}$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{r}$, tenemos

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}.$$

A partir de esta última ecuación,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \underbrace{\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}}_{\mathbf{0}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}.$$

Se deduce que

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{C} \tag{4}$$

para algún vector constante $\mathbf{C}$.

La ecuación (4) indica que $\mathbf{r}$ y $\dot{\mathbf{r}}$ siempre se encuentran en un plano perpendicular a $\mathbf{C}$. Por lo tanto, el planeta se mueve en un plano fijo que pasa por el centro de su sol (figura 13.34). A continuación veremos cómo las leyes de Kepler describen el movimiento de manera precisa.

Primera ley de Kepler (ley de la elipse)

La *primera ley de Kepler* afirma que la trayectoria de un planeta es una elipse, en uno de cuyos focos se encuentra el sol. La excentricidad de la elipse es

$$e = \frac{r_0 {v_0}^2}{GM} - 1 \tag{5}$$

y la ecuación polar [vea la sección 11.7, ecuación (5)] es

$$r = \frac{(1 + e)r_0}{1 + e\cos\theta}. \tag{6}$$

Aquí, v_0 es la rapidez cuando el planeta se posiciona a la distancia mínima r_0 del sol. Se omite la demostración, pues es muy larga. La masa del sol M es 1.99×10^{30} kg.

Segunda ley de Kepler (ley de las áreas iguales)

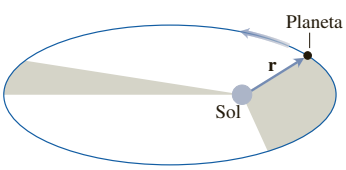


FIGURA 13.35 La recta que une un planeta con su sol barre áreas iguales en tiempos iguales.

La *segunda ley de Kepler* afirma que el radio vector desde el sol hasta un planeta (el vector $\mathbf{r}$ en nuestro modelo) barre áreas iguales en tiempos iguales (figura 13.35). En la figura, suponemos que el plano del planeta es xy, por lo que el vector unitario de $\mathbf{C}$ es $\mathbf{k}$. Introducimos coordenadas polares en el plano, eligiendo como recta inicial $\theta = 0$, la dirección $\mathbf{r}$ cuando $|\mathbf{r}| = r$ es un valor mínimo. Entonces, en $t = 0$, tenemos que $r(0) = r_0$ es un mínimo. Así,

$$\dot{r}|_{t=0} = \left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=0} = 0 \quad \text{y} \quad v_0 = |\mathbf{v}|_{t=0} = \left[r\dot{\theta}\right]_{t=0}. \qquad \text{Ecuación (3), } \dot{z} = 0$$

Para deducir la segunda ley de Kepler, usamos la ecuación (3) con la finalidad de evaluar el producto cruz $\mathbf{C} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ a partir de la ecuación (4):

$$\begin{aligned}
\mathbf{C} &= \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \\
&= r\mathbf{u}_r \times (\dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta) && \text{Ecuación (3), } \dot{z} = 0 \\
&= r\dot{r}\underbrace{(\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_r)}_{\mathbf{0}} + r(r\dot{\theta})\underbrace{(\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\theta)}_{\mathbf{k}} \\
&= r(r\dot{\theta})\mathbf{k}. && (7)
\end{aligned}$$

Al igualar t a cero, se demuestra que

$$\mathbf{C} = \left[r(r\dot{\theta})\right]_{t=0}\mathbf{k} = r_0 v_0 \mathbf{k}.$$

Sustituyendo este valor de $\mathbf{C}$ en la ecuación (7), se obtiene

$$r_0 v_0 \mathbf{k} = r^2\dot{\theta}\mathbf{k}, \quad \text{o} \quad r^2\dot{\theta} = r_0 v_0.$$

Así es como obtenemos el área. La diferencial de área en coordenadas polares es

$$dA = \frac{1}{2}r^2\,d\theta$$

(sección 11.5). Por consiguiente, dA/dt tiene el valor constante

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}r_0v_0. \tag{8}$$

Así, dA/dt es constante, y se obtiene la segunda ley de Kepler.

Tercera ley de Kepler (ley del tiempo-distancia)

El tiempo T que tarda un planeta en dar una vuelta alrededor de su sol es el **periodo orbital** del planeta. La *tercera ley de Kepler* afirma que T y el semieje mayor a de la órbita están relacionados por la ecuación

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

Puesto que el lado derecho de esta ecuación es constante en un sistema solar dado, la razón de T^2 con respecto a a^3 *es la misma para cada planeta del sistema.*

Incluimos aquí una deducción parcial de la tercera ley de Kepler. El área acotada por la órbita elíptica del planeta se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \int_0^T dA \\ &= \int_0^T \frac{1}{2}r_0v_0\,dt \qquad \text{Ecuación (8)} \\ &= \frac{1}{2}Tr_0v_0.\end{aligned}$$

Si b es el semieje menor, el área de la elipse es πab, por lo que

$$T = \frac{2\pi ab}{r_0v_0} = \frac{2\pi a^2}{r_0v_0}\sqrt{1-e^2}. \qquad \text{Para cualquier elipse, } b = a\sqrt{1-e^2}. \tag{9}$$

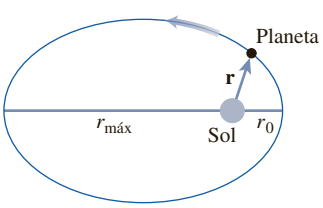


FIGURA 13.36 La longitud del eje mayor de la elipse es $2a = r_0 + r_{máx}$.

Sólo queda expresar a y e en términos de r_0, v_0, G y M. La ecuación (5) permite hacer esto en el caso de e. Para a, observamos que al igualar θ a π en la ecuación (6), se obtiene

$$r_{máx} = r_0\frac{1+e}{1-e}.$$

Por lo tanto, de acuerdo con la figura 13.36,

$$2a = r_0 + r_{máx} = \frac{2r_0}{1-e} = \frac{2r_0GM}{2GM - r_0v_0{}^2}. \tag{10}$$

Al elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación (9) y sustituir los resultados de las ecuaciones (5) y (10), obtenemos la tercera ley de Kepler (ejercicio 9).

Ejercicios 13.6

En los ejercicios 1 a 5, obtenga los vectores de velocidad y aceleración en términos de $\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{u}_\theta$.

1. $r = a(1 - \cos\theta)$ y $\dfrac{d\theta}{dt} = 3$

2. $r = a \operatorname{sen} 2\theta$ y $\dfrac{d\theta}{dt} = 2t$

3. $r = e^{a\theta}$ y $\dfrac{d\theta}{dt} = 2$

4. $r = a(1 + \operatorname{sen} t)$ y $\theta = 1 - e^{-t}$

5. $r = 2\cos 4t$ y $\theta = 2t$

6. Tipo de órbita ¿Para cuáles valores de v_0 en la ecuación (5) la órbita de la ecuación (6) es una circunferencia? ¿Una elipse? ¿Una parábola? ¿Una hipérbola?

7. Órbitas circulares Demuestre que un planeta con una órbita circular se mueve con rapidez constante. (*Sugerencia:* Considere que esto es una consecuencia de una de las leyes de Kepler).

8. Suponga que $\mathbf{r}$ es el vector de posición de una partícula que se desplaza a lo largo de una curva plana, y que dA/dt es la razón a la cual el vector barre el área. Sin usar coordenadas y suponiendo que existen las derivadas necesarias, dé un argumento geométrico con base en incrementos y límites para demostrar la validez de la ecuación

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}|.$$

9. Tercera ley de Kepler Complete la deducción de la tercera ley de Kepler [la parte que sigue de la ecuación (10)].

10. ¿Con los datos de la siguiente tabla, se comprueba la tercera ley de Kepler? Explique su razonamiento.

Planeta	Semieje mayor a (10^{10} m)	Periodo T (años)
Mercurio	5.79	0.241
Venus	10.81	0.615
Marte	22.78	1.881
Saturno	142.70	29.457

11. Eje mayor de la Tierra Calcule la longitud del eje mayor de la órbita de la Tierra si su periodo orbital es de 365.256 días.

12. Calcule la longitud del eje mayor de la órbita de Urano si su periodo orbital es de 84 años.

13. La excentricidad de la órbita de la Tierra es $e = 0.0167$, por lo que la órbita es casi circular, con radio aproximadamente de 150×10^6 km. Halle la razón dA/dt en unidades de km^2/s que satisfaga la segunda ley de Kepler.

14. Periodo orbital de Júpiter Calcule el periodo orbital de Júpiter, suponiendo que $a = 77.8 \times 10^{10}$ m.

15. Masa de Júpiter Io es una de las lunas de Júpiter. Tiene un semieje mayor de 0.042×10^{10} m y un periodo orbital de 1.769 días. Utilice estos datos para calcular la masa de Júpiter.

16. Distancia de la Tierra a la Luna El periodo de rotación de la Luna alrededor de la Tierra es de 2.36055×10^6 s. ¿Aproximadamente a qué distancia se encuentra la Luna?

Capítulo 13 Preguntas de repaso

1. Enuncie las reglas para diferenciar e integrar las funciones vectoriales. Dé ejemplos.

2. ¿Cómo se define y calcula la velocidad, rapidez, dirección del movimiento y aceleración de un cuerpo que se desplaza a lo largo de una curva en el espacio suficientemente diferenciable? Dé un ejemplo.

3. ¿Qué tienen de especial las derivadas de las funciones vectoriales con longitud constante? Dé un ejemplo.

4. ¿Cuáles son las ecuaciones vectoriales y paramétricas para el movimiento de un proyectil ideal? ¿Cómo obtiene la altura máxima, el tiempo de vuelo y el alcance de un proyectil? Dé ejemplos.

5. ¿Cómo se define y calcula la longitud de un segmento de una curva suave en el espacio? Dé un ejemplo. ¿Cuáles hipótesis matemáticas están implicadas en la definición?

6. ¿Cómo se mide la distancia a lo largo de una curva suave en el espacio desde un punto base preseleccionado? Dé un ejemplo.

7. ¿Qué es el vector tangente unitario a una curva diferenciable? Dé un ejemplo.

8. Defina curvatura, círculo de curvatura (círculo osculador), centro y radio de curvatura para curvas dos veces diferenciables en el plano. Dé ejemplos. ¿Qué curvas tienen curvatura cero? ¿Cuáles tienen curvatura constante?

9. ¿Qué es un vector normal principal de una curva plana? ¿Cuándo está definido? ¿Hacia dónde apunta? Dé un ejemplo.

10. ¿Cómo define $\mathbf{N}$ y κ para curvas en el espacio? ¿Cómo se relacionan estas cantidades? Dé ejemplos.

11. ¿Qué es el vector binormal de una curva? Dé un ejemplo. ¿Cómo se relaciona este vector con la torsión de la curva? Dé un ejemplo.

12. ¿Qué fórmulas permiten expresar la aceleración de un cuerpo en movimiento como la suma de sus componentes normal y tangencial? Dé un ejemplo. ¿Por qué desearíamos expresar la aceleración de este modo? ¿Qué ocurre si el cuerpo se mueve con rapidez constante? ¿Y con rapidez constante sobre una circunferencia?

13. Enuncie las leyes de Kepler.

Capítulo 13 Ejercicios de práctica

Movimiento en el plano

En los ejercicios 1 y 2, grafique las curvas y bosqueje sus vectores de velocidad y aceleración para los valores dados de t. Luego, escriba $\mathbf{a}$ en la forma $\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$ sin obtener $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$, y encuentre κ en los valores dados de t.

1. $\mathbf{r}(t) = (4\cos t)\mathbf{i} + \left(\sqrt{2}\,\text{sen}\,t\right)\mathbf{j}, \quad t = 0 \text{ y } \pi/4$

2. $\mathbf{r}(t) = \left(\sqrt{3}\sec t\right)\mathbf{i} + \left(\sqrt{3}\tan t\right)\mathbf{j}, \quad t = 0$

3. La posición de una partícula en el plano en el instante t es

$$\mathbf{r} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{i} + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{j}.$$

Calcule la velocidad máxima de la partícula.

4. Suponga que $\mathbf{r}(t) = (e^t\cos t)\mathbf{i} + (e^t\,\text{sen}\,t)\mathbf{j}$. Demuestre que el ángulo entre $\mathbf{r}$ y $\mathbf{a}$ jamás cambia. ¿Cuál *es* ese ángulo?

5. Cálculo de la curvatura En el punto P, la velocidad y la aceleración de una partícula que se mueve en el plano son $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 15\mathbf{j}$. Calcule la curvatura de la trayectoria de la partícula en P.

6. Determine el punto en la curva $y = e^x$ donde la curvatura es máxima.

7. Una partícula se mueve a lo largo de la circunferencia unitaria en el plano xy. Su posición en el instante t es $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, donde x y y son funciones diferenciables de t. Obtenga dy/dt si $\mathbf{v}\cdot\mathbf{i} = y$. ¿El movimiento se realiza en el sentido al de las manecillas del reloj o en sentido contrario?

8. Usted manda un mensaje a través de un tubo neumático que sigue la curva $9y = x^3$ (distancia en metros). En el punto (3, 3), $\mathbf{v}\cdot\mathbf{i} = 4$ y $\mathbf{a}\cdot\mathbf{i} = -2$. Obtenga los valores de $\mathbf{v}\cdot\mathbf{j}$ y $\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}$ en (3, 3).

9. Caracterización del movimiento circular Una partícula se mueve en el plano de forma que sus vectores de velocidad y posición siempre son ortogonales. Demuestre que la partícula se mueve en una circunferencia con centro en el origen.

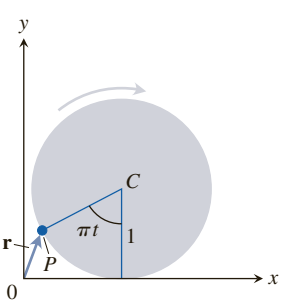
10. Rapidez a lo largo de una cicloide Una rueda circular con radio de 1 ft y centro en C rueda hacia la derecha a lo largo del eje x dando media vuelta por segundo. (Vea la figura). En el instante t (en segundos), el vector de posición del punto P en la circunferencia de la rueda es

$$\mathbf{r} = (\pi t - \text{sen}\,\pi t)\mathbf{i} + (1 - \cos\pi t)\mathbf{j}.$$

a) Dibuje la curva trazada por P durante el intervalo $0 \le t \le 3$.

b) Determine $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$ en $t = 0$, 1, 2 y 3 y agregue estos vectores a su dibujo.

c) En un instante dado, ¿cuál es la rapidez hacia delante del punto superior de la rueda? ¿Y la de C?



Movimiento de proyectiles

11. Lanzamiento Una bala pierde contacto con la mano que la lanza a 6.5 ft sobre el suelo con un ángulo de 45° a 44 ft/s. ¿Dónde estará 3 segundos después?

12. Jabalina Una jabalina sale de la mano del lanzador a 7 ft sobre el suelo con un ángulo de 45° a 80 ft/s. ¿Qué altura alcanza?

13. Una pelota de golf es golpeada con una rapidez inicial v_0, formando un ángulo α con respecto a la horizontal desde un punto ubicado al pie de una colina que tiene un ángulo de inclinación ϕ con la horizontal, donde

$$0 < \phi < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Demuestre que la pelota toca tierra a una distancia

$$\frac{2{v_0}^2\cos\alpha}{g\cos^2\phi}\,\text{sen}\,(\alpha - \phi),$$

medida sobre la colina. Demuestre que el mayor alcance que se puede lograr para una v_0 dada ocurre cuando $\alpha = (\phi/2) + (\pi/4)$; es decir, cuando el vector de velocidad inicial biseca el ángulo entre la vertical y la colina.

T **14. Jabalina** En Postdam en 1988, Petra Felke, de la entonces República Democrática Alemana, estableció el récord mundial femenil con un lanzamiento de jabalina de 262 ft y 5 in.

a) Si Felke lanzó la jabalina con un ángulo de 40° con respecto a la horizontal a 6.5 ft sobre el suelo, ¿cuál fue la rapidez inicial de la jabalina?

b) ¿Qué tan alto llegó la jabalina?

Movimiento en el espacio

Calcule las longitudes de las curvas en los ejercicios 15 y 16.

15. $\mathbf{r}(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (2\,\text{sen}\,t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi/4$

16. $\mathbf{r}(t) = (3\cos t)\mathbf{i} + (3\,\text{sen}\,t)\mathbf{j} + 2t^{3/2}\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 3$

En los ejercicios 17 a 20, obtenga $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$, kappa y τ en el valor dado de t.

17. $\mathbf{r}(t) = \frac{4}{9}(1+t)^{3/2}\mathbf{i} + \frac{4}{9}(1-t)^{3/2}\mathbf{j} + \frac{1}{3}t\mathbf{k}, \quad t = 0$

18. $\mathbf{r}(t) = \left(e^t\,\text{sen}\,2t\right)\mathbf{i} + \left(e^t\cos 2t\right)\mathbf{j} + 2e^t\mathbf{k}, \quad t = 0$

19. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}e^{2t}\mathbf{j}, \quad t = \ln 2$

20. $\mathbf{r}(t) = (3\cosh 2t)\mathbf{i} + (3\,\text{senh}\,2t)\mathbf{j} + 6t\mathbf{k}, \quad t = \ln 2$

En los ejercicios 21 y 22, escriba $\mathbf{a}$ en la forma $\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$ en $t = 0$ sin calcular $\mathbf{T}$ ni $\mathbf{N}$.

21. $\mathbf{r}(t) = (2 + 3t + 3t^2)\mathbf{i} + (4t + 4t^2)\mathbf{j} - (6\cos t)\mathbf{k}$

22. $\mathbf{r}(t) = (2 + t)\mathbf{i} + (t + 2t^2)\mathbf{j} + (1 + t^2)\mathbf{k}$

23. Determine $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$, κ y τ como funciones de t si

$$\mathbf{r}(t) = (\text{sen}\,t)\mathbf{i} + \left(\sqrt{2}\cos t\right)\mathbf{j} + (\text{sen}\,t)\mathbf{k}.$$

24. ¿En qué instantes dentro del intervalo $0 \le t \le \pi$ son ortogonales los vectores de velocidad y aceleración del movimiento $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + (5\cos t)\mathbf{j} + (3\,\text{sen}\,t)\mathbf{k}$?

25. La posición de una partícula que se mueve en el espacio en el tiempo $t \geq 0$ es

$$\mathbf{r}(t) = 2\mathbf{i} + \left(4 \operatorname{sen} \frac{t}{2}\right)\mathbf{j} + \left(3 - \frac{t}{\pi}\right)\mathbf{k}.$$

Determine el primer instante en que $\mathbf{r}$ es ortogonal a $\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

26. Determine las ecuaciones de los planos osculador, normal y rectificador de la curva $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ en el punto (1, 1, 1).

27. Determine las ecuaciones paramétricas de la recta que es tangente a la curva $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + \ln(1 - t)\mathbf{k}$ para $t = 0$.

28. Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la hélice $\mathbf{r}(t) = \left(\sqrt{2}\cos t\right)\mathbf{i} + \left(\sqrt{2}\operatorname{sen} t\right)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ en el punto donde $t = \pi/4$.

Teoría y ejemplos

29. Curvas síncronas Elimine a de las ecuaciones de un proyectil ideal

$$x = (v_0 \cos \alpha)t, \quad y = (v_0 \operatorname{sen} \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2,$$

para demostrar que $x^2 + (y + gt^2/2)^2 = {v_0}^2t^2$. Esto demuestra que los proyectiles lanzados simultáneamente desde el origen con la misma rapidez inicial estarán, en cualquier instante dado, sobre la circunferencia de radio v_0t con centro en $(0, -gt^2/2)$, sin importar su ángulo de lanzamiento. Estas circunferencias son *curvas síncronas* del lanzamiento.

30. Radio de curvatura Demuestre que el radio de curvatura de una curva plana dos veces diferenciable $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ está dado por la fórmula

$$\rho = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 - \ddot{s}^2}}, \quad \text{donde} \quad \ddot{s} = \frac{d}{dt}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

31. Definición alternativa de curvatura en el plano Una definición alternativa de curvatura de una curva plana suficientemente diferenciable es $|d\phi/ds|$, donde ϕ es el ángulo entre $\mathbf{T}$ e $\mathbf{i}$ (figura 13.37*a*). La figura 13.37*b*) muestra la distancia s medida en sentido contrario al de las manecillas del reloj a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ desde el punto $(a, 0)$ hasta un punto P, junto con el ángulo ϕ en P. Calcule la curvatura de la circunferencia usando la definición alternativa. (*Sugerencia:* Considere que $\phi = \theta + \pi/2$).

32. Vista desde el *Skylab 4* ¿Qué porcentaje del área de la Tierra podía ver un astronauta cuando el *Skylab 4* estaba en su altura de apogeo, 437 km por arriba de la superficie? Para determinar esto, modele la superficie visible como la superficie generada al hacer girar el arco circular GT, mostrado aquí, alrededor del eje y. Luego, realice los siguientes pasos:

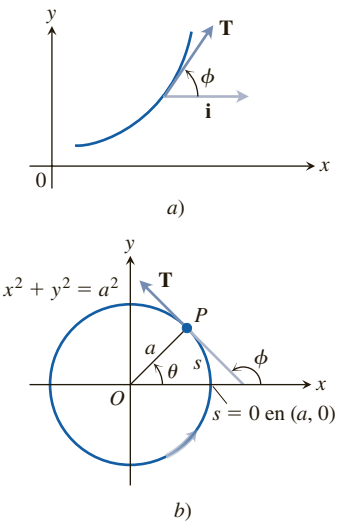


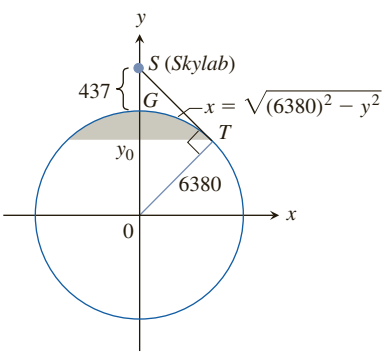
FIGURA 13.37 Figuras del ejercicio 31.

1. Use triángulos semejantes en la figura para demostrar que $y_0/6380 = 6380/(6380 + 437)$. Despeje y_0.

2. Calcule el área visible (con cuatro cifras significativas) como

$$AV = \int_{y_0}^{6380} 2\pi x\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy.$$

3. Exprese el resultado como un porcentaje de la superficie de la Tierra.



Capítulo 13 Ejercicios adicionales y avanzados

Aplicaciones

1. Una partícula P sin fricción parte del reposo en el instante $t = 0$ en el punto $(a, 0, 0)$ y se desliza hacia abajo por la hélice

$$\mathbf{r}(\theta) = (a\cos\theta)\mathbf{i} + (a\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j} + b\theta\mathbf{k} \quad (a, b > 0)$$

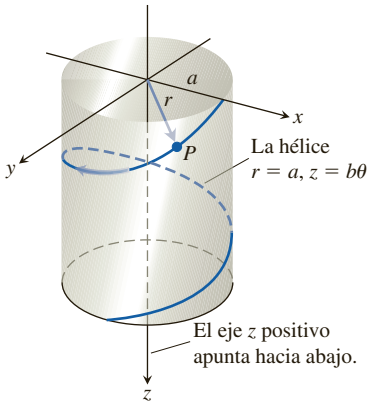
por la influencia de la gravedad, como indica la figura. En esta ecuación, θ es la coordenada cilíndrica θ, y la hélice es la curva $r = a$, $z = b\theta$, $\theta \geq 0$, en coordenadas cilíndricas. Suponemos que θ es una función diferenciable de t para el movimiento. La ley de conservación de la energía afirma que la rapidez de la partícula después de caer en línea recta una distancia z es $\sqrt{2gz}$, donde g es la aceleración constante de la gravedad.

a) Encuentre la velocidad angular $d\theta/dt$ cuando $\theta = 2\pi$.

b) Exprese las coordenadas θ y z de la partícula como funciones de t.

c) Exprese las componentes tangencial y normal de la velocidad $d\mathbf{r}/dt$ y de la aceleración $d^2\mathbf{r}/dt^2$ como funciones de t.

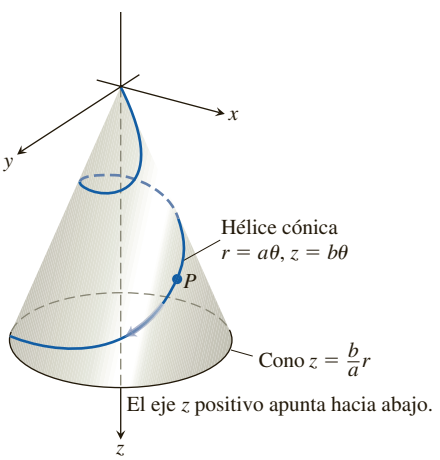
¿La aceleración tiene una componente no nula en la dirección del vector binormal **B**?



2. Suponga que la curva del ejercicio 1 se sustituye por la hélice cónica $r = a\theta$, $z = b\theta$ mostrada en la siguiente figura.

a) Exprese la velocidad angular $d\theta/dt$ como una función de θ.

b) Exprese la distancia recorrida por la partícula a lo largo de la hélice como una función de θ.



Movimiento en coordenadas polares y cilíndricas

3. Deduzca, a partir de la ecuación de la órbita

$$r = \frac{(1 + e)r_0}{1 + e\cos\theta},$$

que un planeta está más cerca de su sol cuando $\theta = 0$, y demuestre que $r = r_0$ en ese instante.

T **4. Ecuación de Kepler** El problema de localizar un planeta en su órbita, en una fecha y un momento determinados, finalmente lleva a resolver ecuaciones "Kepler" de la forma

$$f(x) = x - 1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x = 0.$$

a) Demuestre que esta ecuación particular tiene una solución entre $x = 0$ y $x = 2$.

b) Con su computadora o calculadora en modo de radianes, use el método de Newton para hallar la solución con tantos dígitos como sea posible.

5. En la sección 13.6, vimos que la velocidad de una partícula que se mueve en el plano es

$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta.$$

a) Exprese $\dot{x}$ y $\dot{y}$ en términos de $\dot{r}$ y $r\dot{\theta}$ calculando los productos punto $\mathbf{v}\cdot\mathbf{i}$ y $\mathbf{v}\cdot\mathbf{j}$.

b) Exprese $\dot{r}$ y $r\dot{\theta}$ en términos de $\dot{x}$ y $\dot{y}$ calculando los productos punto $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_\theta$.

6. Exprese la curvatura de una curva dos veces diferenciable $r = f(\theta)$ en el plano de coordenadas polares en términos de f y sus derivadas.

7. Una varilla delgada que pasa por el origen del plano de coordenadas polares gira (en el plano) alrededor del origen a razón de 3 rad/min. Un escarabajo parte del punto (2, 0) y camina a lo largo de la varilla hacia el origen, a razón de 1 in/min.

a) Determine en forma polar la aceleración y velocidad del escarabajo cuando éste se encuentra a la mitad del camino (1 in) hacia el origen.

T ***b)*** Redondeando a la décima de pulgada más próxima, ¿cuál será la longitud de la trayectoria que ha recorrido el escarabajo en el instante en que llega al origen?

8. Longitud de arco en coordenadas cilíndricas

a) Demuestre que cuando se expresa $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ en términos de coordenadas cilíndricas, se obtiene $ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + dz^2$.

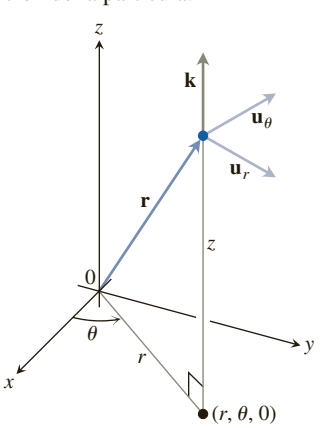
b) Interprete este resultado geométricamente en términos de las aristas y la diagonal de una caja. Elabore el bosquejo de la caja.

c) Con base en el resultado del inciso *a*), encuentre la longitud de la curva $r = e^\theta$, $z = e^\theta$, $0 \le \theta \le \ln 8$.

9. Vectores unitarios para la posición y el movimiento en coordenadas cilíndricas Cuando la posición de una partícula que se mueve en el espacio está dada en coordenadas cilíndricas, los vectores unitarios que usamos para describir su posición y movimiento son

$$\mathbf{u}_r = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}, \qquad \mathbf{u}_\theta = -(\operatorname{sen}\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j},$$

y $\mathbf{k}$ (vea la siguiente figura). El vector de posición de la partícula es $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r + z\mathbf{k}$, donde r es la coordenada de distancia polar positiva de la posición de la partícula.



a) Demuestre que $\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_\theta$ y $\mathbf{k}$, en ese orden, forman un marco de referencia de mano derecha de vectores unitarios.

b) Demuestre que

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta} = \mathbf{u}_\theta \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta} = -\mathbf{u}_r.$$

c) Suponiendo que existen las derivadas necesarias con respecto a t, exprese $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ y $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$ en términos de $\mathbf{u}_r$, $\mathbf{u}_\theta$, $\mathbf{k}$, $\dot{r}$ y $\dot{\theta}$.

***d*) Conservación del momento angular** Sea $\mathbf{r}(t)$ la posición de un cuerpo que se mueve en el espacio en el instante t. Suponga que la fuerza que actúa sobre el objeto en el instante t es

$$\mathbf{F}(t) = -\frac{c}{|\mathbf{r}(t)|^3}\mathbf{r}(t),$$

donde c es una constante. En física, el **momento angular** de un objeto en el instante t se define como $\mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t) \times m\mathbf{v}(t)$, donde m es la masa del objeto y $\mathbf{v}(t)$ es la velocidad. Demuestre que el momento angular es una cantidad que se conserva; es decir, demuestre que $\mathbf{L}(t)$ es un vector constante, independiente del tiempo. Recuerde la ley de Newton: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. (Éste es un problema de cálculo, no un problema de física).

Capítulo 13 Proyectos de aplicación tecnológica

Módulos Mathematica / Maple:

Rastreo por radar de un objeto en movimiento

Visualice los vectores de posición, velocidad y aceleración para analizar el movimiento.

Ecuaciones paramétricas y polares para un profesional del patinaje artístico

Visualice los vectores de posición, velocidad y aceleración para analizar el movimiento.

Movimiento en tres dimensiones

Calcule la distancia recorrida, rapidez, curvatura y torsión del movimiento a lo largo de una curva en el espacio. Visualice y calcule los vectores tangencial, normal y binormal asociados con el movimiento a lo largo de una curva en el espacio.

14 Derivadas parciales

INTRODUCCIÓN Muchas funciones dependen de más de una variable independiente. Por ejemplo, el volumen de un cilindro circular recto, $V = \pi r^2 h$, es función de su radio y de su altura, de manera que es una función $V(r, h)$ de dos variables, r y h. La rapidez del sonido a través de agua de mar es principalmente una función de la salinidad S y de la temperatura T. El área superficial del cuerpo humano es una función de la estatura h y del peso w del individuo. El pago mensual de la hipoteca de una casa es una función del capital solicitado en préstamo P, la tasa de interés i y el plazo t del préstamo.

En este capítulo ampliaremos las ideas básicas del cálculo diferencial de una variable a funciones de más variables. Sus derivadas son más variadas e interesantes, debido a las diferentes maneras en que las variables pueden interactuar. Las aplicaciones de estas derivadas también son más variadas que las del cálculo de una sola variable, y en el siguiente capítulo veremos que esto también es verdad para las integrales que implican más de una variable.

14.1 Funciones de varias variables

Las funciones con valores reales de varias variables independientes reales se definen de manera similar a las funciones de una sola variable. Los puntos en el dominio son pares ordenados (ternas, cuartetas y *n*adas) de números reales, y los valores del rango son números reales como aquéllos con los que hemos trabajado desde el principio.

DEFINICIONES Suponga que D es un conjunto de $n$adas de números reales $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Una **función de valores reales** f en D es una regla que asigna un único número real (individual)

$$w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

a cada elemento en D. El conjunto D es el **dominio** de la función. El conjunto de valores w asignados por f es el **rango** de la función. El símbolo w es la **variable dependiente** de f, y se dice que f es una función de n **variables independientes** x_1 a x_n. Las x_j son las **variables de entrada** de la función, en tanto que w es la **variable de salida**.

Si f es una función de dos variables independientes, por lo general, llamamos x y y a las variables independientes, y z a la variable dependiente; además, dibujamos el dominio de f como una región en el plano xy (figura 14.1). Si f es una función de tres variables independientes, llamamos x, y y z a las variables independientes y w a la dependiente, y representamos el dominio como una región en el espacio.

En las aplicaciones, tendemos a usar letras que nos recuerden lo que representan las variables. Por ejemplo, para tener claro que el volumen de un cilindro circular recto es una función de su radio y su altura, podemos escribir $V = f(r, h)$. Para precisar, podemos sustituir la notación $f(r, h)$ por la fórmula que calcula el valor de V a partir de los valores de r

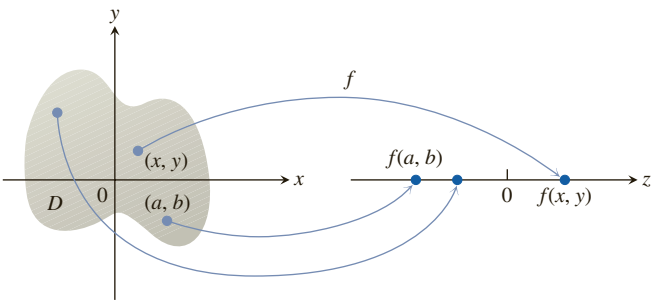


FIGURA 14.1 Diagrama de flechas para la función $z = f(x, y)$.

y h, y escribir $V = \pi r^2 h$. En cualquier caso, r y h serán las variables independientes y V la variable dependiente de la función.

Como es usual, calculamos las funciones definidas mediante fórmulas, sustituimos los valores de las variables independientes en tales fórmulas y calculamos el valor correspondiente de la variable dependiente. Por ejemplo, el valor de $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ en el punto (3, 0, 4) es

$$f(3, 0, 4) = \sqrt{(3)^2 + (0)^2 + (4)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Dominios y rangos

Para definir una función de más de una variable, seguimos la práctica habitual de excluir las entradas que conducen a números complejos o a la división entre cero. Si $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$, y no puede ser menor que x^2. Si $f(x, y) = 1/(xy)$, xy no puede ser cero. Supondremos que el dominio de una función es el conjunto más grande para el cual la regla que la define genera números reales, a menos que el dominio esté indicado de manera explícita. El rango consiste en el conjunto de valores de salida para la variable dependiente.

EJEMPLO 1

a) Ahora veamos funciones de dos variables. Observe las restricciones que se aplican para obtener un valor real de la variable dependiente z.

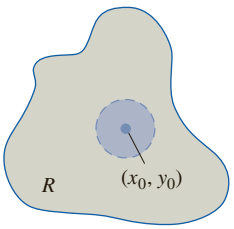
Función	Dominio	Rango
$z = \sqrt{y - x^2}$	$y \geq x^2$	$[0, \infty)$
$z = \dfrac{1}{xy}$	$xy \neq 0$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$z = \operatorname{sen} xy$	Todo el plano	$[-1, 1]$

b) Las siguientes son funciones de tres variables con restricciones en algunos de sus dominios.

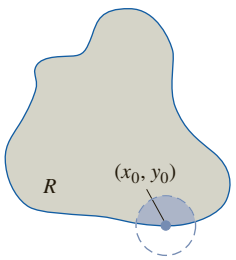
Función	Dominio	Rango
$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	Todo el plano	$[0, \infty)$
$w = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$	$(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$	$(0, \infty)$
$w = xy \ln z$	Semiespacio $z > 0$	$(-\infty, \infty)$

Funciones de dos variables

Las regiones en el plano pueden tener puntos interiores y puntos frontera, tal como los intervalos en la recta real. Los intervalos cerrados $[a, b]$ incluyen sus puntos frontera, en tanto



a) Punto interior

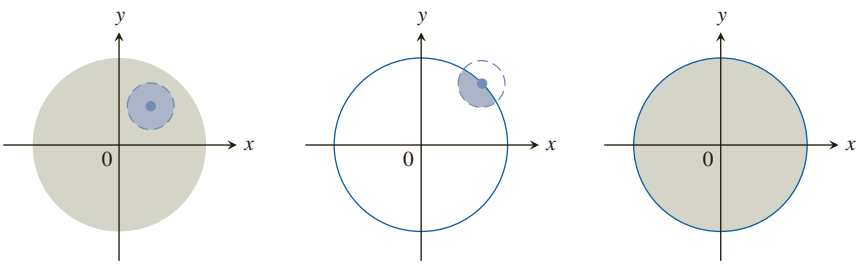


b) Punto frontera

FIGURA 14.2 Puntos interiores y puntos frontera de una región plana R. Un punto interior necesariamente es un punto de R. Un punto frontera de R no tiene que pertenecer a R.

DEFINICIONES Un punto (x_0, y_0) en una región (o conjunto) R del plano xy es un **punto interior** de R si es el centro de un disco de radio positivo que se encuentra completamente contenido en R (figura 14.2). Un punto (x_0, y_0) es un **punto frontera** de R si todos los discos con centro en (x_0, y_0) contienen puntos que están fuera de R, así como puntos que están dentro de R. (El punto frontera no tiene que pertenecer a R).

Los puntos interiores de la región forman, como conjunto, el **interior** de la región. Los puntos frontera de la región constituyen su **frontera**. Una región es **abierta** si consta sólo de puntos interiores. Una región es **cerrada** si contiene todos sus puntos frontera (figura 14.3).



$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$
Disco unitario abierto.
Cada punto es un punto interior.

$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$
Frontera del disco.
(La circunferencia unitaria).

$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$
Disco cerrado unitario.
Contiene a todos los puntos frontera.

FIGURA 14.3 Puntos interiores y puntos frontera de un disco unitario en el plano.

que los intervalos abiertos (a, b) no incluyen sus puntos frontera, y los intervalos con el formato $[a, b)$ no son abiertos ni cerrados.

Al igual que sucede con un intervalo semiabierto de valores reales $[a, b)$, algunas regiones del plano no son abiertas ni cerradas. Si comenzamos con el disco abierto de la figura 14.3 y agregamos algunos de los puntos frontera (pero no todos), el conjunto resultante no es abierto ni cerrado. Los puntos frontera que *están* en él hacen que el conjunto no sea abierto. La ausencia de los puntos frontera restantes hace que el conjunto no sea cerrado.

DEFINICIONES Una región en el plano está **acotada** si se encuentra dentro de un disco de radio finito. Una región es **no acotada** si no existe un disco de radio finito que la contenga.

Ejemplos de conjuntos *acotados* en el plano incluyen segmentos de recta, triángulos, interiores de triángulos, rectángulos, circunferencias y discos. Ejemplos de conjuntos *no acotados* en el plano incluyen rectas, ejes de coordenadas, gráficas de funciones definidas en intervalos infinitos, cuadrantes, semiplanos y el plano mismo.

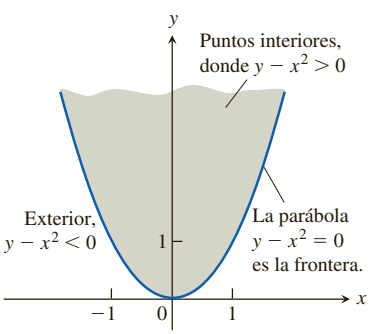


FIGURA 14.4 El dominio de $f(x, y)$ en el ejemplo 2 consta de la región sombreada y de su parábola que es la frontera.

EJEMPLO 2 Describa el domino de la función $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$.

Solución Puesto que f está definida sólo cuando $y - x^2 \ge 0$, el dominio es la región cerrada, no acotada, que se muestra en la figura 14.4. La parábola $y = x^2$ es la frontera del dominio. Los puntos ubicados arriba de la parábola forman el interior del dominio. ■

Gráficas, curvas de nivel y contornos de funciones de dos variables

Hay dos maneras habituales de dibujar los valores de una función $f(x, y)$. Una es trazar e identificar por su nombre las curvas en el dominio donde f asume un valor constante. La otra es dibujar la superficie $z = f(x, y)$ en el espacio.

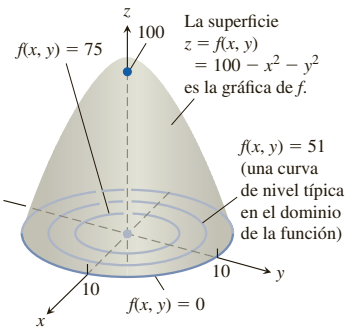


FIGURA 14.5 Gráfica y curvas de nivel seleccionadas de la función $f(x, y)$ del ejemplo 3.

DEFINICIONES El conjunto de puntos en el plano donde una función $f(x, y)$ tiene un valor constante $f(x, y) = c$ se llama **curva de nivel** de f. El conjunto de todos los puntos $(x, y, f(x, y))$ en el espacio, para (x, y) en el dominio de f, es la **gráfica** de f, la cual también se conoce como **superficie** $z = f(x, y)$.

EJEMPLO 3 Grafique $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$ y trace las curvas de nivel $f(x, y) = 0$, $f(x, y) = 51$ y $f(x, y) = 75$ en el dominio de f en el plano.

Solución El dominio de f es el plano xy completo, y el rango de f es el conjunto de números reales menores que o iguales a 100. La gráfica es el paraboloide $z = 100 - x^2 - y^2$, la porción positiva que se muestra en la figura 14.5.

La curva de nivel $f(x, y) = 0$ es el conjunto de puntos en el plano xy para los cuales

$$f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 0, \quad \text{o} \quad x^2 + y^2 = 100,$$

lo cual es una circunferencia de radio 10 con centro en el origen. De manera similar, las curvas de nivel $f(x, y) = 51$ y $f(x, y) = 75$ (figura 14.5) son las circunferencias

$$f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 51, \quad \text{o} \quad x^2 + y^2 = 49$$
$$f(x, y) = 100 - x^2 - y^2 = 75, \quad \text{o} \quad x^2 + y^2 = 25.$$

La curva de nivel $f(x, y) = 100$ solamente consta del origen. (Aún así se considera una curva de nivel).

Si $x^2 + y^2 > 100$, entonces, los valores de $f(x, y)$ son negativos. Por ejemplo, la circunferencia $x^2 + y^2 = 144$, de radio 12 con centro en el origen, da un valor constante $f(x, y) = -44$ y es una curva de nivel de f. ■

La curva en el espacio donde el plano $z = c$ corta a una superficie $z = f(x, y)$ está formada por los puntos que representan el valor de la función $f(x, y) = c$. Esta curva se llama **curva de contorno** $f(x, y) = c$, para distinguirla de la curva de nivel $f(x, y) = c$ en el dominio de f. La figura 14.6 muestra la curva de contorno $f(x, y) = 75$ sobre la superficie $z = 100 - x^2 - y^2$ definida por la función $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$. La curva de contorno se encuentra directamente arriba de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, que es la curva de nivel $f(x, y) = 75$ en el dominio de la función.

Sin embargo, no todos hacen esta distinción, de manera que tal vez usted desee llamar a ambas clases de curvas por el mismo nombre y describir el contexto para aclarar lo que tiene en mente. En la mayoría de los mapas, por ejemplo, las curvas que representan una elevación constante (altura sobre el nivel del mar) se llaman contornos, no curvas de nivel (figura 14.7).

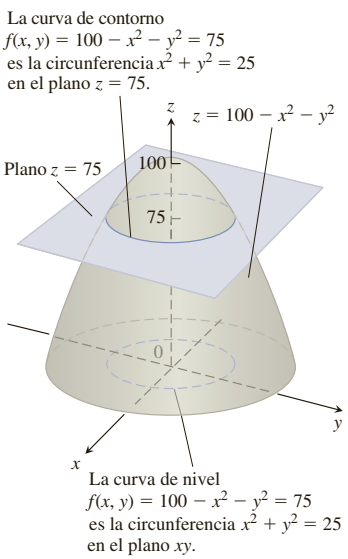


FIGURA 14.6 Un plano $z = c$ paralelo al plano xy, que corta una superficie $z = f(x, y)$, produce una curva de contorno.

Funciones de tres variables

En el plano, los puntos donde una función de dos variables independientes tiene un valor constante $f(x, y) = c$ forman una curva en el dominio de la función. En el espacio, los puntos donde una función de tres variables independientes tiene un valor constante $f(x, y, z) = c$ forman una superficie en el dominio de la función.

DEFINICIÓN El conjunto de los puntos (x, y, z) en el espacio donde una función de tres variables independientes tiene un valor constante $f(x, y, z) = c$ es una **superficie de nivel** de f.

Como las gráficas de las funciones de tres variables consisten en puntos $(x, y, z, f(x, y, z))$ que se encuentran en un espacio con cuatro dimensiones, no podemos trazarlas en nuestro marco de referencia tridimensional. Sin embargo, podemos ver cómo se comporta la función analizando sus superficies de nivel tridimensionales.

EJEMPLO 4 Describa las superficies de nivel de la función

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

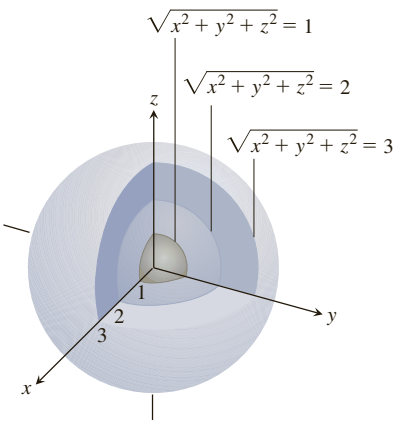


FIGURA 14.8 Las superficies de nivel de $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ son esferas concéntricas (ejemplo 4).

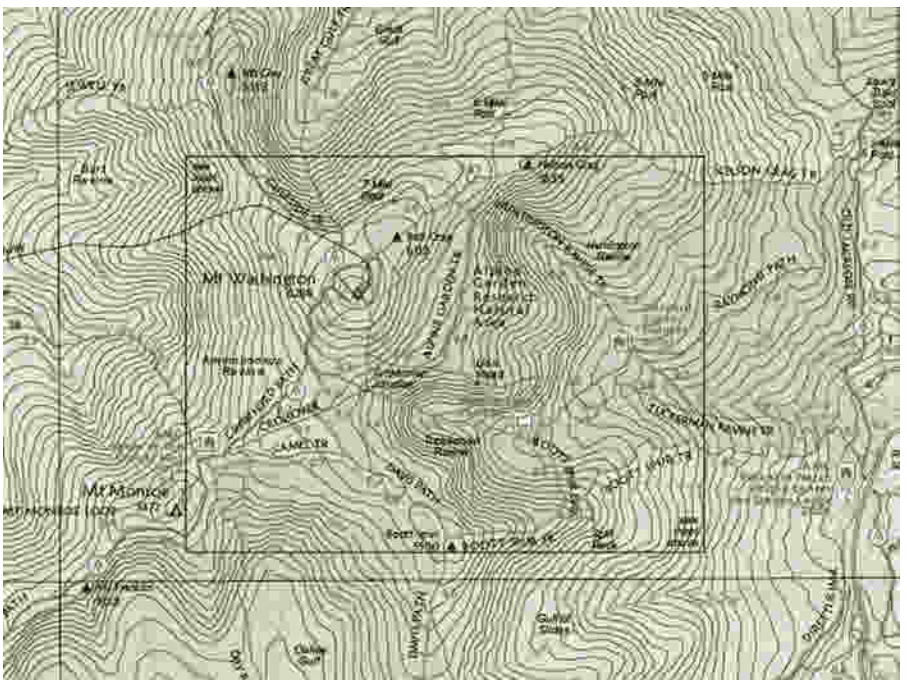
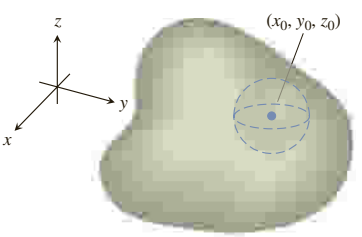


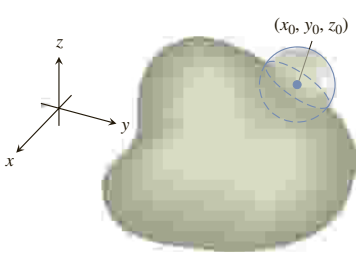
FIGURA 14.7 Contornos del Monte Washington en New Hampshire. (Reproducida con permiso del Appalachian Mountain Club).

Solución El valor de f es la distancia del origen al punto (x, y, z). Cada superficie de nivel $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = c$, $c > 0$, es una esfera de radio c con centro en el origen. La figura 14.8 muestra un corte de tres de estas esferas. La superficie de nivel $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 0$ consta sólo del origen.

Aquí no graficamos la función; sólo observamos las superficies de nivel en el dominio de la función. Las superficies de nivel muestran cómo cambian los valores de la función conforme nos movemos a través de su dominio. Si permanecemos en una esfera de radio c con centro en el origen, la función mantiene un valor constante, digamos, c. Si nos movemos de un punto en una esfera a un punto en otra, el valor de la función cambia: crece al alejarnos del origen y decrece si nos movemos hacia el origen. La manera como cambian los valores depende de la dirección que tomemos. El hecho de que el cambio dependa de la dirección es importante. Regresaremos a esto en la sección 14.5. ■



a) Punto interior



b) Punto frontera

FIGURA 14.9 Puntos interiores y puntos frontera de una región en el espacio. Al igual que ocurre con las regiones en un plano, un punto frontera no necesariamente pertenece a la región R del espacio.

Las definiciones de interior, frontera, abierto, cerrado, acotado y no acotado para regiones en el espacio son similares a las de las regiones en el plano. Para incluir una dimensión adicional, usamos bolas sólidas de radios positivos en vez de discos.

DEFINICIONES Un punto (x_0, y_0, z_0) en una región R del espacio es un **punto interior** de R si es el centro de una bola sólida que está completamente dentro de R (figura 14.9*a*). Un punto (x_0, y_0, z_0) es un **punto frontera** de R si la bola con centro en (x_0, y_0, z_0) tiene puntos que están fuera de R y puntos que están en R (figura 14.9*b*). El **interior** de R es el conjunto de los puntos interiores de R. La **frontera** de R es el conjunto de puntos frontera de R.

Una región es **abierta** si consta sólo de puntos interiores. Una región es **cerrada** si contiene toda su frontera.

Algunos ejemplos de conjuntos *abiertos* en el espacio incluyen el interior de una esfera, el semiespacio abierto $z > 0$, el primer octante (donde x, y y z son positivos) y el espacio mismo. Ejemplos de conjuntos *cerrados* en el espacio incluyen rectas, planos y

el semiespacio cerrado $z \geq 0$. Una esfera sólida con una parte de su frontera eliminada o un cubo sólido sin una cara, arista o esquina *no son abiertos ni cerrados*.

Las funciones con más de tres variables independientes también son importantes. Por ejemplo, la temperatura de una superficie en el espacio puede depender no sólo de la ubicación del punto $P(x, y, z)$ sobre la superficie, sino también del tiempo t, de manera que podríamos escribir $T = f(x, y, z, t)$.

Graficación por computadora

Los programas de graficación tridimensional para las computadoras y calculadoras hacen posible graficar funciones de dos variables. Con frecuencia, podemos obtener información más rápidamente de una gráfica que de una fórmula, ya que las superficies revelan el comportamiento creciente y decreciente, así como los puntos altos y bajos.

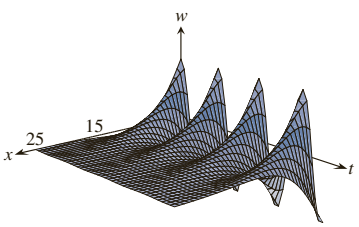


FIGURA 14.10 Esta gráfica muestra la variación estacional de la temperatura debajo del suelo como una fracción de la temperatura en la superficie (ejemplo 5).

EJEMPLO 5 La temperatura w debajo de la superficie de la Tierra es una función de la profundidad x y del tiempo t del año. Si medimos x en pies, y t es el número de días transcurridos desde la fecha esperada para la temperatura superficial máxima anual, podemos modelar la variación de la temperatura mediante la función

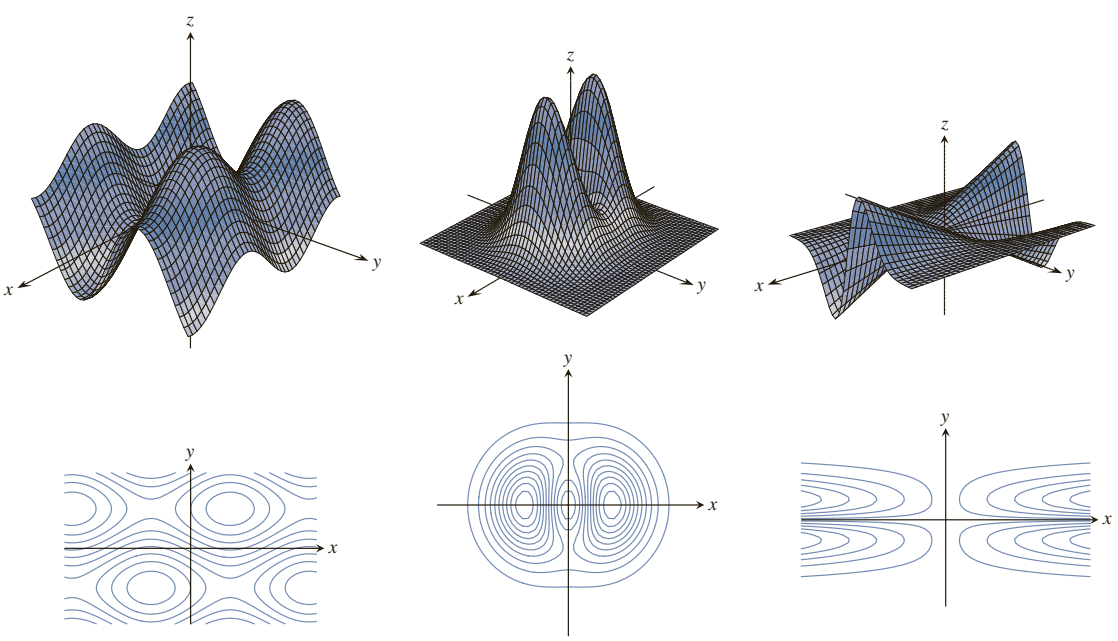
$$w = \cos(1.7 \times 10^{-2}t - 0.2x)e^{-0.2x}.$$

(La temperatura a 0 ft está en una escala que varía entre +1 y 1, de manera que la variación en x pies pueda interpretarse como una fracción de la variación sobre la superficie).

La figura 14.10 presenta una gráfica de la función. A una profundidad de 15 ft, la variación (el cambio en la amplitud vertical de la figura) es de alrededor del 5% de la variación en la superficie. A 25 ft, casi no hay variación durante el año.

La gráfica también indica que la temperatura a 15 ft bajo la superficie está desfasada casi medio año en relación con la temperatura de la superficie. Cuando la temperatura baja a un mínimo sobre la superficie (digamos, a finales de enero), está en su punto máximo a 15 ft por debajo. Esto es, a 15 ft debajo del suelo, las estaciones están invertidas. ■

La figura 14.11 muestra gráficas generadas por computadora de varias funciones de dos variables, junto con sus curvas de nivel.



a) $z = \text{sen } x + 2 \text{ sen } y$ *b*) $z = (4x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$ *c*) $z = xye^{-y^2}$

FIGURA 14.11 Gráficas generadas por computadora y curvas de nivel de funciones típicas de dos variables.

Ejercicios 14.1

Dominio, rango y curvas de nivel

En los ejercicios 1 a 4, obtenga los valores específicos de la función.

1. $f(x, y) = x^2 + xy^3$

a) $f(0, 0)$ ***b)*** $f(-1, 1)$

c) $f(2, 3)$ ***d)*** $f(-3, -2)$

2. $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy)$

a) $f\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ ***b)*** $f\left(-3, \frac{\pi}{12}\right)$

c) $f\left(\pi, \frac{1}{4}\right)$ ***d)*** $f\left(-\frac{\pi}{2}, -7\right)$

3. $f(x, y, z) = \dfrac{x - y}{y^2 + z^2}$

a) $f(3, -1, 2)$ ***b)*** $f\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

c) $f\left(0, -\frac{1}{3}, 0\right)$ ***d)*** $f(2, 2, 100)$

4. $f(x, y, z) = \sqrt{49 - x^2 - y^2 - z^2}$

a) $f(0, 0, 0)$ ***b)*** $f(2, -3, 6)$

c) $f(-1, 2, 3)$ ***d)*** $f\left(\frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{6}{\sqrt{2}}\right)$

En los ejercicios 5 a 12, obtenga y grafique el dominio de cada función.

5. $f(x, y) = \sqrt{y - x - 2}$

6. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$

7. $f(x, y) = \dfrac{(x - 1)(y + 2)}{(y - x)(y - x^3)}$

8. $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{x^2 + y^2 - 25}$

9. $f(x, y) = \cos^{-1}(y - x^2)$

10. $f(x, y) = \ln(xy + x - y - 1)$

11. $f(x, y) = \sqrt{(x^2 - 4)(y^2 - 9)}$

12. $f(x, y) = \dfrac{1}{\ln(4 - x^2 - y^2)}$

En los ejercicios 13 a 16, obtenga y bosqueje las curvas de nivel $f(x, y) = c$ sobre el mismo conjunto de ejes de coordenadas para los valores dados de c. Nos referimos a estas curvas de nivel como un mapa de contorno.

13. $f(x, y) = x + y - 1, \quad c = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

14. $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad c = 0, 1, 4, 9, 16, 25$

15. $f(x, y) = xy, \quad c = -9, -4, -1, 0, 1, 4, 9$

16. $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}, \quad c = 0, 1, 2, 3, 4$

En los ejercicios 17 a 30, ***a)*** obtenga el dominio de la función, ***b)*** determine el rango de la función, ***c)*** describa las curvas de nivel de la función, ***d)*** encuentre la frontera del dominio de la función, ***e)*** determine si el dominio es una región abierta, cerrada o ninguna de las dos y ***f)*** determine si el dominio está acotado o no.

17. $f(x, y) = y - x$ **18.** $f(x, y) = \sqrt{y - x}$

19. $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$ **20.** $f(x, y) = x^2 - y^2$

21. $f(x, y) = xy$ **22.** $f(x, y) = y/x^2$

23. $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$ **24.** $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

25. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ **26.** $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$

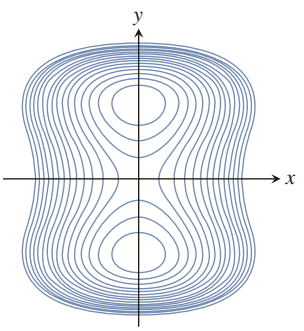
27. $f(x, y) = \operatorname{sen}^{-1}(y - x)$ **28.** $f(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

29. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$ **30.** $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - y^2)$

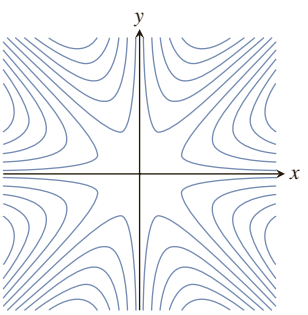
Asociación de superficies con curvas de nivel

En los ejercicios 31 a 36 se muestran curvas de nivel para las funciones graficadas en los incisos *a)* a *f)* de la siguiente página. Asocie cada conjunto de curvas con la función adecuada.

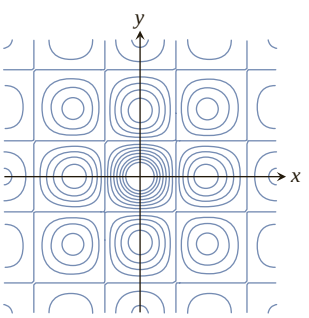
31.



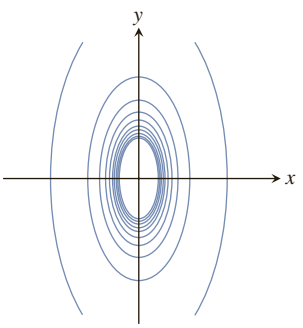
32.



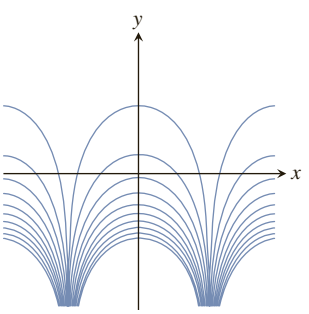
33.



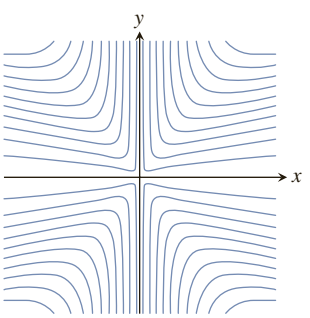
34.



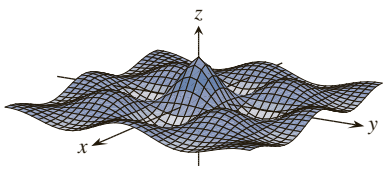
35.



36.

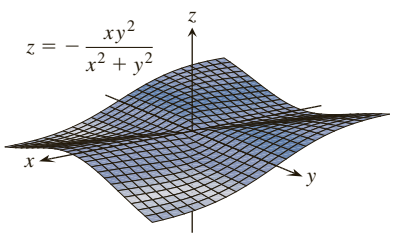


a)

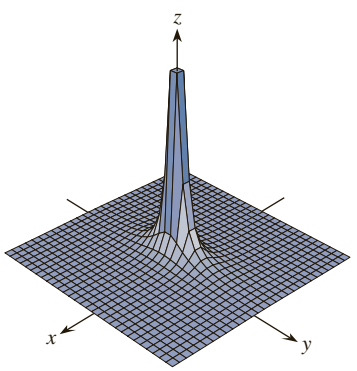


$z = (\cos x)(\cos y)\, e^{-\sqrt{x^2+y^2}/4}$

b)

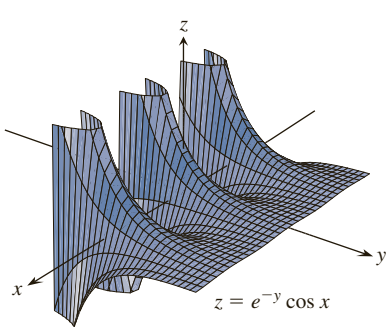


c)

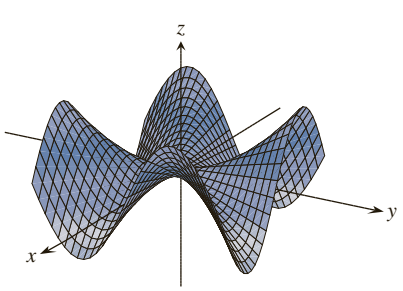


$z = \dfrac{1}{4x^2 + y^2}$

d)

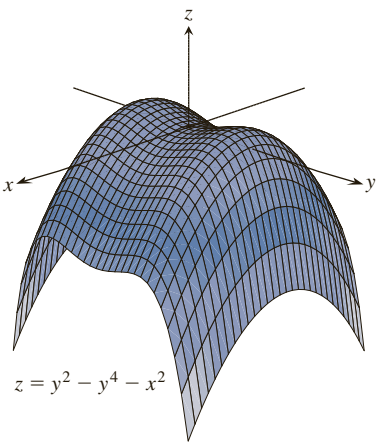


e)



$z = \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$

f)



Funciones de dos variables

Muestre los valores de las funciones de los ejercicios 37 a 48 de dos maneras: ***a)*** graficando la superficie $z = f(x, y)$, y ***b)*** dibujando varias curvas de nivel en el dominio de la función. Marque cada curva de nivel con el valor de su función.

37. $f(x, y) = y^2$

38. $f(x, y) = \sqrt{x}$

39. $f(x, y) = x^2 + y^2$

40. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

41. $f(x, y) = x^2 - y$

42. $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$

43. $f(x, y) = 4x^2 + y^2$

44. $f(x, y) = 6 - 2x - 3y$

45. $f(x, y) = 1 - |y|$

46. $f(x, y) = 1 - |x| - |y|$

47. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 4}$

48. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$

Determinación de curvas de nivel

En los ejercicios 49 a 52, encuentre una ecuación y dibuje la gráfica de la curva de nivel de la función $f(x, y)$ que pasa por el punto dado.

49. $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2, \quad \left(2\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

50. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 1}, \quad (1, 0)$

51. $f(x, y) = \sqrt{x + y^2 - 3}, \quad (3, -1)$

52. $f(x, y) = \dfrac{2y - x}{x + y + 1}, \quad (-1, 1)$

Trazo de superficies de nivel

En los ejercicios 53 a 60, dibuje la superficie de nivel típica para la función.

53. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

54. $f(x, y, z) = \ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$

55. $f(x, y, z) = x + z$

56. $f(x, y, z) = z$

57. $f(x, y, z) = x^2 + y^2$

58. $f(x, y, z) = y^2 + z^2$

59. $f(x, y, z) = z - x^2 - y^2$

60. $f(x, y, z) = (x^2/25) + (y^2/16) + (z^2/9)$

Obtención de superficies de nivel

En los ejercicios 61 a 64, determine la ecuación para la superficie de nivel de la función en el punto dado.

61. $f(x, y, z) = \sqrt{x - y} - \ln z, \quad (3, -1, 1)$

62. $f(x, y, z) = \ln\left(x^2 + y + z^2\right), \quad (-1, 2, 1)$

63. $g(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (1, -1, \sqrt{2})$

64. $g(x, y, z) = \dfrac{x - y + z}{2x + y - z}, \quad (1, 0, -2)$

En los ejercicios 65 a 68, determine y grafique el dominio de f. Luego, obtenga la ecuación para la curva o superficie de nivel de la función que pasa por el punto dado.

65. $f(x, y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^n, \quad (1, 2)$

66. $g(x, y, z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x + y)^n}{n! z^n}, \quad (\ln 4, \ln 9, 2)$

67. $f(x, y) = \displaystyle\int_x^y \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \theta^2}}, \quad (0, 1)$

68. $g(x, y, z) = \displaystyle\int_x^y \frac{dt}{1 + t^2} + \int_0^z \frac{d\theta}{\sqrt{4 - \theta^2}}, \quad (0, 1, \sqrt{3})$

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Use un software matemático para efectuar los siguientes pasos con cada función de los ejercicios 69 a 72.

a) Trace la superficie en el rectángulo dado.

b) Trace varias curvas de nivel en el rectángulo.

c) Trace la curva de nivel de f que pasa por el punto dado.

69. $f(x, y) = x \operatorname{sen} \dfrac{y}{2} + y \operatorname{sen} 2x, \quad 0 \le x \le 5\pi, \quad 0 \le y \le 5\pi, \quad P(3\pi, 3\pi)$

70. $f(x, y) = (\operatorname{sen} x)(\cos y) e^{\sqrt{x^2 + y^2}/8}, \quad 0 \le x \le 5\pi, \quad 0 \le y \le 5\pi, \quad P(4\pi, 4\pi)$

71. $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + 2 \cos y), \quad -2\pi \le x \le 2\pi, \quad -2\pi \le y \le 2\pi, \quad P(\pi, \pi)$

72. $f(x, y) = e^{(x^{0.1} - y)} \operatorname{sen}(x^2 + y^2), \quad 0 \le x \le 2\pi, \quad -2\pi \le y \le \pi, \quad P(\pi, -\pi)$

Use un software matemático para trazar las superficies de nivel definidas implícitamente en los ejercicios 73 a 76.

73. $4 \ln(x^2 + y^2 + z^2) = 1$

74. $x^2 + z^2 = 1$

75. $x + y^2 - 3z^2 = 1$

76. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right) - (\cos y)\sqrt{x^2 + z^2} = 2$

Superficies parametrizadas Así como las curvas en el plano se describen en formas paramétricas con un par de ecuaciones $x = f(t)$, $y = g(t)$ definidas en algún intervalo I del parámetro, en ocasiones es posible describir las superficies en el espacio con una terna de ecuaciones $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = h(u, v)$ definidas en un rectángulo de parámetros $a \le u \le b$, $c \le v \le d$. Muchos sistemas de computación matemáticos le permiten dibujar tales superficies en *modo paramétrico*. (Las superficies parametrizadas se estudiarán con detalle en la sección 16.5). Use un software matemático para trazar las superficies de los ejercicios 77 a 80. También trace varias curvas de nivel en el plano xy.

77. $x = u \cos v, \quad y = u \operatorname{sen} v, \quad z = u, \quad 0 \le u \le 2, \quad 0 \le v \le 2\pi$

78. $x = u \cos v, \quad y = u \operatorname{sen} v, \quad z = v, \quad 0 \le u \le 2, \quad 0 \le v \le 2\pi$

79. $x = (2 + \cos u) \cos v, \quad y = (2 + \cos u) \operatorname{sen} v, \quad z = \operatorname{sen} u, \quad 0 \le u \le 2\pi, \quad 0 \le v \le 2\pi$

80. $x = 2 \cos u \cos v, \quad y = 2 \cos u \operatorname{sen} v, \quad z = 2 \operatorname{sen} u, \quad 0 \le u \le 2\pi, \quad 0 \le v \le 2\pi$

14.2 Límites y continuidad en dimensiones superiores

Esta sección analiza los límites y la continuidad de funciones multivariables. Las definiciones son análogas a las de límites y continuidad de funciones de una variable, pero la inclusión de más variables independientes trae consigo mayor complejidad y diferencias importantes que requieren algunos conceptos nuevos.

Límites para funciones de dos variables

Si valores de $f(x, y)$ son arbitrariamente cercanos a un número real fijo L para todos los puntos (x, y) suficientemente cercanos a un punto (x_0, y_0), decimos que f tiende al límite L cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0). Esto es similar a la definición informal de límite de una función de una sola variable. Sin embargo, observe que si (x_0, y_0) está en el interior del dominio de f, entonces, (x, y) se puede acercar a (x_0, y_0) desde cualquier dirección. Para que el límite exista, se debe obtener el mismo valor límite desde cualquier dirección de aproximación. Ilustraremos este hecho con varios ejemplos después de la definición.

DEFINICIÓN Decimos que una función $f(x, y)$ tiende al **límite** L cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0), y escribimos

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

si para cada número $\epsilon > 0$, existe un número correspondiente $\delta > 0$ tal que para todo (x, y) en el dominio de f,

$$|f(x, y) - L| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

La definición de límite indica que la distancia entre $f(x, y)$ y L es arbitrariamente pequeña siempre que la distancia de (x, y) a (x_0, y_0) sea suficientemente pequeña (pero no cero). La definición se aplica tanto a puntos interiores (x_0, y_0) como a puntos frontera del dominio de f, aun cuando el punto frontera no necesariamente esté dentro del dominio. Los puntos (x, y) que se aproximan a (x_0, y_0) están siempre en el dominio de f. Observe la figura 14.12.

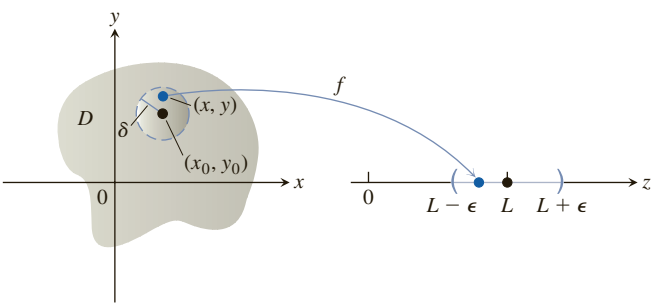


FIGURA 14.12 En la definición de límite, δ es el radio de un disco con centro en (x_0, y_0). Para todos los puntos (x, y) dentro de este disco, los valores de la función $f(x, y)$ se encuentran dentro del intervalo correspondiente $(L - \epsilon, L + \epsilon)$.

Al igual que con las funciones de una sola variable, es posible demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y = y_0$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} k = k \qquad \text{(cualquier número } k\text{)}$$

Por ejemplo, en la primera de las afirmaciones anteriores, $f(x, y) = x$ y $L = x_0$. Empleando la definición de límite, supongamos que se selecciona $\epsilon > 0$. Si hacemos que δ sea igual a ϵ, vemos que

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta = \epsilon$$

implica

$$\sqrt{(x - x_0)^2} < \epsilon \qquad (x - x_0)^2 \le (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

$$|x - x_0| < \epsilon \qquad \sqrt{a^2} = |a|$$

$$|f(x, y) - x_0| < \epsilon. \qquad x = f(x, y)$$

Es decir,

$$|f(x, y) - x_0| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

De esta forma, se ha encontrado una δ que satisface el requerimiento de la definición, y

$$\lim_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)} f(x, y) = \lim_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)} x = x_0.$$

Al igual que sucede con las funciones de una sola variable, el límite de la suma de dos funciones es la suma de sus límites (cuando ambos existen), con resultados similares para los límites de las diferencias, múltiplos constantes, productos, cocientes, potencias y raíces.

TEOREMA 1 Propiedades de los límites de funciones de dos variables

Las siguientes reglas se cumplen si L, M y k son números reales y

$$\lim_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)} f(x, y) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)} g(x, y) = M.$$

1. *Regla de la suma:* $\lim_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)} (f(x, y) + g(x, y)) = L + M$

2. *Regla de la diferencia:* $\lim_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)} (f(x, y) - g(x, y)) = L - M$

3. *Regla del múltiplo constante (o de la multiplicación por una constante):* $\lim_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)} kf(x, y) = kL$ (cualquier número k)

4. *Regla del producto:* $\lim_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)} (f(x, y) \cdot g(x, y)) = L \cdot M$

5. *Regla del cociente:* $\lim_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)} \dfrac{f(x, y)}{g(x, y)} = \dfrac{L}{M}, \qquad M \neq 0$

6. *Regla de la potencia:* $\lim_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)} [\, f(x, y)]^{\,n} = L^n$, n es un entero positivo

7. *Regla de la raíz:* $\lim_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)} \sqrt[n]{f(x, y)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n}$, n es un entero positivo, y si n es par, suponemos que $L > 0$.

Aunque aquí no demostraremos el teorema 1, analizaremos de manera informal por qué es verdadero. Si (x, y) está suficientemente cerca de (x_0, y_0), entonces, $f(x, y)$ está cerca de L, y $g(x, y)$ está cerca de M (de acuerdo con la interpretación informal de los límites). De esta manera, es razonable que: $f(x, y) + g(x, y)$ esté cerca de $L + M$; $f(x, y) - g(x, y)$ esté cerca de $L - M$; $kf(x, y)$ esté cerca de kL; $f(x, y)g(x, y)$ esté cerca de LM, y $f(x, y)/g(x, y)$ esté cerca de L/M si $M \neq 0$.

Cuando aplicamos el teorema 1 a polinomios y a funciones racionales, obtenemos el útil resultado de que los límites de estas funciones cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$ pueden calcularse evaluando las funciones en (x_0, y_0). El único requisito es que las funciones racionales estén definidas en (x_0, y_0).

EJEMPLO 1 En este ejemplo podemos combinar los tres sencillos resultados que siguen a la definición de límite con los resultados del teorema 1 para calcular los límites. Simplemente, sustituimos en la expresión funcional los valores de x y y del punto que se está aproximando, para obtener el valor del límite.

a) $$\lim_{(x,\,y)\to(0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3} = \frac{0 - (0)(1) + 3}{(0)^2(1) + 5(0)(1) - (1)^3} = -3$$

b) $$\lim_{(x,\,y)\to(3,\,-4)} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$ ■

EJEMPLO 2 Obtenga $\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \dfrac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$.

Solución Como el denominador $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ tiende a cero cuando $(x, y) \to (0, 0)$, no es posible usar la regla del cociente del teorema 1. Sin embargo, si multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, obtenemos una fracción equivalente cuyo límite *podemos* calcular:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2 - xy)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \qquad \text{Se multiplica por una forma igual a 1.}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x - y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y} \qquad \text{Se emplea álgebra.}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \qquad \text{Se cancela el factor distinto de cero } (x - y).$$

$$= 0(\sqrt{0} + \sqrt{0}) = 0 \qquad \text{Se conocen los valores del límite.}$$

Podemos cancelar el factor $(x - y)$ porque la trayectoria $y = x$ (a lo largo de la cual $x - y = 0$) *no* está en el dominio de la función

$$f(x, y) = \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}.$$

■

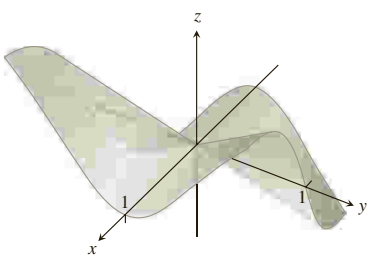


FIGURA 14.13 La gráfica de la superficie muestra que el límite de la función en el ejemplo 3 debe ser igual a 0, si es que existe.

EJEMPLO 3 Obtenga $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy^2}{x^2 + y^2}$ si existe.

Solución Primero observamos que a lo largo de la recta $x = 0$, la función siempre tiene el valor 0 cuando $y \neq 0$. Asimismo, a lo largo de la recta $y = 0$, la función tiene valor de 0 siempre que $x \neq 0$. De esta manera, si el límite existe cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$, el valor de este límite debe ser 0 (figura 14.13). Para ver si esto es verdad, aplicamos la definición de límite.

Sea $\epsilon > 0$, pero un valor arbitrario. Queremos encontrar $\delta > 0$, tal que

$$\left| \frac{4xy^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$

o bien,

$$\frac{4|x|y^2}{x^2 + y^2} < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta.$$

Puesto que $y^2 \leq x^2 + y^2$, tenemos que

$$\frac{4|x|y^2}{x^2 + y^2} \leq 4|x| = 4\sqrt{x^2} \leq 4\sqrt{x^2 + y^2}. \qquad \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq 1$$

Entonces, si seleccionamos $\delta = \epsilon/4$ y consideramos que $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, obtenemos

$$\left| \frac{4xy^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq 4\sqrt{x^2 + y^2} < 4\delta = 4\left(\frac{\epsilon}{4}\right) = \epsilon.$$

A partir de la definición, se deduce que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

■

EJEMPLO 4 Si $f(x, y) = \dfrac{y}{x}$, ¿existe $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$?

Solución El dominio de f no incluye el eje y, así que no consideramos puntos (x, y) donde $x = 0$ en la aproximación hacia el origen $(0, 0)$. A lo largo del eje x, el valor de la función es $f(x, 0) = 0$ para cualquier $x \neq 0$. De esta forma, si el límite existe cuando $(x, y) \to (0, 0)$, el valor del límite debe ser $L = 0$. Por otro lado, a lo largo de la recta $y = x$, el valor de la función es $f(x, x) = x/x = 1$ para cualquier $x \neq 0$. Es decir, la función f tiende al valor 1 a lo largo de la recta $y = x$. Esto significa que cada disco de radio δ con centro en $(0, 0)$ contendrá puntos $(x, 0)$ en el eje x, donde el valor de la función es 0, y también puntos (x, x) a lo largo de la recta $y = x$ donde el valor de la función es 1. De esta forma, sin importar qué tan pequeño sea el valor de δ que seleccionemos como radio del disco de la figura 14.12, habrá puntos dentro del disco para los cuales los valores de la función difieren de 1. Por lo tanto, el límite no puede existir porque podemos hacer que ϵ sea cualquier número menor que 1 en la definición de límite y negar que $L = 0$ o 1, o cualquier otro número real. El límite no existe porque tenemos diferentes valores límite a lo largo de distintas trayectorias que tienden al punto $(0, 0)$. ■

Continuidad

Al igual que en las funciones de una variable, la continuidad se define en términos de límites.

DEFINICIÓN Una función $f(x, y)$ es **continua en el punto (x_0, y_0)** si

1. f está definida en (x_0, y_0),
2. $\lim\limits_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)$ existe,
3. $\lim\limits_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Una función es **continua** si lo es en todos los puntos de su dominio.

Al igual que sucede con la definición de límite, la definición de continuidad se aplica tanto a puntos frontera como a puntos interiores del dominio de f. El único requisito es que cada punto (x, y) cerca de (x_0, y_0) esté en el domino de f.

Una consecuencia del teorema 1 es que las combinaciones algebraicas de las funciones continuas son continuas en cada punto donde estén definidas todas las funciones implicadas. Esto significa que las sumas, las restas, las multiplicaciones por constantes, los productos, los cocientes y las potencias de las funciones continuas son continuas siempre que estén definidas. En particular, las funciones polinomiales y racionales de dos variables son continuas en todos los puntos donde están definidas.

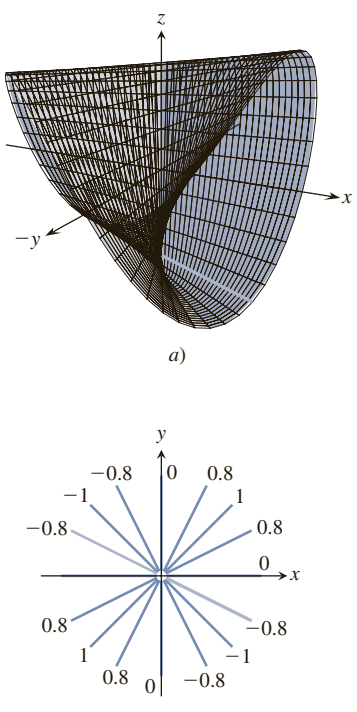


FIGURA 14.14 *a*) Gráfica de

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

La función es continua en todo punto, excepto en el origen. *b*) Los valores de f son constantes diferentes a lo largo de cada recta $y = mx$, $x \neq 0$ (ejemplo 5).

EJEMPLO 5 Demuestre que

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua en todo punto, excepto en el origen (figura 14.14).

Solución La función f es continua en cualquier punto $(x, y) \neq (0, 0)$ porque sus valores están dados por una función racional de x y y, y el valor límite se obtiene al sustituir los valores de x y y en la expresión de la función.

En (0, 0), el valor de f está definido, pero afirmamos que f no tiene límite cuando $(x, y) \to (0, 0)$. La razón es que las diferentes trayectorias de aproximación al origen conducen a resultados distintos, como veremos ahora.

Para cada valor de m, la función f tiene un valor constante en la recta "perforada" $y = mx$, $x \neq 0$, porque

$$f(x, y)\Big|_{y=mx} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}\Big|_{y=mx} = \frac{2x(mx)}{x^2 + (mx)^2} = \frac{2mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{2m}{1 + m^2}.$$

Por lo tanto, f tiene este número como su límite cuando (x, y) tiende a (0, 0) a lo largo de la recta:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{a lo largo de } y=mx}} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[f(x, y)\Big|_{y=mx} \right] = \frac{2m}{1 + m^2}.$$

Este límite cambia con cada valor de la pendiente m. Por lo tanto, no existe un único número que podamos llamar el límite de f cuando (x, y) tiende al origen. El límite no existe y la función no es continua. ■

Los ejemplos 4 y 5 ilustran un aspecto importante acerca de los límites de las funciones de dos o más variables. Para que un límite exista en un punto, el límite debe ser el mismo a lo largo de cualquier trayectoria de acercamiento. Este resultado es análogo al del caso de una variable, donde los límites por la izquierda y por la derecha deben tener el mismo valor. Para funciones de dos o más variables, si encontramos trayectorias con límites diferentes, sabemos que la función no tiene límite en el punto al que éstas tienden.

Criterio de dos trayectorias para demostrar la inexistencia de un límite

Si una función $f(x, y)$ tiene límites diferentes a lo largo de dos trayectorias distintas en el dominio de f cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0), entonces, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ no existe.

EJEMPLO 6 Demuestre que la función

$$f(x, y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$$

(figura 14.15) no tiene límite cuando (x, y) tiende a (0, 0).

Solución No es posible obtener el límite por sustitución directa, la cual da la indeterminación $0/0$. Examinamos los valores de f a lo largo de las curvas parabólicas que terminan en (0, 0). A lo largo de la curva $y = kx^2$, $x \neq 0$, la función tiene el valor constante

$$f(x, y)\Big|_{y=kx^2} = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}\Big|_{y=kx^2} = \frac{2x^2(kx^2)}{x^4 + (kx^2)^2} = \frac{2kx^4}{x^4 + k^2x^4} = \frac{2k}{1 + k^2}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{a lo largo de } y=kx^2}} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[f(x, y)\Big|_{y=kx^2} \right] = \frac{2k}{1 + k^2}.$$

Este límite varía con la trayectoria de acercamiento. Si (x, y) tiende a (0, 0) a lo largo de la parábola $y = x^2$, por ejemplo, $k = 1$ y el límite es 1. Si (x, y) tiende a (0, 0) a lo largo del eje x, $k = 0$ y el límite es 0. Por la prueba del criterio de las dos trayectorias, f no tiene límite cuando (x, y) tiende a (0, 0). ■

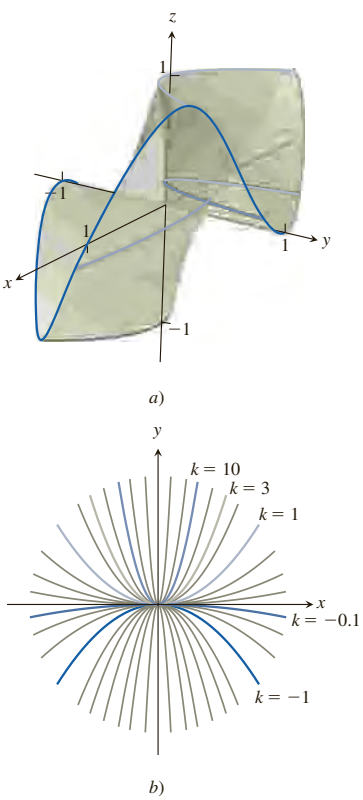


FIGURA 14.15 *a*) Gráfica de $f(x, y) = 2x^2y/(x^4 + y^2)$. *b*) A lo largo de cada trayectoria $y = kx^2$, el valor de f es constante, pero varía con k (ejemplo 6).

Es posible demostrar que la función del ejemplo 6 tiene límite 0 a lo largo de cada trayectoria $y = mx$ (ejercicio 53). Concluimos que

El hecho de que todas las rectas que se aproximan a (x_0, y_0) tengan el mismo límite no implica que exista un límite en (x_0, y_0).

Siempre que una composición de funciones continuas esté correctamente definida, también será continua. El único requisito es que cada función sea continua donde se aplica. La demostración, que aquí se omite, es similar a la de funciones de una sola variable (teorema 9 en la sección 2.5).

Continuidad de composiciones

Si f es continua en (x_0, y_0) y g es una función de una variable continua en $f(x_0, y_0)$, entonces, la función compuesta $h = g \circ f$ definida por $h(x, y) = g(f(x, y))$ es continua en (x_0, y_0).

Por ejemplo, las composiciones

$$e^{x-y}, \qquad \cos\frac{xy}{x^2+1}, \qquad \ln\left(1 + x^2y^2\right)$$

son continuas en todo punto (x, y).

Funciones de más de dos variables

Las definiciones de límite y continuidad para funciones de dos variables, así como las conclusiones acerca de los límites y continuidad para sumas, productos, cocientes, potencias y composiciones, son extensivas para funciones de tres o más variables. Funciones como

$$\ln(x + y + z) \qquad \text{y} \qquad \frac{y \operatorname{sen} z}{x - 1}$$

son continuas a través de sus dominios, y límites como

$$\lim_{P\to(1,0,-1)} \frac{e^{x+z}}{z^2 + \cos\sqrt{xy}} = \frac{e^{1-1}}{(-1)^2 + \cos 0} = \frac{1}{2},$$

donde P representa el punto (x, y, z), se pueden obtener por sustitución directa.

Valores extremos de funciones continuas en conjuntos cerrados y acotados

El teorema de los valores extremos (teorema 1, sección 4.1) establece que la función de una variable que es continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ asume un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto al menos una vez en $[a, b]$. Esto también es cierto para una función $z = f(x, y)$ que es continua en un conjunto R cerrado y acotado en el plano (como un segmento de recta, un disco o un triángulo sólido). La función toma un valor máximo absoluto en algún punto de R y un valor mínimo absoluto en algún punto de R.

Resultados similares se obtienen para funciones de tres o más variables. Una función continua $w = f(x, y, z)$, por ejemplo, debe asumir valores máximo y mínimo absolutos en cualquier conjunto cerrado y acotado (esfera o cubo sólido, casquillo esférico, prisma) donde esté definida. Aprenderemos cómo obtener estos valores extremos en la sección 14.7.

Ejercicios 14.2

Límites con dos variables

Obtenga los límites en los ejercicios 1 a 12.

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2 - y^2 + 5}{x^2 + y^2 + 2}$

2. $\lim_{(x,y)\to(0,4)} \dfrac{x}{\sqrt{y}}$

3. $\lim_{(x,y)\to(3,4)} \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

4. $\lim_{(x,y)\to(2,-3)} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)^2$

5. $\lim_{(x,y)\to(0,\pi/4)} \sec x \tan y$

6. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\dfrac{x^2 + y^3}{x + y + 1}$

7. $\lim_{(x,\,y)\to(0,\ln 2)} e^{x-y}$

8. $\lim_{(x,\,y)\to(1,1)} \ln\left|1 + x^2\,y^2\right|$

9. $\lim_{(x,\,y)\to(0,0)} \dfrac{e^y \operatorname{sen} x}{x}$

10. $\lim_{(x,\,y)\to(1/27,\,\pi^3)} \cos\sqrt[3]{xy}$

11. $\lim_{(x,\,y)\to(1,\,\pi/6)} \dfrac{x \operatorname{sen} y}{x^2 + 1}$

12. $\lim_{(x,\,y)\to(\pi/2,0)} \dfrac{\cos y + 1}{y - \operatorname{sen} x}$

Límites de cocientes

Calcule los límites en los ejercicios 13 a 24 replanteando primero las fracciones.

13. $\lim_{\substack{(x,\,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} \dfrac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y}$

14. $\lim_{\substack{(x,\,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} \dfrac{x^2 - y^2}{x - y}$

15. $\lim_{\substack{(x,\,y)\to(1,1)\\ x\neq 1}} \dfrac{xy - y - 2x + 2}{x - 1}$

16. $\lim_{\substack{(x,\,y)\to(2,\,-4)\\ x\neq -4,\ x\neq x^2}} \dfrac{y + 4}{x^2y - xy + 4x^2 - 4x}$

17. $\lim_{\substack{(x,\,y)\to(0,0)\\ x\neq y}} \dfrac{x - y + 2\sqrt{x} - 2\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

18. $\lim_{\substack{(x,\,y)\to(2,2)\\ x+y\neq 4}} \dfrac{x + y - 4}{\sqrt{x + y} - 2}$

19. $\lim_{\substack{(x,\,y)\to(2,0)\\ 2x-y\neq 4}} \dfrac{\sqrt{2x - y} - 2}{2x - y - 4}$

20. $\lim_{\substack{(x,\,y)\to(4,3)\\ x\neq y+1}} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{y + 1}}{x - y - 1}$

21. $\lim_{(x,\,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}\left(x^2 + y^2\right)}{x^2 + y^2}$

22. $\lim_{(x,\,y)\to(0,0)} \dfrac{1 - \cos(xy)}{xy}$

23. $\lim_{(x,\,y)\to(1,-1)} \dfrac{x^3 + y^3}{x + y}$

24. $\lim_{(x,\,y)\to(2,2)} \dfrac{x - y}{x^4 - y^4}$

Límites con tres variables

Determine los límites en los ejercicios 25 a 30.

25. $\lim_{P\to(1,3,4)} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right)$

26. $\lim_{P\to(1,-1,-1)} \dfrac{2xy + yz}{x^2 + z^2}$

27. $\lim_{P\to(\pi,\pi,0)} \left(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y + \sec^2 z\right)$

28. $\lim_{P\to(-1/4,\,\pi/2,2)} \tan^{-1} xyz$

29. $\lim_{P\to(\pi,0,3)} ze^{-2y}\cos 2x$

30. $\lim_{P\to(2,\,-3,6)} \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Continuidad para dos variables

¿En cuáles puntos (x, y) del plano, las funciones de los ejercicios 31 a 34 son continuas?

31. ***a)*** $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + y)$ ***b)*** $f(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2\right)$

32. ***a)*** $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$ ***b)*** $f(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + 1}$

33. ***a)*** $g(x, y) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{xy}$ ***b)*** $g(x, y) = \dfrac{x + y}{2 + \cos x}$

34. ***a)*** $g(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - 3x + 2}$ ***b)*** $g(x, y) = \dfrac{1}{x^2 - y}$

Continuidad para tres variables

¿En cuáles puntos (x, y, z) del espacio son continuas las funciones de los ejercicios 35 a 40?

35. ***a)*** $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$

b) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

36. ***a)*** $f(x, y, z) = \ln xyz$ ***b)*** $f(x, y, z) = e^{x+y}\cos z$

37. ***a)*** $h(x, y, z) = xy \operatorname{sen}\dfrac{1}{z}$ ***b)*** $h(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2 + z^2 - 1}$

38. ***a)*** $h(x, y, z) = \dfrac{1}{|y| + |z|}$ ***b)*** $h(x, y, z) = \dfrac{1}{|xy| + |z|}$

39. ***a)*** $h(x, y, z) = \ln\left(z - x^2 - y^2 - 1\right)$

b) $h(x, y, z) = \dfrac{1}{z - \sqrt{x^2 + y^2}}$

40. ***a)*** $h(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$

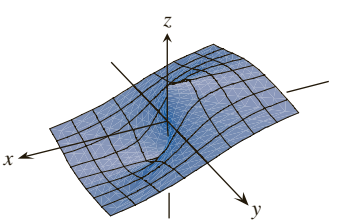
b) $h(x, y, z) = \dfrac{1}{4 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 9}}$

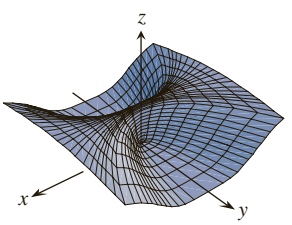
Inexistencia del límite en el origen

Considerando diferentes trayectorias de aproximación, demuestre que las funciones en los ejercicios 41 a 48 no tienen límite cuando $(x, y) \to (0, 0)$.

41. $f(x, y) = -\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

42. $f(x, y) = \dfrac{x^4}{x^4 + y^2}$





43. $f(x, y) = \dfrac{x^4 - y^2}{x^4 + y^2}$

44. $f(x, y) = \dfrac{xy}{|xy|}$

45. $g(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$

46. $g(x, y) = \dfrac{x^2 - y}{x - y}$

47. $h(x, y) = \dfrac{x^2 + y}{y}$

48. $h(x, y) = \dfrac{x^2y}{x^4 + y^2}$

Teoría y ejemplos

En los ejercicios 49 y 50, demuestre que los límites no existen.

49. $\lim_{(x,\,y)\to(1,1)} \dfrac{xy^2 - 1}{y - 1}$

50. $\lim_{(x,\,y)\to(1,\,-1)} \dfrac{xy + 1}{x^2 - y^2}$

51. Sea $f(x, y) = \begin{cases} 1, & y \geq x^4 \\ 1, & y \leq 0 \\ 0, & \text{de otra forma.} \end{cases}$

Obtenga cada uno de los siguientes límites, o bien, explique por qué el límite no existe.

a) $\lim_{(x,\,y)\to(0,1)} f(x, y)$

b) $\lim_{(x,\,y)\to(2,3)} f(x, y)$

c) $\lim_{(x,\,y)\to(0,0)} f(x, y)$

52. Sea $f(x, y) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x^3, & x < 0 \end{cases}$.

Obtenga los siguientes límites.

a) $\lim_{(x, y)\to(3, -2)} f(x, y)$

b) $\lim_{(x, y)\to(-2, 1)} f(x, y)$

c) $\lim_{(x, y)\to(0,0)} f(x, y)$

53. Demuestre que la función del ejemplo 6 tiene límite 0 a lo largo de todas las líneas rectas que tienden a (0, 0).

54. Si $f(x_0, y_0) = 3$, ¿qué puede decir de

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)$$

si f es continua en (x_0, y_0)? ¿Y si f no es continua en (x_0, y_0)? Justifique sus respuestas.

El teorema del sándwich Para funciones de dos variables establece que si $g(x, y) \leq f(x, y) \leq h(x, y)$ para toda $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ en un disco con centro en (x_0, y_0), y si g y h tienen el mismo límite finito L cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$, entonces,

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y) = L.$$

Con base en este resultado, fundamente sus respuestas a las preguntas de los ejercicios 55 a 58.

55. ¿El hecho de saber que

$$1 - \frac{x^2y^2}{3} < \frac{\tan^{-1} xy}{xy} < 1$$

le dice algo acerca de

$$\lim_{(x, y)\to(0,0)} \frac{\tan^{-1} xy}{xy}?$$

Justifique su respuesta.

56. ¿El hecho de saber que

$$2|xy| - \frac{x^2y^2}{6} < 4 - 4\cos\sqrt{|xy|} < 2|xy|$$

le dice algo acerca de

$$\lim_{(x, y)\to(0,0)} \frac{4 - 4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|}?$$

Justifique su respuesta.

57. ¿El hecho de saber que $|\text{sen}(1/x)| \leq 1$ le dice algo acerca de

$$\lim_{(x, y)\to(0,0)} y \,\text{sen}\,\frac{1}{x}?$$

Justifique su respuesta.

58. El hecho de saber que $|\cos(1/y)| \leq 1$ le dice algo acerca de

$$\lim_{(x, y)\to(0,0)} x\cos\frac{1}{y}?$$

Justifique su respuesta.

59. (*Continuación del ejemplo 5).*

a) Revise el ejemplo 5. Luego, sustituya $m = \tan\theta$ en la fórmula

$$f(x, y)\Big|_{y=mx} = \frac{2m}{1 + m^2}$$

y simplifique el resultado para mostrar cómo varía el valor de f con el ángulo de inclinación de la recta.

b) Utilice la fórmula que obtuvo en el inciso *a)* para demostrar que el límite de f cuando $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de la recta $y = mx$ varía de -1 a 1, dependiendo del ángulo de aproximación.

60. Extensión continua Defina $f(0, 0)$ de manera que

$$f(x, y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

se extienda a una función continua en el origen.

Cambio de variables a coordenadas polares

Si no puede obtener $\lim_{(x, y)\to(0,0)} f(x, y)$ en coordenadas rectangulares, trate de cambiar a coordenadas polares. Sustituya $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, e investigue el límite de la expresión resultante cuando $r \to 0$. En otras palabras, trate de determinar si existe un número L que satisfaga el siguiente criterio:

Dado $\epsilon > 0$, existe una $\delta > 0$, tal que para todas las r y θ,

$$|r| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(r, \theta) - L| < \epsilon. \tag{1}$$

Si tal L existe, entonces,

$$\lim_{(x, y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) = L.$$

Por ejemplo,

$$\lim_{(x, y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\cos^3\theta = 0.$$

Para verificar la última de estas igualdades, necesitamos demostrar que la ecuación (1) se satisface cuando $f(r, \theta) = r\cos^3\theta$ y $L = 0$. Es decir, necesitamos demostrar que, dado cualquier $\epsilon > 0$, existe una $\delta > 0$, tal que para toda r y θ,

$$|r| < \delta \quad \Rightarrow \quad |r\cos^3\theta - 0| < \epsilon.$$

Puesto que

$$|r\cos^3\theta| = |r||\cos^3\theta| \leq |r| \cdot 1 = |r|,$$

la implicación es válida para toda r y θ si tomamos $\delta = \epsilon$.

En contraste,

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2} = \frac{r^2\cos^2\theta}{r^2} = \cos^2\theta$$

adopta todos los valores de 0 a 1, sin importar qué tan pequeño sea $|r|$ de manera que $\lim_{(x, y)\to(0,0)} x^2 + (x^2 + y^2)$ no existe.

En cada uno de estos ejemplos, es bastante clara la existencia o inexistencia del límite cuando $r \to 0$. Sin embargo, el cambio a coordenadas polares no siempre ayuda e inclusive podría llevarnos a conclusiones falsas. Por ejemplo, el límite puede existir a lo largo de toda línea recta (o rayo) $\theta =$ constante, pero no existir en sentido estricto. El ejemplo 5 ilustra esto. En coordenadas polares, $f(x, y) = (2x^2y)/(x^4 + y^2)$ se convierte en

$$f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) = \frac{r\cos\theta\,\text{sen}\,2\theta}{r^2\cos^4\theta + \text{sen}^2\,\theta}$$

para $r \neq 0$. Si mantenemos a θ constante y dejamos que $r \to 0$, el límite es 0. Sin embargo, en la trayectoria $y = x^2$, tenemos que $r \operatorname{sen} \theta = r^2 \cos^2 \theta$ y

$$f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = \frac{r\cos\theta \operatorname{sen} 2\theta}{r^2\cos^4\theta + (r\cos^2\theta)^2}$$

$$= \frac{2r\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta}{2r^2\cos^4\theta} = \frac{r\operatorname{sen}\theta}{r^2\cos^2\theta} = 1.$$

En los ejercicios 61 a 66, determine el límite de f cuando $(x, y) \to (0, 0)$ o demuestre que el límite no existe.

61. $f(x, y) = \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2}$

62. $f(x, y) = \cos\left(\dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}\right)$

63. $f(x, y) = \dfrac{y^2}{x^2 + y^2}$

64. $f(x, y) = \dfrac{2x}{x^2 + x + y^2}$

65. $f(x, y) = \tan^{-1}\left(\dfrac{|x| + |y|}{x^2 + y^2}\right)$

66. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

En los ejercicios 67 y 68, defina $f(0, 0)$, de manera que la extensión de f sea continua en el origen.

67. $f(x, y) = \ln\left(\dfrac{3x^2 - x^2y^2 + 3y^2}{x^2 + y^2}\right)$

68. $f(x, y) = \dfrac{3x^2y}{x^2 + y^2}$

Uso de la definición de límite

Cada uno de los ejercicios 69 a 74 presenta una función $f(x, y)$ y un número positivo ϵ. En cada ejercicio, demuestre que existe una $\delta > 0$ tal que para todas las (x, y),

$$\sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x, y) - f(0, 0)| < \epsilon.$$

69. $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad \epsilon = 0.01$

70. $f(x, y) = y/(x^2 + 1), \quad \epsilon = 0.05$

71. $f(x, y) = (x + y)/(x^2 + 1), \quad \epsilon = 0.01$

72. $f(x, y) = (x + y)/(2 + \cos x), \quad \epsilon = 0.02$

73. $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$ y $f(0, 0) = 0, \quad \epsilon = 0.04$

74. $f(x, y) = \dfrac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2}$ y $f(0, 0) = 0, \quad \epsilon = 0.02$

Cada uno de los ejercicios 75 a 78 presenta una función $f(x, y, z)$ y un número positivo ϵ. En cada ejercicio, demuestre que existe una $\delta > 0$, tal que para toda (x, y, z),

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x, y, z) - f(0, 0, 0)| < \epsilon.$$

75. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad \epsilon = 0.015$

76. $f(x, y, z) = xyz, \quad \epsilon = 0.008$

77. $f(x, y, z) = \dfrac{x + y + z}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}, \quad \epsilon = 0.015$

78. $f(x, y, z) = \tan^2 x + \tan^2 y + \tan^2 z, \quad \epsilon = 0.03$

79. Demuestre que $f(x, y, z) = x + y - z$ es continua en todo punto (x_0, y_0, z_0).

80. Demuestre que $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ es continua en el origen.

14.3 Derivadas parciales

El cálculo de varias variables es similar al cálculo de una variable aplicado a cada una de ellas. Cuando mantenemos constantes todas las variables independientes de una función, excepto una, y diferenciamos con respecto a esa variable, obtenemos una derivada "parcial". En esta sección se muestra cómo se definen e interpretan geométricamente las derivadas parciales y cómo calcularlas aplicando las reglas de diferenciación para funciones de una sola variable. La idea de *diferenciabilidad* de funciones de varias variables requiere algo más que la existencia de las derivadas parciales, ya que nos podemos aproximar a un punto desde distintas direcciones. Sin embargo, veremos que las funciones diferenciables de varias variables se comportan del mismo modo que las funciones diferenciables de una variable, de manera que son continuas y se pueden aproximar adecuadamente mediante funciones lineales.

Derivadas parciales de una función de dos variables

Si (x_0, y_0) es un punto en el dominio de una función $f(x, y)$, el plano vertical $y = y_0$ cortará la superficie $z = f(x, y)$ en la curva $z = f(x, y_0)$ (figura 14.16). Esta curva es la gráfica de la función $z = f(x, y_0)$ en el plano $y = y_0$. La coordenada horizontal en este plano es x; la coordenada vertical es z. El valor de y se mantiene constante en y_0, de manera que y no es una variable.

Definimos la derivada parcial de f con respecto a x en el punto (x_0, y_0) como la derivada ordinaria de $f(x, y_0)$ con respecto a x en el punto $x = x_0$. Para distinguir las derivadas parciales de las ordinarias, usamos el símbolo ∂ en vez de la d empleada anteriormente. En la definición, h representa un número real, positivo o negativo.

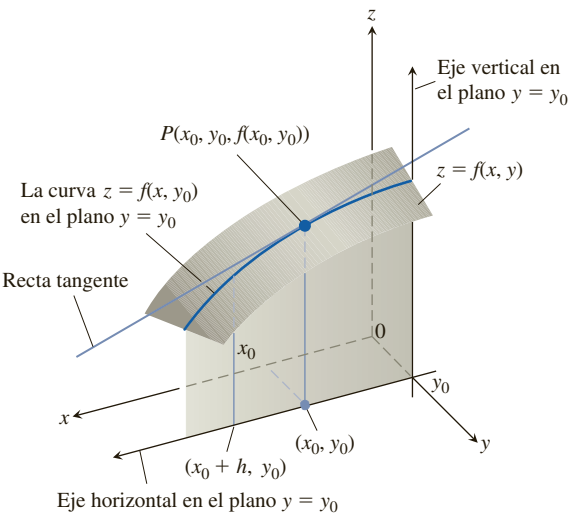


FIGURA 14.16 La intersección del plano $y = y_0$ con la superficie $z = f(x, y)$, vista desde arriba del primer cuadrante del plano xy.

DEFINICIÓN La **derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a x en el punto (x_0, y_0)** es

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

siempre que el límite exista.

Una expresión equivalente de la derivada parcial es

$$\left.\frac{d}{dx} f(x, y_0)\right|_{x = x_0}.$$

La pendiente de la curva $z = f(x, y_0)$ en el punto $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ en el plano $y = y_0$ es el valor de la derivada parcial de f con respecto a x en (x_0, y_0). (En la figura 14.16, esta pendiente es negativa). La recta tangente a la curva en P es la recta en el plano $y = y_0$ que pasa por P con esta pendiente. La derivada parcial $\partial f/\partial x$ en (x_0, y_0) da la razón de cambio de f con respecto a x cuando y se mantiene fija en el valor y_0.

Usamos diferentes notaciones para la derivada parcial:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ o } f_x(x_0, y_0), \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} \qquad \text{y} \qquad f_x, \frac{\partial f}{\partial x}, z_x \text{ o } \frac{\partial z}{\partial x}.$$

La definición de la derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a y en el punto (x_0, y_0) es similar a la definición de la derivada parcial de f con respecto a x. Mantenemos a x fija en el valor x_0 y tomamos la derivada ordinaria de $f(x_0, y)$ con respecto a y en y_0.

DEFINICIÓN **La derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a y en el punto (x_0, y_0)** es

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} = \left.\frac{d}{dy} f(x_0, y)\right|_{y = y_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h},$$

siempre que el límite exista.

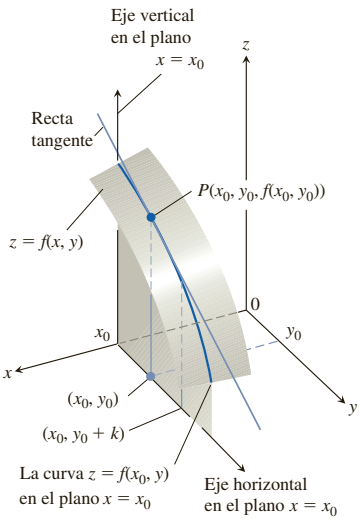


FIGURA 14.17 La intersección del plano $x = x_0$ con la superficie $z = f(x, y)$, vista desde arriba del primer cuadrante del plano xy.

La pendiente de la curva $z = f(x_0, y)$ en el punto $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ del plano vertical $x = x_0$ (figura 14.17) es la derivada parcial de f con respecto a y en (x_0, y_0). La recta tangente a la curva en P es la recta en el plano $x = x_0$ que pasa por P con esta pendiente. La derivada parcial da la razón de cambio de f con respecto a y en (x_0, y_0) cuando x se mantiene fija en el valor x_0.

La derivada parcial con respecto a y se representa del mismo modo que la derivada parcial con respecto a x:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \qquad f_y(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad f_y.$$

Observe que ahora tenemos dos rectas tangentes asociadas a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ (figura 14.18). ¿El plano que las rectas determinan es tangente a la superficie en P? Veremos que así es para las funciones *diferenciables* definidas al final de esta sección, y aprenderemos cómo obtener el plano tangente en la sección 14.6. Primero tenemos que aprender más acerca de las derivadas parciales.

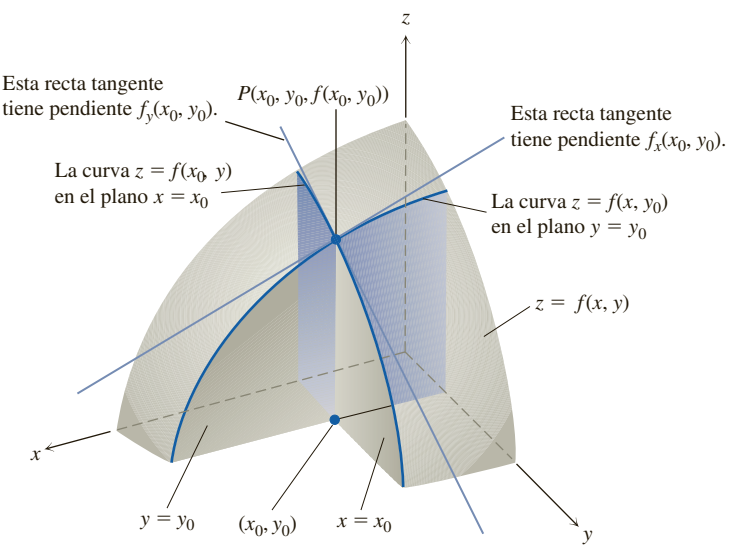


FIGURA 14.18 Las figuras 14.16 y 14.17 combinadas. Las rectas tangentes en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ determinan un plano que, al menos en esta figura, parece ser tangente a la superficie.

Cálculos

Las definiciones de $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ nos ofrecen dos maneras de diferenciar f en un punto: con respecto a x, del modo usual, mientras se trata a y como constante, y con respecto a y, del modo habitual, cuando se trata a x como constante. Como muestran los siguientes ejemplos, los valores de estas derivadas parciales, por lo general, son distintos en un punto dado (x_0, y_0).

EJEMPLO 1 Encuentre los valores de $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ en el punto $(4, -5)$, si

$$f(x, y) = x^2 + 3xy + y - 1.$$

Solución Para obtener $\partial f/\partial x$, tratamos a y como una constante y diferenciamos con respecto a x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3xy + y - 1) = 2x + 3 \cdot 1 \cdot y + 0 - 0 = 2x + 3y.$$

El valor de $\partial f/\partial x$ en $(4, -5)$ es $2(4) + 3(-5) = -7$.

Para obtener $\partial f/\partial y$, tratamos a x como una constante y diferenciamos con respecto a y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 3xy + y - 1) = 0 + 3 \cdot x \cdot 1 + 1 - 0 = 3x + 1.$$

El valor de $\partial f/\partial y$ en $(4, -5)$ es $3(4) + 1 = 13$. ■

EJEMPLO 2 Obtenga $\partial f/\partial y$ como una función, si $f(x, y) = y \operatorname{sen} xy$.

Solución Consideramos a x como constante y a f como un producto de y y sen xy:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y \operatorname{sen} xy) = y\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{sen} xy + (\operatorname{sen} xy)\frac{\partial}{\partial y}(y)$$

$$= (y \cos xy)\frac{\partial}{\partial y}(xy) + \operatorname{sen} xy = xy \cos xy + \operatorname{sen} xy.$$ ■

EJEMPLO 3 Obtenga f_x y f_y como funciones si

$$f(x, y) = \frac{2y}{y + \cos x}.$$

Solución Tratamos a f como cociente. Manteniendo a y constante, tenemos

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{y + \cos x}\right) = \frac{(y + \cos x)\frac{\partial}{\partial x}(2y) - 2y\frac{\partial}{\partial x}(y + \cos x)}{(y + \cos x)^2}$$

$$= \frac{(y + \cos x)(0) - 2y(-\operatorname{sen} x)}{(y + \cos x)^2} = \frac{2y \operatorname{sen} x}{(y + \cos x)^2}.$$

Si mantenemos a x constante, obtenemos

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{y + \cos x}\right) = \frac{(y + \cos x)\frac{\partial}{\partial y}(2y) - 2y\frac{\partial}{dy}(y + \cos x)}{(y + \cos x)^2}$$

$$= \frac{(y + \cos x)(2) - 2y(1)}{(y + \cos x)^2} = \frac{2 \cos x}{(y + \cos x)^2}.$$ ■

La diferenciación implícita funciona para las derivadas parciales de la misma manera que para las derivadas ordinarias, como ilustra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Obtenga $\partial z/\partial x$ si la ecuación

$$yz - \ln z = x + y$$

define a z como una función de dos variables independientes x y y, y la derivada parcial existe.

Solución Diferenciamos ambos lados de la ecuación con respecto a x, manteniendo a y constante y tratando a z como función diferenciable de x:

$$\frac{\partial}{\partial x}(yz) - \frac{\partial}{\partial x}\ln z = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + 0 \qquad \text{Con } y \text{ constante, } \frac{\partial}{\partial x}(yz) = y\frac{\partial z}{\partial x}.$$

$$\left(y - \frac{1}{z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{yz - 1}.$$ ■

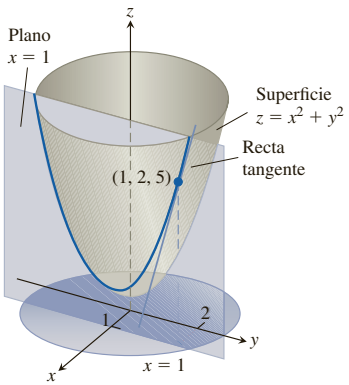


FIGURA 14.19 La tangente a la curva de intersección del plano $x = 1$ y la superficie $z = x^2 + y^2$ en el punto (1, 2, 5) (ejemplo 5).

EJEMPLO 5 El plano $x = 1$ corta al paraboloide $z = x^2 + y^2$ en una parábola. Determine la pendiente de la tangente a la parábola en (1, 2, 5) (figura 14.19).

Solución La pendiente es el valor de la derivada parcial $\partial z/\partial y$ en (1, 2):

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} = \left.\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2)\right|_{(1,2)} = \left.2y\right|_{(1,2)} = 2(2) = 4.$$

Para verificar, podemos considerar a la parábola como la gráfica de una función de una sola variable $z = (1)^2 + y^2 = 1 + y^2$ en el plano $x = 1$ y calcular la pendiente en $y = 2$. La pendiente, calculada ahora como una derivada ordinaria, es

$$\left.\frac{dz}{dy}\right|_{y=2} = \left.\frac{d}{dy}(1 + y^2)\right|_{y=2} = \left.2y\right|_{y=2} = 4. \quad \blacksquare$$

Funciones de más de dos variables

Las definiciones de las derivadas parciales de funciones de más de dos variables independientes son similares a las definiciones para funciones de dos variables. Son derivadas ordinarias con respecto a una variable, la cual se calcula mientras las demás variables independientes se mantienen constantes.

EJEMPLO 6 Si x, y y z son variables independientes y

$$f(x, y, z) = x \operatorname{sen}(y + 3z),$$

entonces,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}[x \operatorname{sen}(y + 3z)] = x\frac{\partial}{\partial z}\operatorname{sen}(y + 3z)$$

$$= x\cos(y + 3z)\frac{\partial}{\partial z}(y + 3z) = 3x\cos(y + 3z). \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 7 Si tres resistencias de R_1, R_2 y R_3 ohms se conectan en paralelo para obtener una resistencia de R ohms, es posible obtener el valor de R por medio de la ecuación

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

(figura 14.20). Determine el valor de $\partial R/\partial R_2$ cuando $R_1 = 30$, $R_2 = 45$ y $R_3 = 90$ ohms.

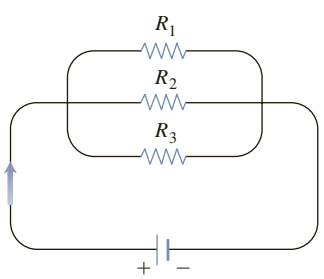


FIGURA 14.20 Se dice que las resistencias dispuestas de esta manera están conectadas en paralelo (ejemplo 7). Cada resistencia deja pasar una parte de la corriente. Su resistencia equivalente R se calcula mediante la fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

Solución Para obtener $\partial R/\partial R_2$, consideramos a R_1 y R_3 como constantes y, usando la diferenciación implícita, derivamos ambos lados de la ecuación con respecto a R_2:

$$\frac{\partial}{\partial R_2}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial R_2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

$$-\frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial R_2} = 0 - \frac{1}{{R_2}^2} + 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial R_2} = \frac{R^2}{{R_2}^2} = \left(\frac{R}{R_2}\right)^2.$$

Cuando $R_1 = 30$, $R_2 = 45$ y $R_3 = 90$,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{30} + \frac{1}{45} + \frac{1}{90} = \frac{3 + 2 + 1}{90} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15},$$

de manera que $R = 15$ y

$$\frac{\partial R}{\partial R_2} = \left(\frac{15}{45}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

Por lo tanto, en los valores dados, un pequeño cambio en la resistencia R_2 trae consigo un cambio en R de aproximadamente $1/9$. ■

Derivadas parciales y continuidad

Una función $f(x, y)$ puede tener derivadas parciales con respecto tanto a x como a y en un punto donde la función no sea continua. Esto es diferente de las funciones con una sola variable, donde la existencia de una derivada implica continuidad. Sin embargo, si las derivadas parciales de $f(x, y)$ existen y son continuas en todo un disco con centro en (x_0, y_0), entonces, *f es* continua en (x_0, y_0), como veremos al final de esta sección.

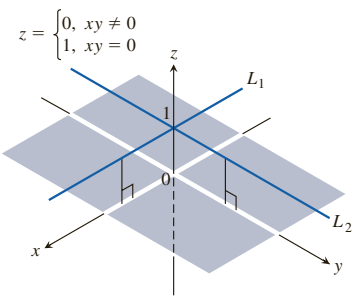


FIGURA 14.21 La gráfica de

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$$

consta de las rectas L_1 y L_2 y los cuatro cuadrantes abiertos del plano xy. La función tiene derivadas parciales en el origen, pero no es continua allí (ejemplo 8).

EJEMPLO 8 Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$$

(figura 14.21).

a) Encuentre el límite de f cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$ a lo largo de la recta $y = x$.

b) Demuestre que f no es continua en el origen.

c) Demuestre que las derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ existen en el origen.

Solución

a) Puesto que $f(x, y)$ es igual a cero a lo largo de la recta $y = x$ (excepto en el origen), tenemos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)\Big|_{y=x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0.$$

b) Puesto que $f(0, 0) = 1$, el límite del inciso *a)* demuestra que f no es continua en $(0, 0)$.

c) Para calcular $\partial f/\partial x$ en $(0, 0)$, mantenemos fija a y en $y = 0$. Entonces, $f(x, y) = 1$ para toda x, y la gráfica de f es la recta L_1 en la figura 14.21. La pendiente de esta recta para cualquier x es $\partial f/\partial x = 0$. En particular, $\partial f/\partial x = 0$ en $(0, 0)$. De manera análoga, $\partial f/\partial y$ es la pendiente de la recta L_2 en cualquier y, de manera que $\partial f/\partial y = 0$ en $(0, 0)$. ■

A pesar de lo que indica el ejemplo 8, sigue siendo cierto que, en dimensiones superiores, la *diferenciabilidad* en un punto implica continuidad. Lo que el ejemplo 8 sugiere es que necesitamos un requisito más fuerte para la diferenciabilidad en dimensiones superiores que la simple existencia de las derivadas parciales. Al final de esta sección, definiremos la diferenciabilidad para funciones de dos variables (la cual es ligeramente más complicada que la de las funciones de una sola variable), y luego retomaremos el tema en relación con la continuidad.

Derivadas parciales de segundo orden

Al diferenciar dos veces una función $f(x, y)$, generamos sus derivadas de segundo orden. Estas derivadas se denotan, por lo regular, como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ o } f_{xx}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ o } f_{yy},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ o } f_{yx} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ o } f_{xy}.$$

Las ecuaciones que las definen son

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

etcétera. Observe el orden en el cual se toman las derivadas parciales:

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ Diferenciar primero con respecto a y, y luego con respecto a x.

$f_{yx} = (f_y)_x$ Significa lo mismo.

EJEMPLO 9 Si $f(x, y) = x \cos y + ye^x$, obtenga las derivadas de segundo orden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Solución El primer paso es calcular las primeras derivadas parciales.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x \cos y + ye^x) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x \cos y + ye^x)$$
$$= \cos y + ye^x \qquad = -x \operatorname{sen} y + e^x$$

Ahora obtenemos ambas derivadas parciales de cada primera derivada parcial:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\operatorname{sen} y + e^x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\operatorname{sen} y + e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = ye^x. \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -x \cos y.$$

Teorema de la derivada mixta

En ocasiones, alterar el orden en el que se toman las derivadas conduce a resultados diferentes.

Tal vez habrá notado que las derivadas parciales "mixtas" de segundo orden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

del ejemplo 9 son iguales. Esto no es una coincidencia. Deben ser iguales siempre que f, f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx} sean continuas, como se establece en el siguiente teorema. Sin embargo, las derivadas mixtas pueden ser diferentes cuando no se satisfacen las condiciones de continuidad (vea el ejercicio 72).

TEOREMA 2 Teorema de la derivada mixta Si $f(x, y)$ y sus derivadas parciales f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx} están definidas en una región abierta que contiene un punto (a, b), y todas son continuas en (a, b), entonces,

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b).$$

El teorema 2 también se conoce como teorema de Clairaut, en honor del matemático francés Alexis Clairaut, quien lo descubrió. En el apéndice 10 se presenta una demostración. El teorema 2 afirma que para calcular una segunda derivada mixta, podemos diferenciar en cualquier orden, siempre que las condiciones de continuidad se satisfagan. Algunas veces, esta posibilidad de proceder en orden diferente simplifica nuestros cálculos.

EJEMPLO 10 Obtenga $\partial^2 w / \partial x \partial y$ si

$$w = xy + \frac{e^y}{y^2 + 1}.$$

Solución El símbolo $\partial^2 w/\partial x\partial y$ nos indica que diferenciemos primero con respecto a y y, luego, con respecto a x. Sin embargo, si intercambiamos el orden de la diferenciación y derivamos primero con respecto a x, obtenemos la respuesta más rápidamente. En dos pasos,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = 1.$$

Si diferenciamos primero con respecto a y, obtenemos también $\partial^2 w/\partial x\partial y = 1$. Podemos diferenciar en otro orden porque las condiciones del teorema 2 se cumplen para w en todos los puntos (x_0, y_0). ■

Derivadas parciales de orden superior

Si bien trataremos la mayoría de las veces con derivadas parciales de primero y de segundo órdenes, ya que son las que aparecen con más frecuencia en las aplicaciones, no hay un límite teórico para el número de veces que podemos diferenciar una función mientras sus derivadas existan. Por lo tanto, tenemos derivadas de tercero y de cuarto órdenes representadas por símbolos como

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = f_{yyx},$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = f_{yyxx},$$

y así sucesivamente. Al igual que sucede con las segundas derivadas parciales, es irrelevante la jerarquía de la diferenciación siempre que todas las derivadas a través del orden en cuestión sean continuas.

EJEMPLO 11 Obtenga f_{yxyz} si $f(x, y, z) = 1 - 2xy^2z + x^2y$.

Solución Primero diferenciamos con respecto a la variable y, luego con respecto a x, luego otra vez con respecto a y, y finalmente con respecto a z:

$$\begin{aligned} f_y &= -4xyz + x^2 \\ f_{yx} &= -4yz + 2x \\ f_{yxy} &= -4z \\ f_{yxyz} &= -4. \end{aligned}$$

■

Diferenciabilidad

El concepto de *diferenciabilidad* para funciones de varias variables es más complicado que para funciones de una variable, ya que se puede aproximar a un punto en el dominio a través de más de una trayectoria. En la definición de derivadas parciales para una función de dos variables, se interseca la superficie de la gráfica con planos verticales paralelos a los planos xz y yz, creando una curva en cada plano, llamada *traza*. Se ha visto a las derivadas parciales como las pendientes de las dos rectas tangentes a estas curvas traza en el punto sobre la superficie que corresponde al punto (x_0, y_0) al que se está aproximando en el dominio. (Vea la figura 14.18). Para una función diferenciable, parece razonable suponer que si se tuviera que hacer girar ligeramente uno de estos planos verticales, manteniéndolo vertical, pero ya no paralelo a su plano de coordenadas, aparecería una curva traza suave en ese plano que tendría un recta tangente en el punto de la superficie con una pendiente ligeramente diferente de la que tenía antes (cuando el plano era paralelo a su plano de coordenadas). Sin embargo, la sola existencia de la derivada parcial original no garantiza este resultado. Por ejemplo, la superficie podría tener una "fisura" en la dirección del nuevo plano, de tal forma que la curva traza ni siquiera fuera continua en (x_0, y_0), y mucho menos tendría una recta tangente en el punto correspondiente de la curva. De igual manera que tener un límite en las

direcciones de las coordenadas x y y no implica que la función misma tenga un límite en (x_0, y_0), como vemos en la figura 14.21, la existencia de ambas derivadas parciales no es suficiente, por sí sola, para asegurar que existan derivadas de las curvas traza en otros planos verticales. Para la existencia de la diferenciabilidad, se necesita una propiedad que asegure que no ocurre algún cambio abrupto en la función como resultado de los pequeños cambios en las variables independientes, a lo largo de cualquier trayectoria de aproximación al punto (x_0, y_0); a través de esas trayectorias se permite que cambien *ambas* variables, x y y, en lugar de que sólo cambie una de ellas en un momento dado. En la sección 3.11 vimos una forma de razonar acerca del cambio en una función.

En nuestro estudio de funciones con una sola variable, encontramos que si una función $y = f(x)$ es diferenciable en $x = x_0$, entonces, el cambio Δy que resulta del cambio en x de x_0 a $x_0 + \Delta x$ está cercano al cambio ΔL a lo largo de la recta tangente (o aproximación lineal L de la función f en x_0). Es decir, a partir de la ecuación (1) de la sección 3.11,

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \epsilon \Delta x$$

donde $\epsilon \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$. La extensión de este resultado se utiliza para *definir* la diferenciabilidad en el caso de funciones de dos variables.

DEFINICIÓN Una función $z = f(x, y)$ es **diferenciable en** (x_0, y_0) si $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$ existen y si Δz satisface una ecuación de la forma

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

en la que tanto $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ como $\Delta x, \Delta y \to 0$. Llamamos a f **diferenciable** si lo es en todos los puntos de su dominio, y decimos que su gráfica es una **superficie suave**.

El siguiente teorema (que se demuestra en el apéndice 9) y su corolario nos dicen que funciones con primeras derivadas parciales *continuas* en (x_0, y_0) son diferenciables en ese punto, y que se aproximan en forma adecuada localmente mediante una función lineal. Esta aproximación se estudiará en la sección 14.6.

TEOREMA 3 Teorema del incremento para funciones de dos variables Suponga que las primeras derivadas parciales de $f(x, y)$ están definidas en una región abierta R que contiene el punto (x_0, y_0), y que f_x y f_y son continuas en (x_0, y_0). Entonces, el cambio

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

en el valor de f que resulta del movimiento de (x_0, y_0) a otro punto $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ en R satisface la ecuación de la forma

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

donde tanto $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ como $\Delta x, \Delta y \to 0$.

COROLARIO DEL TEOREMA 3 Si las derivadas parciales f_x y f_y de una función $f(x, y)$ son continuas en una región abierta R, entonces, f es diferenciable en cada punto de R.

Si $z = f(x, y)$ es diferenciable, entonces, la definición de diferenciabilidad asegura que $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ tiende a 0 cuando Δx y Δy tienden a 0. Esto nos dice que una función de dos variables es continua en todos los puntos donde ésta es diferenciable.

TEOREMA 4 La diferenciabilidad implica continuidad Si una función $f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0), entonces, f es continua en (x_0, y_0).

Como podemos ver en el corolario 3 y el teorema 4, una función $f(x, y)$ debe ser continua en un punto (x_0, y_0) si f_x y f_y son continuas en una región abierta que contiene a (x_0, y_0). Sin embargo, recuerde que aún es posible que una función de dos variables sea discontinua en un punto donde existen sus primeras derivadas parciales, como vimos en el ejemplo 8. La sola existencia de las derivadas parciales en un punto no es suficiente, pero la continuidad de las derivadas parciales garantiza la diferenciabilidad.

Ejercicios 14.3

Cálculo de derivadas parciales de primer orden

En los ejercicios 1 a 22, obtenga $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$.

1. $f(x, y) = 2x^2 - 3y - 4$

2. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$

3. $f(x, y) = (x^2 - 1)(y + 2)$

4. $f(x, y) = 5xy - 7x^2 - y^2 + 3x - 6y + 2$

5. $f(x, y) = (xy - 1)^2$

6. $f(x, y) = (2x - 3y)^3$

7. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

8. $f(x, y) = (x^3 + (y/2))^{2/3}$

9. $f(x, y) = 1/(x + y)$

10. $f(x, y) = x/(x^2 + y^2)$

11. $f(x, y) = (x + y)/(xy - 1)$

12. $f(x, y) = \tan^{-1}(y/x)$

13. $f(x, y) = e^{(x+y+1)}$

14. $f(x, y) = e^{-x} \operatorname{sen}(x + y)$

15. $f(x, y) = \ln(x + y)$

16. $f(x, y) = e^{xy} \ln y$

17. $f(x, y) = \operatorname{sen}^2(x - 3y)$

18. $f(x, y) = \cos^2(3x - y^2)$

19. $f(x, y) = x^y$

20. $f(x, y) = \log_y x$

21. $f(x, y) = \displaystyle\int_x^y g(t)\,dt$ (g es continua para toda t)

22. $f(x, y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n$ $(|xy| < 1)$

En los ejercicios 23 a 34, obtenga f_x, f_y y f_z.

23. $f(x, y, z) = 1 + xy^2 - 2z^2$

24. $f(x, y, z) = xy + yz + xz$

25. $f(x, y, z) = x - \sqrt{y^2 + z^2}$

26. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

27. $f(x, y, z) = \operatorname{sen}^{-1}(xyz)$

28. $f(x, y, z) = \sec^{-1}(x + yz)$

29. $f(x, y, z) = \ln(x + 2y + 3z)$

30. $f(x, y, z) = yz \ln(xy)$

31. $f(x, y, z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$

32. $f(x, y, z) = e^{-xyz}$

33. $f(x, y, z) = \tanh(x + 2y + 3z)$

34. $f(x, y, z) = \operatorname{senh}(xy - z^2)$

En los ejercicios 35 a 40, calcule la derivada parcial de la función con respecto a cada variable.

35. $f(t, \alpha) = \cos(2\pi t - \alpha)$

36. $g(u, v) = v^2 e^{(2u/v)}$

37. $h(\rho, \phi, \theta) = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta$

38. $g(r, \theta, z) = r(1 - \cos \theta) - z$

39. Trabajo realizado por el corazón (sección 3.11, ejercicio 61)

$$W(P, V, \delta, v, g) = PV + \frac{V\delta v^2}{2g}$$

40. Fórmula de Wilson para el tamaño de un lote (sección 4.6, ejercicio 53)

$$A(c, h, k, m, q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2}$$

Cálculo de derivadas parciales de segundo orden

Encuentre todas las derivadas parciales de segundo orden de las funciones de los ejercicios 41 a 50.

41. $f(x, y) = x + y + xy$

42. $f(x, y) = \operatorname{sen} xy$

43. $g(x, y) = x^2y + \cos y + y \operatorname{sen} x$

44. $h(x, y) = xe^y + y + 1$

45. $r(x, y) = \ln(x + y)$

46. $s(x, y) = \tan^{-1}(y/x)$

47. $w = x^2 \tan(xy)$

48. $w = ye^{x^2 - y}$

49. $w = x \operatorname{sen}(x^2y)$

50. $w = \dfrac{x - y}{x^2 + y}$

Derivadas parciales mixtas

En los ejercicios 51 a 54, verifique que $w_{xy} = w_{yx}$.

51. $w = \ln(2x + 3y)$

52. $w = e^x + x \ln y + y \ln x$

53. $w = xy^2 + x^2y^3 + x^3y^4$

54. $w = x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x + xy$

55. ¿Cuál orden de diferenciación calculará f_{xy} más rápido: primero x o primero y? Trate de contestar sin escribir.

a) $f(x, y) = x \operatorname{sen} y + e^y$

b) $f(x, y) = 1 > x$

c) $f(x, y) = y + (x > y)$

d) $f(x, y) = y + x^2y + 4y^3 - \ln(y^2 + 1)$

e) $f(x, y) = x^2 + 5xy + \operatorname{sen} x + 7e^x$

f) $f(x, y) = x \ln xy$

56. La derivada parcial de quinto orden $\partial^5 f/\partial x^2 \partial y^3$ es cero para todas las siguientes funciones. Para demostrarlo rápidamente, ¿con respecto a cuál variable diferenciaría primero: x o y? Trate de contestar sin escribir.

a) $f(x, y) = y^2x^4e^x + 2$

b) $f(x, y) = y^2 + y(\operatorname{sen} x - x^4)$

c) $f(x, y) = x^2 + 5xy + \operatorname{sen} x + 7e^x$

d) $f(x, y) = xe^{y^2 > 2}$

Uso de la definición de derivada parcial

En los ejercicios 57 a 60, utilice la definición de derivadas parciales con límite para calcular las derivadas parciales de las funciones en los puntos especificados.

57. $f(x, y) = 1 - x + y - 3x^2y$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(1, 2)$

58. $f(x, y) = 4 + 2x - 3y - xy^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(-2, 1)$

59. $f(x, y) = \sqrt{2x + 3y - 1}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(-2, 3)$

60. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^3 + y^4)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(0, 0)$

61. Sea $f(x, y) = 2x + 3y - 4$. Encuentre la pendiente de la recta tangente a esta superficie en el punto $(2, -1)$ y que se encuentra en ***a)*** el plano $x = 2$, ***b)*** el plano $y = -1$.

62. Sea $f(x, y) = x^2 + y^3$. Determine la pendiente de la recta tangente a esta superficie en el punto $(-1, 1)$ y que se encuentra en ***a)*** el plano $x = -1$, ***b)*** el plano $y = 1$.

63. Tres variables Sea $w = f(x, y, z)$ una función de tres variables independientes y escriba la definición formal de la derivada parcial $\partial f/\partial z$ en (x_0, y_0, z_0). Use esta definición para obtener $\partial f/\partial z$ en $(1, 2, 3)$ si $f(x, y, z) = x^2yz^2$.

64. Tres variables Sea $w = f(x, y, z)$ una función de tres variables independientes y escriba la definición formal de la derivada parcial $\partial f/\partial y$ en (x_0, y_0, z_0). Use esta definición para obtener $\partial f/\partial y$ en $(-1, 0, 3)$ si $f(x, y, z) = -2xy^2 + yz^2$.

Diferenciación implícita

65. Determine el valor de $\partial z/\partial x$ en el punto $(1, 1, 1)$ si la ecuación

$$xy + z^3x - 2yz = 0$$

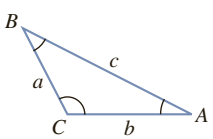
define a z como una función de las dos variables independientes x y y, y la derivada parcial existe.

66. Obtenga el valor de $\partial x/\partial z$ en el punto $(1, -1, -3)$ si la ecuación

$$xz + y \ln x - x^2 + 4 = 0$$

define a x como una función de las dos variables independientes y y z, y la derivada parcial existe.

Los ejercicios 67 y 68 se refieren al triángulo que aquí se ilustra.



67. Exprese A implícitamente como función de a, b y c, y calcule $\partial A/\partial a$ y $\partial A/\partial b$.

68. Exprese a en forma implícita como función de A, b y B, y calcule $\partial a/\partial A$ y $\partial a/\partial B$.

69. Dos variables dependientes Exprese v_x en términos de u y y si las ecuaciones $x = v \ln u$ y $y = u \ln v$ definen a u y v como funciones de las variables independientes x y y, considerando que v_x existe. (*Sugerencia:* Aplique la diferenciación en ambas ecuaciones con respecto a x y resuelva para obtener v_x por eliminación de u_x).

70. Dos variables dependientes Obtenga $\partial x/\partial u$ y $\partial y/\partial u$ si las ecuaciones $u = x^2 - y^2$ y $v = x^2 - y$ definen a x y y como funciones de las variables independientes u y v, y las derivadas parciales existen. (Vea la sugerencia del ejercicio 69). Luego, considere $s = x^2 + y^2$ y obtenga $\partial s/\partial u$.

Teoría y ejemplos

71. Sea $f(x, y) = \begin{cases} y^3, & y \geq 0 \\ -y^2, & y < 0. \end{cases}$

Obtenga f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx} y establezca el dominio de cada derivada parcial.

72. Sea $f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq 0, \\ 0, & \text{si } (x, y) = 0. \end{cases}$

a) Demuestre que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x$ para toda x, y $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y$ para toda y.

b) Demuestre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$.

En la página 788 se presenta la gráfica de f.

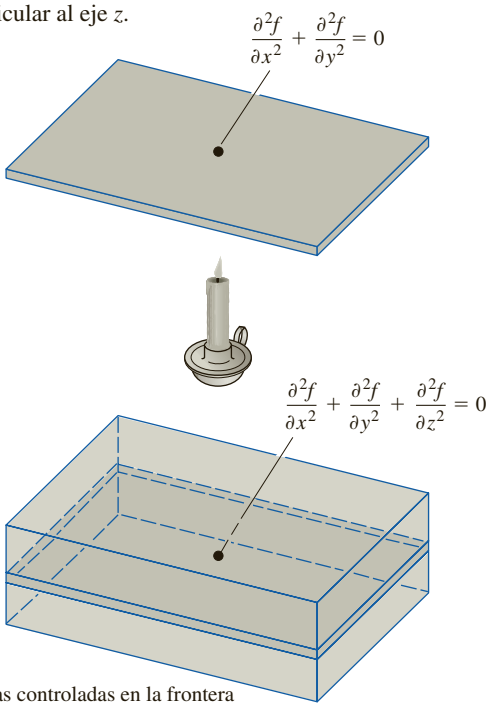
La **ecuación tridimensional de Laplace**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

se satisface por las distribuciones de temperatura de estado estable $T = f(x, y, z)$ en el espacio, que se deben a los potenciales gravitacionales y electrostáticos. La **ecuación bidimensional de Laplace**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

obtenida por la eliminación del término $\partial^2 f/\partial z^2$ de la ecuación anterior, describe potenciales y distribuciones de temperaturas de estado estable en un plano (vea la siguiente figura). El plano *a)* puede considerarse como una rebanada delgada del sólido *b)* perpendicular al eje z.



Temperaturas controladas en la frontera

Demuestre que cada función en los ejercicios 73 a 80 satisface la ecuación de Laplace.

73. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$

74. $f(x, y, z) = 2z^3 - 3(x^2 + y^2)z$

75. $f(x, y) = e^{-2y} \cos 2x$

76. $f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

77. $f(x, y) = 3x + 2y - 4$

78. $f(x, y) = \tan^{-1}\dfrac{x}{y}$

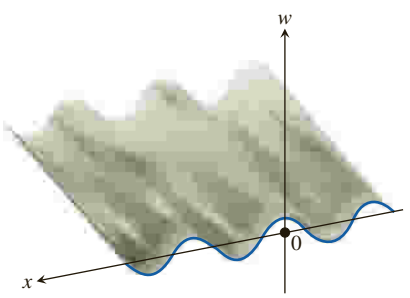
79. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

80. $f(x, y, z) = e^{3x+4y} \cos 5z$

La ecuación de onda Si tomamos una fotografía de las olas del mar desde la orilla de la playa, la foto mostrará un patrón regular de picos y valles en un instante determinado. Vemos el movimiento vertical periódico en el espacio con respecto a la distancia. Si permanecemos en el agua, podemos sentir cómo ésta sube y baja con el vaivén de las olas. Vemos el movimiento vertical periódico en el tiempo. En física, esta hermosa simetría se expresa mediante la **ecuación de onda en una dimensión**

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

donde w es la altura de la onda, x es la variable de la distancia, t es la variable de tiempo y c es la velocidad con la que se propagan las ondas.



En nuestro ejemplo, x es la distancia a través de la superficie del océano, pero en otras aplicaciones, x podría ser la distancia a lo largo de una cuerda que vibra, la distancia en el aire (ondas sonoras) o la distancia a través del espacio (ondas de luz). El número c varía dependiendo del medio y del tipo de onda.

Demuestre que todas las funciones de los ejercicios 81 a 87 son soluciones de la ecuación de onda.

81. $w = \text{sen}\,(x + ct)$

82. $w = \cos\,(2x + 2ct)$

83. $w = \text{sen}\,(x + ct) + \cos\,(2x + 2ct)$

84. $w = \ln\,(2x + 2ct)$

85. $w = \tan\,(2x - 2ct)$

86. $w = 5\cos\,(3x + 3ct) + e^{x+ct}$

87. $w = f(u)$, donde f es una función diferenciable de u, y $u = a(x + ct)$, donde a es una constante.

88. ¿Una función $f(x, y)$ que tiene sus primeras derivadas parciales continuas en una región abierta R tiene que ser continua en R? Justifique su respuesta.

89. Suponga que una función $f(x, y)$ tiene sus segundas derivadas parciales continuas en una región abierta R. ¿Las derivadas parciales de primer orden de f deben ser continuas en R? Justifique su respuesta.

90. Ecuación del calor Una ecuación diferencial parcial importante que describe la distribución del calor en una región en el tiempo t se puede representar con una *ecuación del calor en una dimensión*.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Demuestre que $u(x, t) = \text{sen}(\alpha x) \cdot e^{-\beta t}$ satisface la ecuación del calor para las constantes α y β. ¿Cuál es la relación entre α y β para que esta función sea una solución?

91. Sea $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Demuestre que $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ existen, pero f no es diferenciable en $(0, 0)$. [*Sugerencia:* Use el teorema 4 y demuestre que f no es continua en $(0, 0)$].

92. Sea $f(x, y) = \begin{cases} 0, & x^2 < y < 2x^2 \\ 1, & \text{de otra forma.} \end{cases}$

Demuestre que $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ existen, pero f no es diferenciable en $(0, 0)$.

14.4 Regla de la cadena

La regla de la cadena para funciones de una variable, que se estudió en la sección 3.6, afirma que cuando $w = f(x)$ es una función diferenciable de x y $x = g(t)$ es una función diferenciable de t, w es una función diferenciable de t y dw/dt se puede calcular mediante la fórmula

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

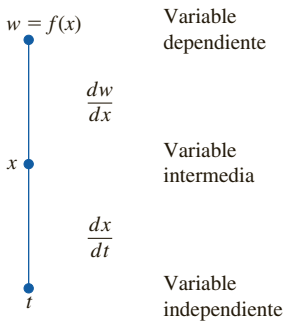
Para esta composición de funciones $w(t) = f(g(t))$, podemos pensar en t como la variable independiente y en $x = g(t)$ como "la variable intermedia", ya que t determina el valor de x que, a la vez, da el valor de w a partir de la función f. Presentamos la regla de la cadena en un "diagrama de árbol" en el margen de la siguiente página.

Para funciones de dos o más variables, la regla de la cadena tiene diversas formas que dependen de cuántas variables independientes e intermedias estén implicadas. Sin embargo,

una vez que esto se toma en cuenta, la regla de la cadena funciona de la misma manera que acabamos de analizar.

Para encontrar dw/dt, lea hacia abajo la ruta de w a t, multiplicando las derivadas a lo largo de la trayectoria.

Regla de la cadena



Funciones de dos variables

La fórmula de la regla de la cadena de una función diferenciable $w = f(x, y)$, cuando $x = x(t)$ y $y = y(t)$ son funciones diferenciables de t, está dada por el siguiente teorema.

TEOREMA 5 Regla de la cadena para funciones de una variable independiente y dos variables intermedias Si $w = f(x, y)$ es diferenciable y si $x = x(t)$, $y = y(t)$ son funciones diferenciables de t, entonces, la composición $w = f(x(t), y(t))$ es una función diferenciable de t y

$$\frac{dw}{dt} = f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t),$$

o bien,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Cada una de las expresiones $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial w}{\partial x}$, f_x indica la derivada parcial de f con respecto a x.

Demostración Este procedimiento consiste en demostrar que si x y y son diferenciables en $t = t_0$, entonces, w es diferenciable en t_0 y

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t_0} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0}\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0},$$

donde $P_0 = (x(t_0), y(t_0))$. Los subíndices indican dónde se calcula cada una de las derivadas.

Sean Δx, Δy y Δw los incrementos resultantes de variar t de t_0 a $t_0 + \Delta t$. Puesto que f es diferenciable (vea la definición en la sección 14.3),

$$\Delta w = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0}\Delta x + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0}\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y,$$

donde $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta x, \Delta y \to 0$. Para obtener dw/dt, dividimos esta ecuación entre Δt y dejamos que Δt tienda a cero. De la división resulta

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \epsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta t} + \epsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Al hacer que Δt tienda a cero, tenemos

$$\begin{aligned}\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t_0} &= \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta w}{\Delta t} \\ &= \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0}\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0} + 0 \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} + 0 \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0}.\end{aligned}$$

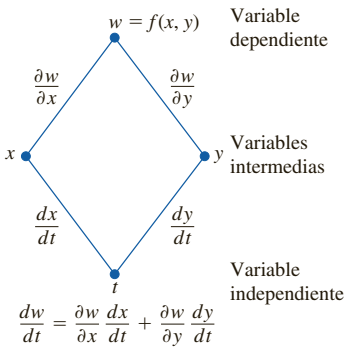
■

Con frecuencia escribimos $\partial w/\partial x$ para representar la derivada parcial $\partial f/\partial x$, de manera que podemos replantear la regla de la cadena del teorema 5 en la forma

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Para recordar la regla de la cadena, observe el siguiente diagrama. Para calcular dw/dt, comience en w y lea hacia abajo cada ruta que conduce a t, multiplicando las derivadas a lo largo del camino. Luego, sume los productos.

Regla de la cadena



Sin embargo, el significado de la variable dependiente w es diferente en cada lado de la ecuación anterior. En el lado izquierdo se refiere a la composición $w = f(x(t), y(t))$ como una función de una sola variable t. En el lado derecho se refiere a la función $w = f(x, y)$ como una función de dos variables x y y. Aún más, las derivadas individuales dw/dt, dx/dt y dy/dt se calculan en un punto t_0, mientras que las derivadas parciales $\partial w/\partial x$ y $\partial w/\partial y$ se evalúan en el punto (x_0, y_0), con $x_0 = x(t_0)$ y $y_0 = y(t_0)$. Una vez comprendido esto, usaremos ambas formas de manera indistinta a lo largo del texto, siempre que no haya riesgo de alguna confusión.

El **diagrama de árbol** al margen representa una manera fácil de recordar la regla de la cadena. La "verdadera" variable independiente en la función compuesta es t, mientras que x y y son *variables intermedias* (controladas por t), y w es la variable dependiente.

Una notación más precisa para la regla de la cadena muestra dónde se evalúan las diferentes derivadas del teorema 5:

$$\frac{dw}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \frac{dy}{dt}(t_0).$$

EJEMPLO 1 Use la regla de la cadena para obtener la derivada de

$$w = xy$$

con respecto a t a lo largo de la trayectoria $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$. ¿Cuál es el valor de la derivada en $t = \pi/2$?

Solución Aplicamos la regla de la cadena para obtener dw/dt como sigue:

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\
&= \frac{\partial (xy)}{\partial x} \cdot \frac{d}{dt}(\cos t) + \frac{\partial (xy)}{\partial y} \cdot \frac{d}{dt}(\operatorname{sen} t) \\
&= (y)(-\operatorname{sen} t) + (x)(\cos t) \\
&= (\operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t) + (\cos t)(\cos t) \\
&= -\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t \\
&= \cos 2t.
\end{aligned}$$

Podemos verificar el resultado de este ejemplo con un cálculo más directo. Como una función de t,

$$w = xy = \cos t \operatorname{sen} t = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t,$$

por lo que,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right) = \frac{1}{2} \cdot 2\cos 2t = \cos 2t.$$

En cualquier caso, en el valor dado de t,

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t=\pi/2} = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \cos \pi = -1.$$

■

Funciones de tres variables

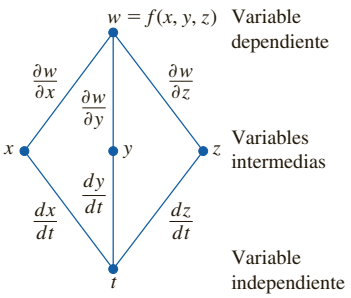
Tal vez se imagine la forma de la regla de la cadena para funciones de tres variables, ya que sólo requiere agregar el tercer término a la fórmula de dos variables.

TEOREMA 6 Regla de la cadena para funciones de una variable independiente y tres variables intermedias Si $w = f(x, y, z)$ es diferenciable, y x, y y z son funciones diferenciables de t, entonces, w es una función diferenciable de t y

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Aquí tenemos tres rutas de w a t en vez de dos, pero la obtención de dw/dt es igual. Lea hacia abajo cada ruta, multiplicando las derivadas a lo largo del camino; luego, sume.

Regla de la cadena



$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

La demostración es idéntica a la del teorema 5, excepto que ahora tenemos tres variables intermedias en vez de dos. El diagrama de árbol que usamos para recordar la nueva ecuación también es similar, con tres rutas de w a t.

EJEMPLO 2 Obtenga dw/dt si

$$w = xy + z, \qquad x = \cos t, \qquad y = \operatorname{sen} t, \qquad z = t.$$

En este ejemplo, los valores de $w(t)$ cambian a lo largo de la trayectoria de una hélice (sección 13.1) conforme t cambia. ¿Cuál es el valor de la derivada en $t = 0$?

Solución De acuerdo con la regla de la cadena para tres variables intermedias, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\ &= (y)(-\operatorname{sen} t) + (x)(\cos t) + (1)(1) \\ &= (\operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t) + (\cos t)(\cos t) + 1 \\ &= -\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1 = 1 + \cos 2t,\end{aligned}$$

Se sustituyen las variables intermedias.

de manera que

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t=0} = 1 + \cos(0) = 2.$$ ■

Para la interpretación física del cambio a lo largo de la curva, piense en un objeto cuya posición está cambiando con el tiempo t. Si $w = T(x, y, z)$ es la temperatura en cada punto (x, y, z) a lo largo de una curva C con ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$ y $z = z(t)$, entonces, la función compuesta $w = T(x(t), y(t), z(t))$ representa la temperatura en relación con t a lo largo de la curva. La derivada dw/dt es entonces la tasa instantánea de cambio de la temperatura debido al movimiento a lo largo de la curva, como se calcula en el teorema 6.

Funciones definidas en superficies

Si estamos interesados en la temperatura $w = f(x, y, z)$ en los puntos (x, y, z) sobre la superficie de la Tierra, podríamos pensar en x, y y z como funciones de las variables r y s que proporcionan las longitudes y latitudes de los puntos. Si $x = g(r, s)$, $y = h(r, s)$ y $z = k(r, s)$, podríamos expresar la temperatura como una función de r y s con la función compuesta

$$w = f(g(r, s), h(r, s), k(r, s)).$$

En las condiciones establecidas a continuación, w tiene derivadas parciales con respecto tanto a r como a s, las cuales se pueden calcular de la siguiente manera.

TEOREMA 7 Regla de la cadena para dos variables independientes y tres variables intermedias Suponga que $w = f(x, y, z)$, $x = g(r, s)$, $y = h(r, s)$ y $z = k(r, s)$. Si las cuatro funciones son diferenciables, entonces, w tiene derivadas parciales con respecto a r y s, dadas por las fórmulas

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}.$$

La primera de estas ecuaciones puede deducirse de la regla de la cadena del teorema 6, manteniendo a s fija y tratando a r como t. La segunda se obtiene de la misma forma, manteniendo a r fija y tratando a s como t. Los diagramas de árbol para ambas ecuaciones se presentan en la figura 14.22.

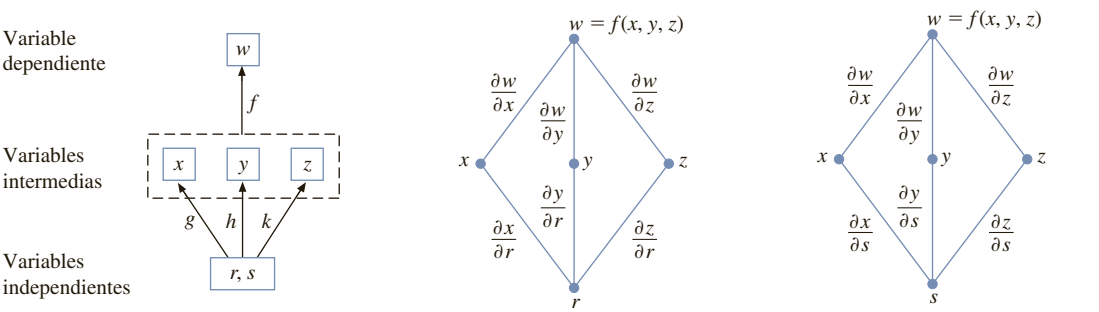


FIGURA 14.22 Función compuesta y diagramas de árbol para el teorema 7.

EJEMPLO 3 Exprese $\partial w/\partial r$ y $\partial w/\partial s$ en términos de r y s si

$$w = x + 2y + z^2, \qquad x = \frac{r}{s}, \qquad y = r^2 + \ln s, \qquad z = 2r.$$

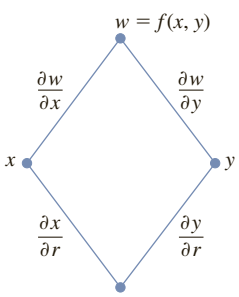
Solución Con base en las fórmulas del teorema 7, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} \\ &= (1)\left(\frac{1}{s}\right) + (2)(2r) + (2z)(2) \qquad \text{Se sustituye la variable intermedia } z. \\ &= \frac{1}{s} + 4r + (4r)(2) = \frac{1}{s} + 12r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \\ &= (1)\left(-\frac{r}{s^2}\right) + (2)\left(\frac{1}{s}\right) + (2z)(0) = \frac{2}{s} - \frac{r}{s^2}.\end{aligned}$$

■

Regla de la cadena



$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

FIGURA 14.23 Diagrama de árbol para la ecuación

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}.$$

Si f es una función de dos variables en vez de tres, cada ecuación del teorema 7 se convierte en una correspondiente con un término menos.

Si $w = f(x, y)$, $x = g(r, s)$ y $y = h(r, s)$, entonces,

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}.$$

La figura 14.23 muestra el diagrama de árbol de la primera de estas ecuaciones. El diagrama de la segunda ecuación es similar; sólo se sustituye r por s.

EJEMPLO 4 Exprese $\partial w/\partial r$ y $\partial w/\partial s$ en términos de r y s si

$$w = x^2 + y^2, \qquad x = r - s, \qquad y = r + s.$$

Solución La discusión anterior nos conduce a lo siguiente.

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\\ &= (2x)(1) + (2y)(1) & &= (2x)(-1) + (2y)(1)\\ &= 2(r - s) + 2(r + s) & &= -2(r - s) + 2(r + s)\\ &= 4r & &= 4s\end{aligned}$$

Se sustituyen las variables intermedias. ■

Si f es una función de una sola variable intermedia x, nuestras ecuaciones son incluso más sencillas.

Regla de la cadena

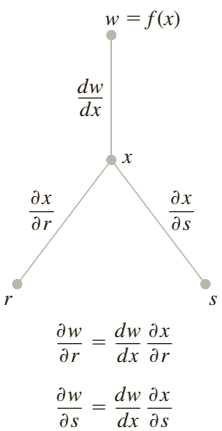


FIGURA 14.24 Diagrama de árbol para diferenciar f como una función compuesta de r y s con una variable intermedia.

Si $w = f(x)$ y $x = g(r, s)$, entonces,

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{dw}{dx}\frac{\partial x}{\partial r} \quad \text{y} \quad \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{dw}{dx}\frac{\partial x}{\partial s}.$$

En este caso, usamos la derivada ordinaria (de una variable) dw/dx. El diagrama de árbol se presenta en la figura 14.24.

Revisión de la diferenciación implícita

La regla de la cadena para dos variables en el teorema 5 conduce a una fórmula que toma algo de álgebra de la diferenciación implícita. Suponga que

1. La función $F(x, y)$ es diferenciable y
2. La ecuación $F(x, y) = 0$ define a y de manera implícita como una función diferenciable de x, digamos, $y = h(x)$.

Puesto que $w = F(x, y) = 0$, la derivada dw/dx debe ser cero. Al calcular la derivada a partir de la regla de la cadena (diagrama de árbol de la figura 14.25), obtenemos

$$\begin{aligned}0 = \frac{dw}{dx} &= F_x\frac{dx}{dx} + F_y\frac{dy}{dx} && \text{Teorema 5, con } t = x \text{ y } f = F\\ &= F_x \cdot 1 + F_y \cdot \frac{dy}{dx}.\end{aligned}$$

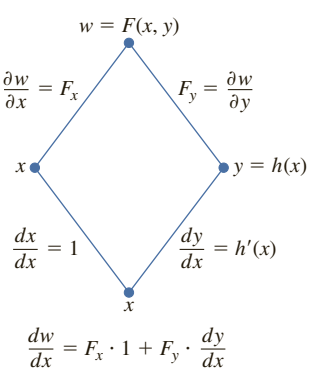


FIGURA 14.25 Diagrama de árbol de la diferenciación de $w = F(x, y)$ con respecto a x. Establecer que $dw/dx = 0$ nos lleva a una sencilla fórmula de cálculo para la diferenciación implícita (teorema 8).

Si $F_y = \partial w/\partial y \neq 0$, podemos despejar dy/dx de esta ecuación para obtener

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Definimos formalmente este resultado.

TEOREMA 8 Una fórmula para la diferenciación implícita Suponga que $F(x, y)$ es diferenciable y que la ecuación $F(x, y) = 0$ define a y como una función diferenciable de x. Entonces, en cualquier punto donde $F_y \neq 0$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}. \tag{1}$$

EJEMPLO 5 Use el teorema 8 para encontrar dy/dx si $y^2 - x^2 - \operatorname{sen} xy = 0$.

Solución Si se toma $F(x, y) = y^2 - x^2 - \operatorname{sen} xy$, entonces,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{-2x - y\cos xy}{2y - x\cos xy}$$
$$= \frac{2x + y\cos xy}{2y - x\cos xy}.$$

Este cálculo es significativamente más corto que el cálculo de una sola variable mediante diferenciación implícita. ■

El resultado del teorema 8 se extiende con facilidad a tres variables. Suponga que la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define implícitamente la variable z como una función $z = f(x, y)$. Entonces, para cada (x, y) en el dominio de f, tenemos que $F(x, y, f(x, y)) = 0$. Suponiendo que F y f son funciones diferenciables, podemos usar la regla de la cadena para diferenciar la ecuación $F(x, y, z) = 0$ con respecto a la variable independiente x:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$
$$= F_x \cdot 1 + F_y \cdot 0 + F_z \cdot \frac{\partial z}{\partial x},$$

y es constante cuando se efectúa la diferenciación con respecto a x.

de manera que

$$F_x + F_z\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Un cálculo similar de diferenciación con respecto a la variable independiente y da como resultado

$$F_y + F_z\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Siempre que $F_z \neq 0$, podemos resolver estas dos últimas ecuaciones para las derivadas parciales de $z = f(x, y)$ y obtener

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}. \tag{2}$$

Un resultado importante de cálculo avanzado, llamado **teorema de la función implícita**, establece las condiciones para las cuales los resultados de la ecuación (2) son válidos. Si las derivadas parciales F_x, F_y y F_z son continuas en una región abierta R en el espacio que contiene el punto (x_0, y_0, z_0), y si para alguna constante c, $F(x_0, y_0, z_0) = c$ y $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, entonces, la ecuación $F(x, y, z) = c$ define a z implícitamente como una función diferenciable de x y y cerca de (x_0, y_0, z_0), y las derivadas parciales de z están dadas por las ecuaciones (2).

EJEMPLO 6 Obtenga $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ en $(0, 0, 0)$ si $x^3 + z^2 + ye^{xz} + z\cos y = 0$.

Solución Sea $F(x, y, z) = x^3 + z^2 + ye^{xz} + z\cos y$. Entonces,

$$F_x = 3x^2 + zye^{xz}, \qquad F_y = e^{xz} - z\operatorname{sen} y \qquad \text{y} \qquad F_z = 2z + xye^{xz} + \cos y.$$

Puesto que $F(0, 0, 0) = 0$, $F_z(0, 0, 0) = 1 \neq 0$, y todas las primeras derivadas parciales son continuas, el teorema de la función implícita afirma que $F(x, y, z) = 0$ define a z como una función diferenciable de x y y cerca del punto $(0, 0, 0)$. Partiendo de la ecuación (2),

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + zye^{xz}}{2z + xye^{xz} + \cos y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{e^{xz} - z \operatorname{sen} y}{2z + xye^{xz} + \cos y}.$$

En $(0, 0, 0)$ obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{0}{1} = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{1} = -1.$$

■

Funciones de varias variables

En esta sección hemos visto varias formas de la regla de la cadena, pero cada una de ellas es sólo un caso especial de una fórmula general. Cuando se resuelven problemas específicos, suele ser útil trazar el diagrama de árbol adecuado colocando la variable dependiente en la parte superior, las variables intermedias en el medio, y la variable independiente seleccionada en la parte inferior. Para calcular la derivada de la variable dependiente con respecto a la variable independiente seleccionada, inicie en la variable dependiente y lea hacia abajo por cada ruta del diagrama de árbol hacia la variable independiente, calculando y multiplicando las derivadas a lo largo de cada ruta. Luego, sume los productos encontrados en las diferentes trayectorias.

En general, suponga que $w = f(x, y, \ldots, v)$ es una función diferenciable de las variables intermedias $x, y, \ldots, v$ (un conjunto finito) y las $x, y, \ldots, v$ son funciones diferenciables de $p, q, \ldots, t$ (otro conjunto finito). Entonces, w es una función diferenciable de las variables p hasta t, y las derivadas parciales de w con respecto a estas variables están dadas por ecuaciones de la forma

$$\frac{\partial w}{\partial p} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p}.$$

Las otras ecuaciones se obtienen sustituyendo p por $q, \ldots, t$, una a la vez.

Un modo de recordar esta ecuación es visualizar el lado derecho como el producto punto de dos vectores con componentes

$$\underbrace{\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial v}\right)}_{\text{Derivadas de } w \text{ con respecto a las variables intermedias}} \qquad \text{y} \qquad \underbrace{\left(\frac{\partial x}{\partial p}, \frac{\partial y}{\partial p}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial p}\right)}_{\text{Derivadas de las variables intermedias con respecto a la variable independiente seleccionada}}.$$

Ejercicios 14.4

Regla de la cadena: una variable independiente

En los ejercicios 1 a 6, ***a)*** exprese dw/dt como una función de t usando la regla de la cadena y expresando w en términos de t, diferenciando directamente con respecto a t. Luego, ***b)*** evalúe dw/dt en el valor dado de t.

1. $w = x^2 + y^2, \quad x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t; \quad t = \pi$
2. $w = x^2 + y^2, \quad x = \cos t + \operatorname{sen} t, \quad y = \cos t - \operatorname{sen} t; \quad t = 0$
3. $w = \dfrac{x}{z} + \dfrac{y}{z}, \quad x = \cos^2 t, \quad y = \operatorname{sen}^2 t, \quad z = 1/t; \quad t = 3$
4. $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2), \quad x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = 4\sqrt{t}\,; \quad t = 3$
5. $w = 2ye^x - \ln z, \quad x = \ln(t^2 + 1), \quad y = \tan^{-1} t, \quad z = e^t; \quad t = 1$
6. $w = z - \operatorname{sen} xy, \quad x = t, \quad y = \ln t, \quad z = e^{t-1}; \quad t = 1$

Regla de la cadena: dos y tres variables independientes

En los ejercicios 7 y 8, ***a)*** exprese $\partial z/\partial u$ y $\partial z/\partial v$ como funciones de u y v, usando la regla de la cadena y expresando z directamente en términos de u y v antes de diferenciar. Luego, ***b)*** evalúe $\partial z/\partial u$ y $\partial z/\partial v$ en el punto dado (u, v).

7. $z = 4e^x \ln y, \quad x = \ln(u \cos v), \quad y = u \operatorname{sen} v; \quad (u, v) = (2, \pi/4)$

8. $z = \tan^{-1}(x/y), \quad x = u\cos v, \quad y = u \operatorname{sen} v;$
$(u, v) = (1.3, \pi/6)$

En los ejercicios 9 y 10, ***a)*** exprese $\partial w/\partial u$ y $\partial w/\partial v$ como funciones de u y v, usando la regla de la cadena y expresando w directamente en términos de u y v antes de diferenciar. Luego, ***b)*** evalúe $\partial w/\partial u$ y $\partial w/\partial v$ en el punto dado (u, v).

9. $w = xy + yz + xz, \quad x = u + v, \quad y = u - v, \quad z = uv;$
$(u, v) = (1/2, 1)$

10. $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2), \quad x = ue^v \operatorname{sen} u, \quad y = ue^v \cos u,$
$z = ue^v; \quad (u, v) = (-2, 0)$

En los ejercicios 11 y 12, ***a)*** exprese $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$ y $\partial u/\partial z$ como funciones de x, y y z, usando la regla de la cadena y expresando u directamente en términos de x, y y z antes de diferenciar. Luego, ***b)*** evalúe $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$ y $\partial u/\partial z$ en el punto dado (x, y, z).

11. $u = \dfrac{p - q}{q - r}, \quad p = x + y + z, \quad q = x - y + z,$
$r = x + y - z; \quad (x, y, z) = \left(\sqrt{3}, 2, 1\right)$

12. $u = e^{qr} \operatorname{sen}^{-1} p, \quad p = \operatorname{sen} x, \quad q = z^2 \ln y, \quad r = 1/z;$
$(x, y, z) = (\pi/4, 1/2, -1/2)$

Uso del diagrama de árbol

En los ejercicios 13 a 24, dibuje un diagrama de árbol y escriba una fórmula de la regla de la cadena para cada derivada.

13. $\dfrac{dz}{dt}$ para $z = f(x, y), \quad x = g(t), \quad y = h(t)$

14. $\dfrac{dz}{dt}$ para $z = f(u, v, w), \quad u = g(t), \quad v = h(t), \quad w = k(t)$

15. $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial w}{\partial v}$ para $w = h(x, y, z), \quad x = f(u, v), \quad y = g(u, v),$
$z = k(u, v)$

16. $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial w}{\partial y}$ para $w = f(r, s, t), \quad r = g(x, y), \quad s = h(x, y),$
$t = k(x, y)$

17. $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial w}{\partial v}$ para $w = g(x, y), \quad x = h(u, v), \quad y = k(u, v)$

18. $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial w}{\partial y}$ para $w = g(u, v), \quad u = h(x, y), \quad v = k(x, y)$

19. $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ para $z = f(x, y), \quad x = g(t, s), \quad y = h(t, s)$

20. $\dfrac{\partial y}{\partial r}$ para $y = f(u), \quad u = g(r, s)$

21. $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ y $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ para $w = g(u), \quad u = h(s, t)$

22. $\dfrac{\partial w}{\partial p}$ para $w = f(x, y, z, v), \quad x = g(p, q), \quad y = h(p, q),$
$z = j(p, q), \quad v = k(p, q)$

23. $\dfrac{\partial w}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ para $w = f(x, y), \quad x = g(r), \quad y = h(s)$

24. $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ para $w = g(x, y), \quad x = h(r, s, t), \quad y = k(r, s, t)$

Diferenciación implícita

Suponiendo que las ecuaciones de los ejercicios 25 a 28 definen a y como una función diferenciable de x, use el teorema 8 para obtener el valor de dy/dx en el punto dado.

25. $x^3 - 2y^2 + xy = 0, \quad (1, 1)$

26. $xy + y^2 - 3x - 3 = 0, \quad (-1, 1)$

27. $x^2 + xy + y^2 - 7 = 0, \quad (1, 2)$

28. $xe^y + \operatorname{sen} xy + y - \ln 2 = 0, \quad (0, \ln 2)$

Obtenga los valores de $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ en los puntos indicados en los ejercicios 29 a 32.

29. $z^3 - xy + yz + y^3 - 2 = 0, \quad (1, 1, 1)$

30. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} - 1 = 0, \quad (2, 3, 6)$

31. $\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(y + z) + \operatorname{sen}(x + z) = 0, \quad (\pi, \pi, \pi)$

32. $xe^y + ye^z + 2\ln x - 2 - 3\ln 2 = 0, \quad (1, \ln 2, \ln 3)$

Cálculo de derivadas parciales en puntos específicos

33. Determine $\partial w/\partial r$ cuando $r = 1, s = -1$ si $w = (x + y + z)^2$, $x = r - s$, $y = \cos(r + s)$, $z = \operatorname{sen}(r + s)$.

34. Determine $\partial w/\partial v$ cuando $u = -1, v = 2$ si $w = xy + \ln z$, $x = v^2/u$, $y = u + v$, $z = \cos u$.

35. Determine $\partial w/\partial v$ cuando $u = 0, v = 0$ si $w = x^2 + (y/x)$, $x = u - 2v + 1$, $y = 2u + v - 2$.

36. Determine $\partial z/\partial u$ cuando $u = 0, v = 1$ si $z = \operatorname{sen} xy + x \operatorname{sen} y$, $x = u^2 + v^2$, $y = uv$.

37. Determine $\partial z/\partial u$ y $\partial z/\partial v$ cuando $u = \ln 2, v = 1$ si $z = 5\tan^{-1} x$ y $x = e^u + \ln v$.

38. Determine $\partial z/\partial u$ y $\partial z/\partial v$ cuando $u = 1, \ v = -2$ si $z = \ln q$ y $q = \sqrt{v + 3}\tan^{-1} u$.

Teoría y ejemplos

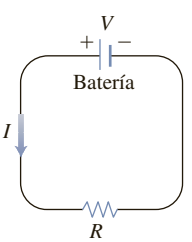
39. Suponga que $w = f(s^3 + t^2)$ y $f'(x) = e^x$. Encuentre $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ y $\dfrac{\partial w}{\partial s}$.

40. Suponga que $w = f\left(ts^2, \dfrac{s}{t}\right)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = xy$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{x^2}{2}$.
Encuentre $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ y $\dfrac{\partial w}{\partial s}$.

41. Cambio de voltaje en un circuito El voltaje V en un circuito que satisface la ley $V = IR$ cae lentamente conforme la batería se agota. Al mismo tiempo, la resistencia R aumenta conforme el resistor se calienta. Use la ecuación

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial I}\frac{dI}{dt} + \frac{\partial V}{\partial R}\frac{dR}{dt}$$

para saber cómo cambia la corriente en el instante en que $R = 600$ ohms, $I = 0.04$ amp, $dR/dt = 0.5$ ohms/s, y $dV/dt = 0.01$ volt/s.



42. Cambio de dimensiones en una caja Las longitudes a, b y c de las aristas de una caja rectangular cambian con el tiempo. En un instante en cuestión, $a = 1$ m, $b = 2$ m, $c = 3$ m, $da/dt = db/dt = 1$ m/s, y $dc/dt = 3$ m/s. ¿Qué valores tienen las tasas de cambio del volumen V y del área S de la caja en ese instante? La longitud de las diagonales interiores de la caja, ¿aumenta o disminuye?

43. Si $f(u, v, w)$ es diferenciable y $u = x - y$, $v = y - z$ y $w = z - x$, demuestre que

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

44. Coordenadas polares Suponga que en una función diferenciable $w = f(x, y)$, sustituimos las coordenadas polares $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$.

a) Demuestre que

$$\frac{\partial w}{\partial r} = f_x \cos\theta + f_y \,\text{sen}\,\theta$$

y

$$\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} = -f_x \,\text{sen}\,\theta + f_y \cos\theta.$$

b) Resuelva las ecuaciones del inciso *a)* para expresar f_x y f_y en términos de $\partial w/\partial r$ y $\partial w/\partial\theta$.

c) Demuestre que

$$(f_x)^2 + (f_y)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2.$$

45. Ecuaciones de Laplace Demuestre que si $w = f(u, v)$ satisface la ecuación de Laplace $f_{uu} + f_{vv} = 0$ y si $u = (x^2 - y^2)/2$ y $v = xy$, entonces, w satisface la ecuación de Laplace $w_{xx} + w_{yy} = 0$.

46. Ecuaciones de Laplace Sea $w = f(u) + g(v)$, donde $u = x + iy$, $v = x - iy$ e $i = \sqrt{-1}$. Demuestre que w satisface la ecuación de Laplace $w_{xx} + w_{yy} = 0$ si todas las funciones necesarias son diferenciables.

47. Valores extremos en una hélice Suponga que las derivadas parciales de una función $f(x, y, z)$ en los puntos de la hélice $x = \cos t$, $y = \text{sen}\,t$ y $z = t$ son

$$f_x = \cos t, \qquad f_y = \text{sen}\,t, \qquad f_z = t^2 + t - 2.$$

¿En cuáles puntos de la curva, si acaso, f puede tener valores extremos?

48. Curva en el espacio Sea $w = x^2e^{2y}\cos 3z$. Obtenga el valor de dw/dt en el punto $(1, \ln 2, 0)$ en la curva $x = \cos t$, $y = \ln(t + 2)$, $z = t$.

49. Temperatura dentro de una circunferencia Sea $T = f(x, y)$ la temperatura en el punto (x, y) en la circunferencia $x = \cos t$, $y = \text{sen}\,t$, $0 \le t \le 2\pi$ y suponga que

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 8x - 4y, \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = 8y - 4x.$$

a) Encuentre dónde ocurren las temperaturas máxima y mínima en la circunferencia, examinando las derivadas dT/dt y d^2T/dt^2.

b) Suponga que $T = 4x^2 - 4xy + 4y^2$. Obtenga los valores máximo y mínimo de T dentro de la circunferencia.

50. Temperatura en una elipse Sea $T = g(x, y)$ la temperatura en el punto (x, y) sobre la elipse

$$x = 2\sqrt{2}\cos t, \qquad y = \sqrt{2}\,\text{sen}\,t, \qquad 0 \le t \le 2\pi,$$

y suponga que

$$\frac{\partial T}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = x.$$

a) Localice las temperaturas máxima y mínima sobre la elipse examinando dT/dt y d^2T/dt^2.

b) Suponga que $T = xy - 2$. Obtenga los valores máximo y mínimo de T sobre la elipse.

Diferenciación de integrales Con restricciones mínimas de continuidad, es verdad que si

$$F(x) = \int_a^b g(t, x)\,dt,$$

entonces, $F'(x) = \displaystyle\int_a^b g_x(t, x)\,dt$. Con base en este hecho y de acuerdo con la regla de la cadena, podemos determinar la derivada de

$$F(x) = \int_a^{f(x)} g(t, x)\,dt$$

dejando que

$$G(u, x) = \int_a^u g(t, x)\,dt,$$

donde $u = f(x)$. Determine las derivadas de las funciones en los ejercicios 51 y 52.

51. $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \sqrt{t^4 + x^3}\,dt$ **52.** $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^1 \sqrt{t^3 + x^2}\,dt$

14.5 Derivadas direccionales y vectores gradiente

Si observa el mapa (figura 14.26) que muestra los contornos a lo largo del parque nacional de Yosemite en California, notará que los arroyos fluyen de manera perpendicular a los contornos. Los arroyos siguen las trayectorias descendentes más pronunciadas, de manera que el agua alcanza las zonas bajas rápidamente. Por lo tanto, la razón instantánea de cambio más rápida en la altura del flujo sobre el nivel del mar tiene una dirección particular. En esta sección verá por qué esta dirección, llamada dirección "cuesta abajo", es perpendicular a los contornos.

Derivadas direccionales en el plano

Sabemos por la sección 14.4 que si $f(x, y)$ es diferenciable, entonces, la razón de cambio de f con respecto a t a lo largo de una curva diferenciable $x = g(t)$, $y = h(t)$ es

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

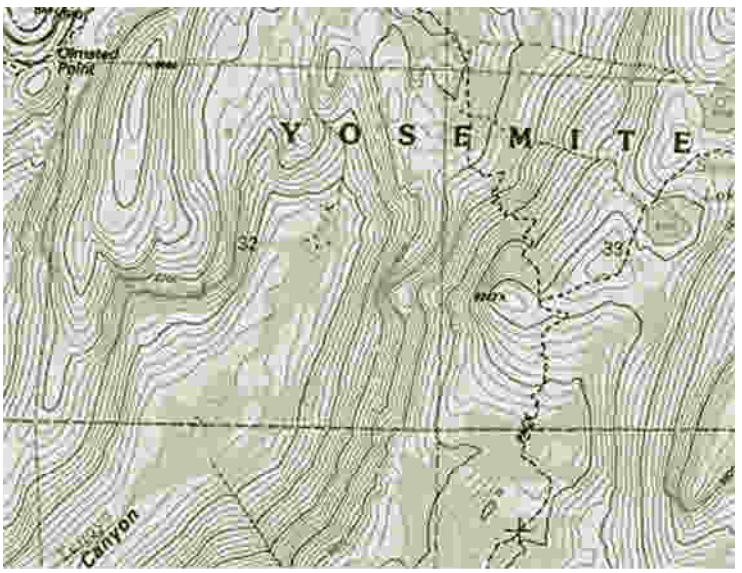


FIGURA 14.26 Contornos dentro del parque nacional de Yosemite en California, y sus corrientes de agua con trayectorias de descenso pronunciado que fluyen en forma perpendicular a los contornos.
(*Fuente:* Mapa del parque nacional de Yosemite de U. S. Geological Survey, http://www.usgs.gov)

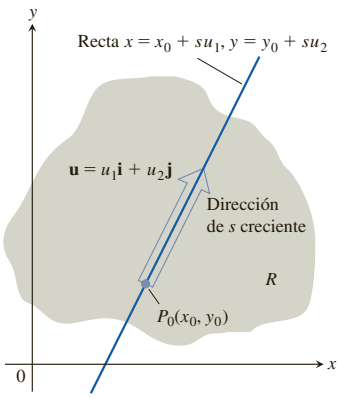


FIGURA 14.27 La razón de cambio de f en la dirección de $\mathbf{u}$ en el punto P_0 es la razón a la cual f cambia a lo largo de esta recta en P_0.

En cualquier punto $P_0(x_0, y_0) = P_0(g(t_0), h(t_0))$, esta ecuación proporciona la razón de cambio de f con respecto a t creciente y, por lo tanto, depende entre otros factores de la dirección de movimiento a lo largo de la curva. Si la curva es una línea recta y t es el parámetro de la longitud de arco a lo largo de la recta, medida desde P_0 en la dirección de un vector unitario dado $\mathbf{u}$, entonces, df/dt es la razón de cambio de f con respecto a la distancia en su dominio en la dirección de $\mathbf{u}$. Al variar $\mathbf{u}$, obtenemos las razones a las cuales cambia f con respecto a la distancia cuando nos movemos a través de P_0 en diferentes direcciones. Definiremos esta idea con mayor precisión.

Suponga que la función $f(x, y)$ está definida en una región R del plano xy, que $P_0(x_0, y_0)$ es un punto de R y que $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ es un vector unitario. Entonces, las ecuaciones

$$x = x_0 + su_1, \qquad y = y_0 + su_2$$

parametrizan la recta que pasa por P_0 paralela a $\mathbf{u}$. Si el parámetro s mide la longitud de arco desde P_0 en dirección de $\mathbf{u}$, encontramos la razón de cambio de f en P_0 en la dirección de $\mathbf{u}$, calculando df/ds en P_0 (figura 14.27).

DEFINICIÓN La **derivada de f en $P_0(x_0, y_0)$ en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$** es el número

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u}, P_0} = \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s}, \tag{1}$$

siempre que el límite exista.

La **derivada direccional** definida por la ecuación (1) también se representa como

$$(D_{\mathbf{u}} f)_{P_0}. \qquad \text{"Derivada de } f \text{ en } P_0 \text{ en la dirección de } \mathbf{u}\text{"}$$

Las derivadas parciales $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$ son las derivadas direccionales de f en el punto P_0 en las direcciones $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$. Esta observación es evidente al comparar la ecuación (1) con las definiciones de las dos derivadas parciales que se enunciaron en la sección 14.3.

EJEMPLO 1 Empleando la definición, obtenga la derivada de

$$f(x, y) = x^2 + xy$$

en $P_0(1, 2)$ en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = \left(1/\sqrt{2}\right)\mathbf{i} + \left(1/\sqrt{2}\right)\mathbf{j}$.

Solución Al aplicar la definición de la ecuación (1). obtenemos

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u}, P_0} = \lim_{s\to 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s} \qquad \text{Ecuación (1)}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{f\left(1 + s\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}, 2 + s\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - f(1, 2)}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{\left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\left(2 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right) - (1^2 + 1\cdot 2)}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{\left(1 + \frac{2s}{\sqrt{2}} + \frac{s^2}{2}\right) + \left(2 + \frac{3s}{\sqrt{2}} + \frac{s^2}{2}\right) - 3}{s}$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{\frac{5s}{\sqrt{2}} + s^2}{s} = \lim_{s\to 0}\left(\frac{5}{\sqrt{2}} + s\right) = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

La razón de cambio de $f(x, y) = x^2 + xy$ en $P_0(1, 2)$ en la dirección de $\mathbf{u}$ es $5/\sqrt{2}$. ■

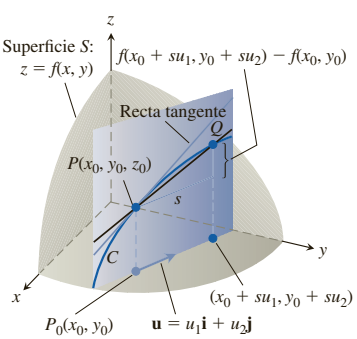


FIGURA 14.28 La pendiente de la curva C en P_0 es $\lim_{Q\to P}$ pendiente (PQ); ésta es la derivada direccional

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u}, P_0} = (D_{\mathbf{u}}f)_{P_0}.$$

Interpretación de la derivada direccional

La ecuación $z = f(x, y)$ representa una superficie S en el espacio. Si $z_0 = f(x_0, y_0)$, entonces, el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ está en S. El plano vertical que pasa por P y $P_0(x_0, y_0)$ paralelo a $\mathbf{u}$ interseca a S en la curva C (figura 14.28). La razón de cambio de f en la dirección de $\mathbf{u}$ es la pendiente de la tangente de C en P de acuerdo con el sistema de mano derecha formado por los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{k}$.

Cuando $\mathbf{u} = \mathbf{i}$, la derivada direccional en P_0 es $\partial f/\partial x$ evaluada en (x_0, y_0). Cuando $\mathbf{u} = \mathbf{j}$, la derivada direccional en P_0 es $\partial f/\partial y$ evaluada en (x_0, y_0). La derivada direccional generaliza las dos derivadas parciales. Ahora podemos preguntar por la razón de cambio de f en cualquier dirección $\mathbf{u}$, y no sólo en las direcciones $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$.

Para una interpretación física de la derivada direccional, suponga que $T = f(x, y)$ es la temperatura en cada punto (x, y) de una región en el plano. Entonces, $f(x_0, y_0)$ es la temperatura en el punto $P(x_0, y_0)$ y $(D_{\mathbf{u}}f)_{P_0}$ es la razón instantánea de cambio de la temperatura en P_0 al avanzar en la dirección de $\mathbf{u}$.

Cálculos y gradientes

Desarrollaremos ahora una fórmula eficiente para calcular la derivada direccional de una función diferenciable f. Comenzamos con la recta

$$x = x_0 + su_1, \qquad y = y_0 + su_2, \tag{2}$$

que pasa por $P_0(x_0, y_0)$, parametrizada con el parámetro de longitud de arco s que crece en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$. Luego, por la regla de la cadena, obtenemos

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u}, P_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}\frac{dx}{ds} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}\frac{dy}{ds} \qquad \text{Regla de la cadena para } f \text{ diferenciable}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}u_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}u_2 \qquad \text{De las ecuaciones (2), } dx/ds = u_1 \text{ y } dy/ds = u_2$$

$$= \underbrace{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}\mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}\mathbf{j}\right]}_{\text{Gradiente de } f \text{ en } P_0} \cdot \underbrace{\left[u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}\right]}_{\text{Dirección } \mathbf{u}}. \tag{3}$$

La ecuación (3) afirma que la derivada de una función diferenciable f en la dirección de $\mathbf{u}$ en P_0 es el producto punto de $\mathbf{u}$ y el vector especial, que ahora definimos.

DEFINICIÓN El **vector gradiente** (o simplemente **gradiente**) de $f(x, y)$ en un punto $P(x_0, y_0)$ es el vector

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

que se obtiene al calcular las derivadas parciales de f en el punto P_0.

La notación ∇f se lee "grad de f", "gradiente de f" o "nabla de f". El símbolo ∇ se lee "nabla". Otra notación para el gradiente es grad f. Usando la notación de gradientes, reafirmamos la ecuación (3) como un teorema.

TEOREMA 9 La derivada direccional es un producto punto Si $f(x, y)$ es diferenciable en una región abierta que contiene a $P(x_0, y_0)$, entonces,

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u}, P_0} = (\nabla f)_{P_0} \cdot \mathbf{u}, \tag{4}$$

es el producto punto del gradiente ∇f en P_0 con $\mathbf{u}$. En resumen, $D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$.

EJEMPLO 2 Obtenga la derivada de $f(x, y) = xe^y + \cos(xy)$ en el punto $(2, 0)$ en la dirección de $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$.

Solución Recuerde que la dirección de $\mathbf{v}$ es el vector unitario que se obtiene dividiendo $\mathbf{v}$ entre su longitud:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{v}}{5} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}.$$

Las derivadas parciales de f son continuas en todas partes y en $(2, 0)$ están dadas por

$$f_x(2, 0) = (e^y - y \operatorname{sen}(xy))_{(2,0)} = e^0 - 0 = 1$$
$$f_y(2, 0) = (xe^y - x \operatorname{sen}(xy))_{(2,0)} = 2e^0 - 2 \cdot 0 = 2.$$

El gradiente de f en $(2, 0)$ es

$$\nabla f|_{(2,0)} = f_x(2, 0)\mathbf{i} + f_y(2, 0)\mathbf{j} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

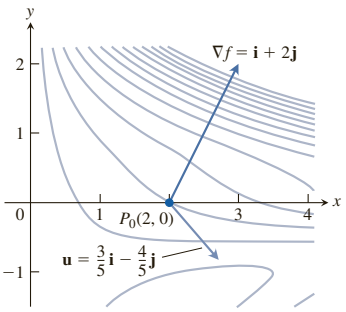


FIGURA 14.29 Gráfica de ∇f como un vector en el dominio de f. La figura muestra varias curvas de nivel de f. La razón de cambio de f en (2, 0) en la dirección de $\mathbf{u}$ es $\nabla f \cdot \mathbf{u} = 1$, que es la componente de ∇f en la dirección del vector unitario $\mathbf{u}$ (ejemplo 2).

(figura 14.29). La derivada de f en (2, 0) en la dirección de $\mathbf{v}$ es, por lo tanto,

$$(D_{\mathbf{u}}f)_{(2,0)} = \nabla f|_{(2,0)} \cdot \mathbf{u} \qquad \text{Ecuación (4) con la notación } (D_{\mathbf{u}}f)_{P_0}$$

$$= (\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}\right) = \frac{3}{5} - \frac{8}{5} = -1. \quad \blacksquare$$

Al evaluar el producto punto en la versión corta de la ecuación (4), se obtiene

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f|\,|\mathbf{u}| \cos\theta = |\nabla f| \cos\theta,$$

donde θ es el ángulo entre los vectores $\mathbf{u}$ y ∇f, y se revelan las siguientes propiedades.

Propiedades de la derivada direccional $D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f| \cos\theta$

1. La función f crece más rápidamente cuando $\cos\theta = 1$ o cuando $\theta = 0$ y $\mathbf{u}$ está en la dirección de ∇f. Es decir, en cada punto P de su dominio, f crece más rápidamente en la dirección del vector gradiente ∇f en P. La derivada en esta dirección es
$$D_{\mathbf{u}}f = |\nabla f| \cos(0) = |\nabla f|.$$
2. De manera similar, f decrece más rápidamente en la dirección de $-\nabla f$. La derivada en esta dirección es $D_{\mathbf{u}}f = |\nabla f| \cos(\pi) = -|\nabla f|$.
3. Cualquier dirección de $\mathbf{u}$ ortogonal a un gradiente de $\nabla f \neq 0$ es una dirección de cambio nulo en f porque, en este caso, θ es igual a $\pi/2$ y
$$D_{\mathbf{u}}f = |\nabla f| \cos(\pi/2) = |\nabla f| \cdot 0 = 0.$$

Como veremos más adelante, estas propiedades son válidas tanto en tres dimensiones como en dos.

EJEMPLO 3 Encuentre las direcciones en las cuales $f(x, y) = (x^2/2) + (y^2/2)$

a) crece más rápidamente en el punto (1, 1) y

b) decrece más rápidamente en el punto (1, 1).

c) ¿Cuáles son las direcciones de cambio nulo de f en (1, 1)?

Solución

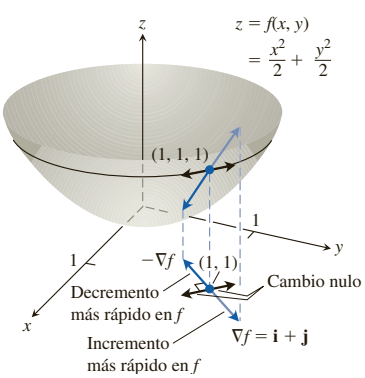


FIGURA 14.30 La dirección en la cual $f(x, y)$ crece más rápidamente en (1, 1) es la dirección de $\nabla f|_{(1,1)} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Corresponde a la dirección de máximo ascenso sobre la superficie (1, 1, 1) (ejemplo 3).

a) La función crece más rápidamente en la dirección de $-\nabla f$ en (1, 1). El gradiente en ese punto es

$$(\nabla f)_{(1,1)} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})_{(1,1)} = \mathbf{i} + \mathbf{j}.$$

Su dirección es

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}}{|\mathbf{i} + \mathbf{j}|} = \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}.$$

b) La función decrece más rápidamente en la dirección de $-\nabla f$ en (1, 1), la cual es

$$-\mathbf{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}.$$

c) Las direcciones de cambio nulo en (1, 1) son las direcciones ortogonales a ∇f:

$$\mathbf{n} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad -\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}.$$

Observe la figura 14.30. $\blacksquare$

Gradientes y tangentes a curvas de nivel

Si una función diferenciable $f(x, y)$ tiene un valor constante c a lo largo de una curva suave $\mathbf{r} = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j}$ (haciendo a la curva parte de una curva de nivel de f), entonces, $f(g(t), h(t)) = c$. Al diferenciar ambos lados de esta ecuación con respecto a t, obtenemos las ecuaciones

$$\frac{d}{dt} f(g(t), h(t)) = \frac{d}{dt}(c)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dh}{dt} = 0 \qquad \text{Regla de la cadena}$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}\right)}_{\nabla f} \cdot \underbrace{\left(\frac{dg}{dt}\mathbf{i} + \frac{dh}{dt}\mathbf{j}\right)}_{\frac{d\mathbf{r}}{dt}} = 0. \tag{5}$$

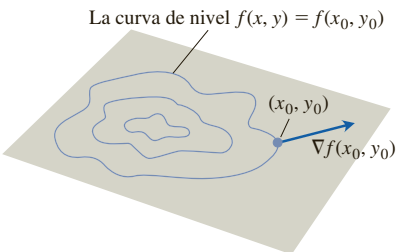


FIGURA 14.31 El gradiente de una función diferenciable de dos variables en un punto siempre es normal a la curva de nivel de la función que pasa por ese punto.

La ecuación (5) indica que ∇f es normal al vector tangente $d\mathbf{r}/dt$, de manera que es normal a la curva.

En todos los puntos (x_0, y_0) del dominio de una función diferenciable $f(x, y)$, el gradiente de f es normal a la curva de nivel que pasa por (x_0, y_0) (figura 14.31).

La ecuación (5) valida nuestra observación de que las corrientes fluyen perpendicularmente a los contornos en los mapas topográficos (vea la figura 14.26). Puesto que el flujo descendente del río alcanzará su destino de la forma más rápida, éste debe fluir en la dirección negativa de los vectores gradiente, por la propiedad 2 de la derivada direccional. La ecuación (5) señala que estas direcciones son perpendiculares a las curvas de nivel.

Esta observación también nos facilita obtener las ecuaciones de las rectas tangentes a las curvas de nivel. Son rectas normales a los gradientes. La recta que pasa por un punto $P_0(x_0, y_0)$ normal a un vector $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$ tiene la ecuación

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

(ejercicio 39). Si $\mathbf{N}$ es el gradiente $(\nabla f)_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j}$, la ecuación da la siguiente fórmula.

Recta tangente a la curva de nivel

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 \tag{6}$$

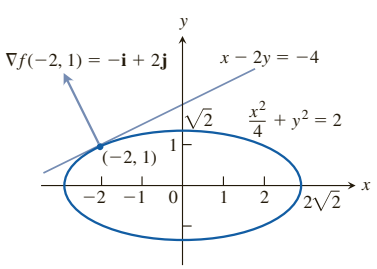


FIGURA 14.32 Podemos encontrar la tangente a la elipse $(x^2/4) + y^2 = 2$ tratando a la elipse como una curva de nivel de la función $f(x, y) = (x^2/4) + y^2$ (ejemplo 4).

EJEMPLO 4 Obtenga una ecuación para la tangente a la elipse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$$

(figura 14.32) en el punto $(-2, 1)$.

Solución La elipse es una curva de nivel de la función

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2.$$

El gradiente de f en $(-2, 1)$ es

$$\nabla f|_{(-2,1)} = \left(\frac{x}{2}\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}\right)_{(-2,1)} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}.$$

La tangente a la elipse en $(-2, 1)$ es la recta

$$(-1)(x + 2) + (2)(y - 1) = 0 \qquad \text{Ecuación (6)}$$
$$x - 2y = -4.$$

■

Si conocemos los gradientes de dos funciones f y g, automáticamente conocemos los gradientes de su suma, su resta, sus múltiplos constantes, su producto y su cociente. En el ejercicio 40 se le pedirá establecer las siguientes reglas. Observe que estas reglas tienen la misma forma que las reglas correspondientes de las derivadas de funciones de una sola variable.

Reglas algebraicas para gradientes

1. *Regla de la suma:* $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$
2. *Regla de la diferencia:* $\nabla(f - g) = \nabla f - \nabla g$
3. *Regla del múltiplo constante:* $\nabla(kf) = k\nabla f$ (cualquier número k)
4. *Regla del producto:* $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
5. *Regla del cociente:* $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

Multiplicadores escalares a la izquierda de los gradientes

EJEMPLO 5 A continuación ilustramos dos de las reglas con

$$f(x, y) = x - y \qquad g(x, y) = 3y$$
$$\nabla f = \mathbf{i} - \mathbf{j} \qquad \nabla g = 3\mathbf{j}.$$

Tenemos

1. $\nabla(f - g) = \nabla(x - 4y) = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} = \nabla f - \nabla g$ Regla 2
2. $\nabla(fg) = \nabla(3xy - 3y^2) = 3y\mathbf{i} + (3x - 6y)\mathbf{j}$
   $= 3y(\mathbf{i} - \mathbf{j}) + 3y\mathbf{j} + (3x - 6y)\mathbf{j}$ $g\nabla f$ más términos . . .
   $= 3y(\mathbf{i} - \mathbf{j}) + (3x - 3y)\mathbf{j}$ simplificados
   $= 3y(\mathbf{i} - \mathbf{j}) + (x - y)3\mathbf{j} = g\nabla f + f\nabla g$ Regla 4

■

Funciones de tres variables

Para una función diferenciable $f(x, y, z)$ y un vector unitario $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ en el espacio, tenemos

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

y

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial f}{\partial x}u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}u_2 + \frac{\partial f}{\partial z}u_3.$$

La derivada direccional puede escribirse otra vez en la forma

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f||u| \cos\theta = |\nabla f| \cos\theta,$$

de manera que las propiedades listadas anteriormente para funciones de dos variables se aplican también a las de tres variables. En cualquier punto dado, f crece más rápidamente en la dirección de ∇f y decrece más rápidamente en la dirección de $-\nabla f$. En cualquier dirección ortogonal a ∇f, la derivada es cero.

EJEMPLO 6

a) Calcule la derivada de $f(x, y, z) = x^3 - xy^2 - z$ en $P_0(1, 1, 0)$ en la dirección de $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.

b) ¿En cuáles direcciones cambia f más rápidamente en P_0, y cuáles son las razones de cambio en estas direcciones?

Solución

a) La dirección de $\mathbf{v}$ se obtiene dividiendo $\mathbf{v}$ entre su longitud:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (6)^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}.$$

Las derivadas parciales de f en P_0 son

$$f_x = (3x^2 - y^2)_{(1,1,0)} = 2, \qquad f_y = -2xy|_{(1,1,0)} = -2, \qquad f_z = -1|_{(1,1,0)} = -1.$$

El gradiente de f en P_0 es

$$\nabla f|_{(1,1,0)} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Por lo tanto, la derivada de f en P_0 en la dirección de $\mathbf{v}$ es

$$(D_{\mathbf{u}}f)_{(1,1,0)} = \nabla f|_{(1,1,0)} \cdot \mathbf{u} = (2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot \left(\frac{2}{7}\mathbf{i} - \frac{3}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}\right)$$

$$= \frac{4}{7} + \frac{6}{7} - \frac{6}{7} = \frac{4}{7}.$$

b) La función crece más rápidamente en la dirección de $\nabla f = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ y decrece más rápidamente en la dirección de $-\nabla f$. Las razones de cambio en ambas direcciones son, respectivamente,

$$|\nabla f| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3 \qquad \text{y} \qquad -|\nabla f| = -3. \quad \blacksquare$$

Regla de la cadena por rutas

Si $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ es una curva suave C, y $w = f(\mathbf{r}(t))$ es una función escalar evaluada a lo largo de C, entonces, de acuerdo a la regla de la cadena, teorema 6 en la sección 14.4,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Las derivadas parciales del lado derecho de la ecuación anterior se evalúan a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t)$, y las derivadas de las variables intermedias se evalúan en t. Si expresamos esta ecuación usando notación vectorial, tenemos

La derivada a lo largo de una trayectoria

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t)) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t). \tag{7}$$

La ecuación (7) indica que la derivada de la función compuesta $f(\mathbf{r}(t))$ es la "derivada" (el gradiente) de la función exterior f "por" (producto punto) la derivada de la función interior $\mathbf{r}$. Esto es análogo a la regla "de afuera hacia dentro" para derivadas de funciones compuestas, que se estudió en la sección 3.6. Es decir, la regla de la cadena para rutas de varias variables tiene exactamente *la misma forma* que la regla del cálculo diferencial de una sola variable cuando se dan interpretaciones adecuadas a los significados de los términos y las operaciones implicados.

Ejercicios 14.5

Cálculo de gradientes

En los ejercicios 1 a 6, determine el gradiente de la función en el punto dado. Luego, dibuje el gradiente junto con la curva de nivel que pasa por el punto.

1. $f(x, y) = y - x, \quad (2, 1)$

2. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2), \quad (1, 1)$

3. $g(x, y) = xy^2, \quad (2, -1)$

4. $g(x, y) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{2}, \quad (\sqrt{2}, 1)$

5. $f(x, y) = \sqrt{2x + 3y}, \quad (-1, 2)$

6. $f(x, y) = \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{x}}{y}, \quad (4, -2)$

En los ejercicios 7 a 10, obtenga ∇f en el punto dado.

7. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2 + z \ln x, \quad (1, 1, 1)$

8. $f(x, y, z) = 2z^3 - 3(x^2 + y^2)z + \tan^{-1} xz, \quad (1, 1, 1)$

9. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} + \ln(xyz), \quad (-1, 2, -2)$

10. $f(x, y, z) = e^{x+y}\cos z + (y + 1)\,\text{sen}^{-1} x, \quad (0, 0, \pi/6)$

Cálculo de derivadas direccionales

En los ejercicios 11 a 18, encuentre la derivada de la función en P_0 en la dirección de $\mathbf{u}$.

11. $f(x, y) = 2xy - 3y^2, \quad P_0(5, 5), \quad \mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

12. $f(x, y) = 2x^2 + y^2, \quad P_0(-1, 1), \quad \mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

13. $g(x, y) = \dfrac{x - y}{xy + 2}, \quad P_0(1, -1), \quad \mathbf{u} = 12\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

14. $h(x, y) = \tan^{-1}(y/x) + \sqrt{3}\,\text{sen}^{-1}(xy/2), \quad P_0(1, 1),$
$\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

15. $f(x, y, z) = xy + yz + zx, \quad P_0(1, -1, 2), \quad \mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

16. $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2, \quad P_0(1, 1, 1), \quad \mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

17. $g(x, y, z) = 3e^x \cos yz, \quad P_0(0, 0, 0), \quad \mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

18. $h(x, y, z) = \cos xy + e^{yz} + \ln zx, \quad P_0(1, 0, 1/2),$
$\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

En los ejercicios 19 a 24 obtenga las direcciones en las cuales las funciones crecen y decrecen más rápidamente en P_0. Luego, obtenga las derivadas de las funciones en estas direcciones.

19. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2, \quad P_0(-1, 1)$

20. $f(x, y) = x^2 y + e^{xy}\,\text{sen}\, y, \quad P_0(1, 0)$

21. $f(x, y, z) = (x/y) - yz, \quad P_0(4, 1, 1)$

22. $g(x, y, z) = xe^y + z^2, \quad P_0(1, \ln 2, 1/2)$

23. $f(x, y, z) = \ln xy + \ln yz + \ln xz, \quad P_0(1, 1, 1)$

24. $h(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 - 1) + y + 6z, \quad P_0(1, 1, 0)$

Rectas tangentes a curvas de nivel

En los ejercicios 25 a 28, grafique la curva $f(x, y) = c$ junto con ∇f y la recta tangente al punto dado. Luego, escriba una ecuación para la recta tangente.

25. $x^2 + y^2 = 4, \quad (\sqrt{2}, \sqrt{2})$

26. $x^2 - y = 1, \quad (\sqrt{2}, 1)$

27. $xy = -4, \quad (2, -2)$

28. $x^2 - xy + y^2 = 7, \quad (-1, 2)$

Teoría y ejemplos

29. Sea $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - y$. Obtenga las direcciones $\mathbf{u}$ y los valores de $D_{\mathbf{u}} f(1, -1)$ para los cuales

a) $D_{\mathbf{u}} f(1, -1)$ es el más grande

b) $D_{\mathbf{u}} f(1, -1)$ es el más pequeño

c) $D_{\mathbf{u}} f(1, -1) = 0$ *d)* $D_{\mathbf{u}} f(1, -1) = 4$

e) $D_{\mathbf{u}} f(1, -1) = -3$

30. Sea $f(x, y) = \dfrac{(x - y)}{(x + y)}$. Obtenga las direcciones $\mathbf{u}$ y los valores de $D_{\mathbf{u}} f\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ para los cuales

a) $D_{\mathbf{u}} f\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ es el más grande

b) $D_{\mathbf{u}} f\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ es el más pequeño

c) $D_{\mathbf{u}} f\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = 0$ ***d)*** $D_{\mathbf{u}} f\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = -2$

e) $D_{\mathbf{u}} f\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = 1$

31. Derivada direccional nula ¿En qué dirección se anula la derivada de $f(x, y) = xy + y^2$ en $P(3, 2)$?

32. Derivada direccional nula ¿En qué dirección se anula la derivada de $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ en $P(1, 1)$?

33. ¿Existe una dirección $\mathbf{u}$ en la que la razón de cambio de $f(x, y) = x^2 - 3xy + 4y^2$ en $P(1, 2)$ sea igual a 14? Justifique su respuesta.

34. Cambio de temperatura a lo largo de una circunferencia ¿Existe una dirección $\mathbf{u}$ en la que la tasa de cambio de la función temperatura $T(x, y, z) = 2xy - yz$ (temperatura en grados Celsius, distancia en ft) en $P(1, -1, 1)$ sea igual a $-3°\text{C/ft}$? Justifique su respuesta.

35. La derivada de $f(x, y)$ en $P_0(1, 2)$ en la dirección de $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ es $2\sqrt{2}$ y en la dirección de $-2\mathbf{j}$ es -3. ¿Cuál es la derivada de f en la dirección de $-\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$? Justifique su respuesta.

36. La derivada de $f(x, y, z)$ en un punto P alcanza su máximo en la dirección de $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$. En esta dirección, el valor de la derivada es $2\sqrt{3}$.

a) ¿Cuál es ∇f en P? Justifique su respuesta.

b) ¿Cuál es la derivada de f en P en la dirección de $\mathbf{i} + \mathbf{j}$?

37. Derivadas direccionales y componentes escalares ¿Cuál es la relación entre la derivada de una función diferenciable $f(x, y, z)$ en un punto P_0 en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u}$ y la componente escalar de $(\nabla f)_{P_0}$ en la dirección de $\mathbf{u}$? Justifique su respuesta.

38. Derivadas direccionales y derivadas parciales Suponiendo que las derivadas necesarias de $f(x, y, z)$ están definidas, ¿cuál es la relación de $D_{\mathbf{i}} f$, $D_{\mathbf{j}} f$ y $D_{\mathbf{k}} f$ con respecto a f_x, f_y y f_z? Justifique su respuesta.

39. Rectas en el plano *xy* Demuestre que $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ es una ecuación para la recta en el plano xy que pasa por el punto (x_0, y_0) normal al vector $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$.

40. Reglas algebraicas para los gradientes Dada una constante k y los gradientes

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}, \qquad \nabla g = \frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\mathbf{k},$$

establezca las reglas algebraicas para gradientes.

14.6 Planos tangentes y diferenciales

En el cálculo diferencial de una sola variable, vimos cómo la derivada define la recta tangente a la gráfica de una función diferenciable en un punto de la gráfica. La recta tangente da la linealización de la función en el punto. En forma similar, en esta sección veremos cómo el gradiente define el *plano tangente* a la superficie de nivel de una función $w = f(x, y, z)$ en un punto sobre la superficie. De la misma manera, el plano tangente da una linealización de f en el punto y define la diferencial total de la función.

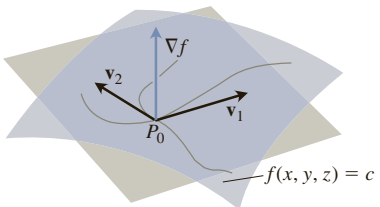


FIGURA 14.33 El gradiente ∇f es ortogonal al vector de velocidad de todas las curvas suaves en la superficie que pasan por P_0. Por lo tanto, los vectores de velocidad en P_0 están en un plano común, al cual llamamos plano tangente en P_0.

Planos tangentes y rectas normales

Si $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ es una curva suave sobre una superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ de una función diferenciable f, encontramos en la ecuación (7) de la última sección que

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t).$$

Puesto que f es constante a lo largo de la curva $\mathbf{r}$, la derivada del lado izquierdo de la ecuación es 0, por lo que el gradiente ∇f es ortogonal al vector de velocidad $\mathbf{r}'$ de la curva.

Ahora nos vamos a fijar en las curvas que pasan por el punto P_0 (figura 14.33). Todos los vectores de velocidad en P_0 son ortogonales a ∇f en P_0, de manera que todas las rectas tangentes a las curvas están en el plano que pasa por P_0 normal a ∇f. En seguida definiremos este plano.

DEFINICIONES El **plano tangente** en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ en la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ de una función diferenciable f es el plano que pasa por P_0 normal a $\nabla f|_{P_0}$. La **recta normal** a la superficie en P_0 es la recta que pasa por P_0 paralela a $\nabla f|_{P_0}$.

De la sección 12.5, el plano tangente y la recta normal tienen las siguientes ecuaciones:

Plano tangente a $f(x, y, z) = c$ en $P_0(x_0, y_0, z_0)$

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0 \qquad (1)$$

Recta normal a $f(x, y, z) = c$ en $P_0(x_0, y_0, z_0)$

$$x = x_0 + f_x(P_0)t, \qquad y = y_0 + f_y(P_0)t, \qquad z = z_0 + f_z(P_0)t \qquad (2)$$

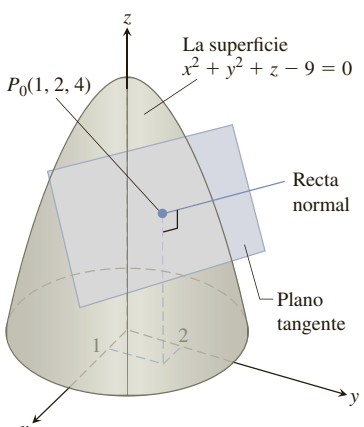


FIGURA 14.34 El plano tangente y la recta normal a la superficie de nivel en P_0 (ejemplo 1).

EJEMPLO 1 Obtenga el plano tangente y la recta normal a la superficie de nivel

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 9 = 0 \qquad \text{Un paraboloide circular}$$

en el punto $P_0(1, 2, 4)$.

Solución La superficie se muestra en la figura 14.34.

El plano tangente es el plano que pasa por P_0 perpendicular al gradiente de f en P_0. El gradiente es

$$\nabla f|_{P_0} = (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k})_{(1,2,4)} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Por lo tanto, el plano tangente es el plano

$$2(x - 1) + 4(y - 2) + (z - 4) = 0, \qquad \text{o} \qquad 2x + 4y + z = 14.$$

La recta normal a la superficie en P_0 es

$$x = 1 + 2t, \qquad y = 2 + 4t, \qquad z = 4 + t.$$

■

Si queremos determinar una ecuación para el plano tangente a la superficie suave $z = f(x, y)$ en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, donde $z_0 = f(x_0, y_0)$, primero observamos que la ecuación $z = f(x, y)$ es equivalente a $f(x, y) - z = 0$. Por lo tanto, la superficie $z = f(x, y)$ es la superficie de nivel cero de la función $F(x, y, z) = f(x, y) - z$. Las derivadas parciales de F son

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}(f(x, y) - z) = f_x - 0 = f_x$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}(f(x, y) - z) = f_y - 0 = f_y$$

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z}(f(x, y) - z) = 0 - 1 = -1.$$

Por lo tanto, la fórmula

$$F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) + F_z(P_0)(z - z_0) = 0$$

para el plano tangente a la superficie de nivel en P_0 se reduce a

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Plano tangente a una superficie $z = f(x, y)$ en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

El plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ de una función diferenciable f en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0. \quad (3)$$

EJEMPLO 2 Encuentre el plano tangente a la superficie $z = x \cos y - ye^x$ en el punto $(0, 0, 0)$.

Solución Calculamos las derivadas parciales de $f(x, y) = x \cos y - ye^x$ y usamos la ecuación (3):

$$f_x(0, 0) = (\cos y - ye^x)_{(0,0)} = 1 - 0 \cdot 1 = 1$$
$$f_y(0, 0) = (-x \operatorname{sen} y - e^x)_{(0,0)} = 0 - 1 = -1.$$

Por lo tanto, el plano tangente es

$$1 \cdot (x - 0) - 1 \cdot (y - 0) - (z - 0) = 0, \quad \text{Ecuación (3)}$$

o

$$x - y - z = 0. \quad \blacksquare$$

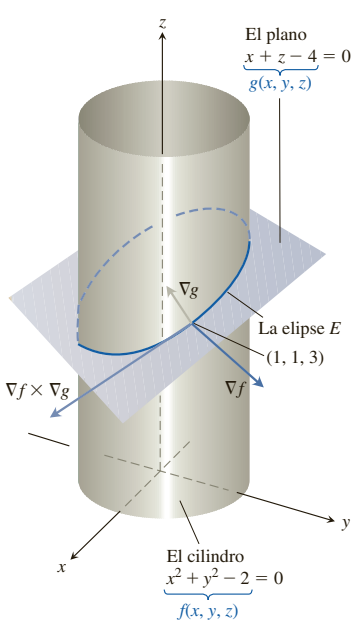


FIGURA 14.35 El cilindro y el plano se intersecan en una elipse E (ejemplo 3).

EJEMPLO 3 Las superficies

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0 \quad \text{Un cilindro}$$

y

$$g(x, y, z) = x + z - 4 = 0 \quad \text{Un plano}$$

se cortan formando una elipse E (figura 14.35). Obtenga ecuaciones paramétricas de la recta tangente a E en el punto $P_0(1, 1, 3)$.

Solución La recta tangente es ortogonal a ∇f y a ∇g en P_0 y, por lo tanto, paralela a $\mathbf{v} = \nabla f \times \nabla g$. Las componentes de $\mathbf{v}$ y las coordenadas de P_0 nos dan las ecuaciones de la recta. Tenemos

$$\nabla f\big|_{(1,1,3)} = (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j})_{(1,1,3)} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$
$$\nabla g\big|_{(1,1,3)} = (\mathbf{i} + \mathbf{k})_{(1,1,3)} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$$
$$\mathbf{v} = (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \times (\mathbf{i} + \mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

La recta tangente a la elipse que se obtiene en la intersección es

$$x = 1 + 2t, \qquad y = 1 - 2t, \qquad z = 3 - 2t.$$ ■

Estimación del cambio en una dirección específica

La derivada direccional desempeña el papel de una derivada ordinaria cuando queremos calcular el cambio del valor de una función f si nos movemos una pequeña distancia ds de un punto P_0 a otro punto cercano. Si f fuera una función de una variable, tendríamos

$$df = f'(P_0)\, ds. \qquad \text{Derivada ordinaria} \times \text{incremento}$$

Para una función de dos o más variables, usamos la fórmula

$$df = (\nabla f\big|_{P_0} \cdot \mathbf{u})\, ds, \qquad \text{Derivada ordinaria} \times \text{incremento}$$

donde $\mathbf{u}$ es la dirección del movimiento conforme nos alejamos de P_0.

Estimación del cambio de f en la dirección de u

Para calcular el cambio en el valor de una función diferenciable f cuando nos movemos una pequeña distancia ds desde un punto P_0 en una dirección particular $\mathbf{u}$, usamos la fórmula

$$df = \underbrace{(\nabla f\big|_{P_0} \cdot \mathbf{u})}_{\substack{\text{Derivada} \\ \text{direccional}}} \underbrace{ds}_{\substack{\text{Incremento} \\ \text{de distancia}}}$$

EJEMPLO 4 Estime cuánto cambiará el valor de

$$f(x, y, z) = y \operatorname{sen} x + 2yz$$

si el punto $P(x, y, z)$ se mueve 0.1 unidades en línea recta de $P_0(0, 1, 0)$ a $P_1(2, 2, -2)$.

Solución Primero obtenemos la derivada de f en P_0 en la dirección del vector $\overrightarrow{P_0P_1} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. La dirección de este vector es

$$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{P_0P_1}}{|\overrightarrow{P_0P_1}|} = \frac{\overrightarrow{P_0P_1}}{3} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}.$$

El gradiente de f en P_0 es

$$\nabla f\big|_{(0,1,0)} = ((y \cos x)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} x + 2z)\mathbf{j} + 2y\mathbf{k})_{(0,1,0)} = \mathbf{i} + 2\mathbf{k}.$$

Por lo tanto,

$$\nabla f\big|_{P_0} \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}\right) = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}.$$

El cambio df en f que resulta del movimiento $ds = 0.1$ unidades desde P_0 en la dirección de $\mathbf{u}$ es aproximadamente

$$df = (\nabla f|_{P_0} \cdot \mathbf{u})(ds) = \left(-\frac{2}{3}\right)(0.1) \approx -0.067 \text{ unidades.}$$

Véase figura 14.36. ■

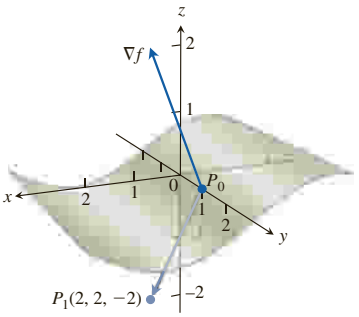


FIGURA 14.36 Conforme $P(x, y, z)$ se mueve sobre la superficie de nivel de P_0 en 0.1 unidades directamente hacia P_1, la función f cambia su valor en aproximadamente −0.067 unidades (ejemplo 4).

Cómo linealizar una función de dos variables

Las funciones de dos variables pueden ser complicadas y algunas veces necesitamos aproximarlas mediante unas más sencillas que den la precisión requerida para aplicaciones específicas sin que sea difícil trabajar con ellas. Hacemos esto de manera similar a la forma en que encontramos sustituciones lineales para funciones de una sola variable (sección 3.11).

Suponga que la función que deseamos aproximar es $z = f(x, y)$ cerca de un punto (x_0, y_0) en el cual conocemos los valores de f, f_x y f_y, y en el que f es diferenciable. Si nos movemos de (x_0, y_0) a cualquier punto cercano (x, y) con incrementos de $\Delta x = x - x_0$ y $\Delta y = y - y_0$ (vea la figura 14.37), entonces, la definición de diferenciabilidad de la sección 14.3 da el cambio

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y,$$

donde $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta x, \Delta y \to 0$. Si los incrementos Δx y Δy son pequeños, los productos $\epsilon_1 \Delta x$ y $\epsilon_2 \Delta y$ serán menores y tendremos la aproximación

$$f(x, y) \approx \underbrace{f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}_{L(x, y)}.$$

En otras palabras, siempre que Δx y Δy sean pequeños, f tendrá aproximadamente el mismo valor que la función lineal L.

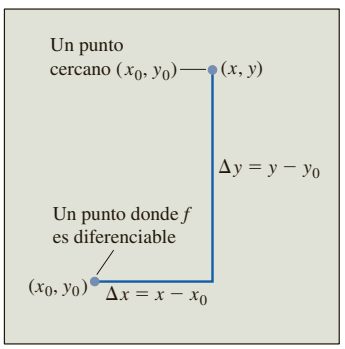


FIGURA 14.37 Si f es diferenciable en (x_0, y_0), entonces, el valor de f en cualquier punto cercano (x, y) es aproximadamente $f(x_0, y_0) + fx(x_0, y_0)\Delta x + fy(x_0, y_0)\Delta y$.

DEFINICIONES La **linealización** de una función $f(x, y)$ en un punto (x_0, y_0) donde f es diferenciable es la función

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

La aproximación

$$f(x, y) \approx L(x, y)$$

es la **aproximación lineal estándar** de f en (x_0, y_0).

A partir de la ecuación (3), encontramos que el plano $z = L(x, y)$ es tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0). Por lo tanto, la linealización de una función de dos variables es una aproximación del *plano* tangente, del mismo modo que la linealización de una función de una variable es una aproximación de la *recta* tangente. (Vea el ejercicio 55).

EJEMPLO 5 Encuentre la linealización de

$$f(x, y) = x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3$$

en el punto (3, 2).

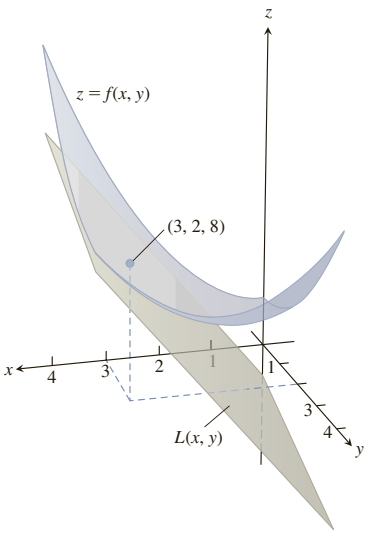


FIGURA 14.38 El plano tangente $L(x, y)$ representa la aproximación lineal de $f(x, y)$ en el ejemplo 5.

Solución Primero evaluamos f, f_x y f_y en el punto $(x_0, y_0) = (3, 2)$:

$$f(3, 2) = \left(x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3\right)_{(3,2)} = 8$$

$$f_x(3, 2) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3\right)_{(3,2)} = (2x - y)_{(3,2)} = 4$$

$$f_y(3, 2) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3\right)_{(3,2)} = (-x + y)_{(3,2)} = -1,$$

lo que da

$$\begin{aligned} L(x, y) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &= 8 + (4)(x - 3) + (-1)(y - 2) = 4x - y - 2. \end{aligned}$$

La linealización de f en (3, 2) es $L(x, y) = 4x - y - 2$ (vea figura 14.38). ■

Cuando se aproxima a una función diferenciable $f(x, y)$ por su linealización $L(x, y)$ en (x_0, y_0), una pregunta importante es qué tan precisa es la aproximación.

Si podemos determinar un límite superior común M para $|f_{xx}|$, $|f_{yy}|$ y $|f_{xy}|$ en un rectángulo R con centro en (x_0, y_0) (figura 14.39), podemos entonces acotar el error E en todo R usando una fórmula sencilla (deducida en la sección 14.9). El **error** se define como $E(x, y) = f(x, y) - L(x, y)$.

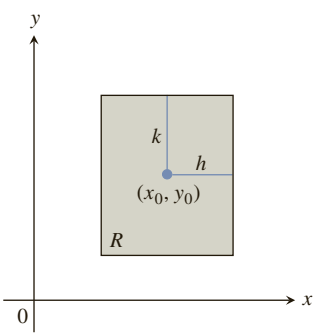


FIGURA 14.39 La región rectangular R: $|x - x_0| \le h$, $|y - y_0| \le k$ en el plano xy.

El error en la aproximación lineal estándar

Si f tiene primeras y segundas derivadas parciales continuas en un conjunto abierto que contiene un rectángulo R con centro en (x_0, y_0) y si M es un límite superior para los valores de $|f_{xx}|$, $|f_{yy}|$ y $|f_{xy}|$ en R, entonces, el error $E(x, y)$ en que se incurre al sustituir $f(x, y)$ en R por su linealización

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

satisface la desigualdad

$$|E(x, y)| \le \frac{1}{2}M(|x - x_0| + |y - y_0|)^2.$$

Si deseamos que $|E(x, y)|$ sea pequeño para una M determinada, basta con hacer más pequeños a $|x - x_0|$ y $|y - y_0|$.

Diferenciales

Recuerde de la sección 3.11 que para una función de una sola variable, $y = f(x)$, definimos el cambio en f cuando x cambia de a a $a + \Delta x$ por

$$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$$

y la diferencial de f como

$$df = f'(a)\Delta x.$$

Ahora consideramos la diferencial de una función de dos variables.

Suponga una función diferenciable $f(x, y)$ cuyas derivadas parciales existen en un punto (x_0, y_0). Si nos movemos a un punto cercano $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, el cambio en f es

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Mediante un cálculo sencillo a partir de la definición de $L(x, y)$, y usando la notación $x - x_0 = \Delta x$ y $y - y_0 = \Delta y$, se demuestra que el cambio correspondiente en L es

$$\begin{aligned}\Delta L &= L(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - L(x_0, y_0) \\ &= f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.\end{aligned}$$

Las **diferenciales** dx y dy son variables independientes, de manera que se les pueden asignar valores arbitrarios. Con frecuencia, tomamos $dx = \Delta x = x - x_0$ y $dy = \Delta y = y - y_0$. Tenemos entonces la siguiente definición de la diferencial *total* (o simplemente, diferencial) de f.

DEFINICIÓN Si nos movemos de (x_0, y_0) a un punto cercano $(x_0 + dx, y_0 + dy)$, el cambio resultante

$$df = f_x(x_0, y_0)\,dx + f_y(x_0, y_0)\,dy$$

en la linealización de f se llama la **diferencial total de f**.

EJEMPLO 6 Suponga que una lata cilíndrica se diseñó para tener un radio de 1 in y una altura de 5 in, pero que el radio y la altura tienen un error $dr = +0.03$ y $dh = -0.1$. Calcule el cambio absoluto resultante en el volumen de la lata.

Solución Para estimar el cambio absoluto en $V = \pi r^2 h$, empleamos

$$\Delta V \approx dV = V_r(r_0, h_0)\,dr + V_h(r_0, h_0)\,dh.$$

Con $V_r = 2\pi rh$ y $V_h = \pi r^2$, tenemos

$$\begin{aligned}dV &= 2\pi r_0 h_0\,dr + \pi {r_0}^2\,dh = 2\pi(1)(5)(0.03) + \pi(1)^2(-0.1) \\ &= 0.3\pi - 0.1\pi = 0.2\pi \approx 0.63 \text{ ft}^3\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 7 Suponga que su compañía fabrica tanques cilíndricos circulares rectos de acero inoxidable para almacenar melaza, los cuales miden 25 ft de altura y 5 ft de radio. ¿Qué tan sensibles son los volúmenes de los tanques a pequeñas variaciones en la altura y el radio?

Solución Con $V = \pi r^2 h$, la diferencial total da la aproximación del cambio en el volumen como

$$\begin{aligned}dV &= V_r(5, 25)\,dr + V_h(5, 25)\,dh \\ &= (2\pi rh)_{(5,25)}\,dr + (\pi r^2)_{(5,25)}\,dh \\ &= 250\pi\,dr + 25\pi\,dh.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el cambio de una unidad en r modificará a V alrededor de 250π unidades. El cambio de una unidad en h altera V alrededor de 25π unidades. El volumen del tanque es 10 veces más sensible a un cambio pequeño en r que a un pequeño cambio de igual magnitud en h. Como ingeniero de control de calidad, encargado de garantizar que los tanques tengan el volumen correcto, usted pondría especial atención en sus radios.

En cambio, si los valores de r y h se invierten para que $r = 25$ y $h = 5$, entonces, la diferencial total en V es

$$dV = (2\pi rh)_{(25,5)}\,dr + (\pi r^2)_{(25,5)}\,dh = 250\pi\,dr + 625\pi\,dh.$$

Ahora, el volumen es más sensible a cambios en h que a cambios en r (figura 14.40).

La regla general es que las funciones son más sensibles a cambios pequeños en las variables que generan las derivadas parciales más grandes. ■

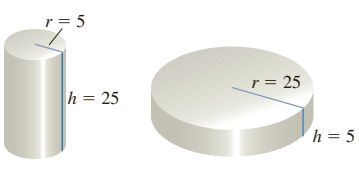


FIGURA 14.40 El volumen del cilindro *a*) es más sensible a un pequeño cambio en r que a un cambio de igual magnitud en h. El volumen del cilindro *b*) es más sensible a pequeños cambios de h que a los cambios pequeños en r (ejemplo 7).

Funciones de más de dos variables

Resultados análogos se observan para funciones diferenciables de más de dos variables.

1. La **linealización** de $f(x, y, z)$ en un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es
$$L(x, y, z) = f(P_0) + f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0).$$

2. Suponga que R es un sólido rectangular cerrado centrado en P_0 y que se encuentra en una región abierta en la cual las segundas derivadas parciales de f son continuas. Suponga también que $|f_{xx}|, |f_{yy}|, |f_{zz}|, |f_{xy}|, |f_{xz}|$ y $|f_{yz}|$ son menores o iguales que M en R. Entonces, el **error** $E(x, y, z) = f(x, y, z) - L(x, y, z)$ al aproximar f por L está acotado en R por la desigualdad
$$|E| \le \frac{1}{2} M(|x - x_0| + |y - y_0| + |z - z_0|)^2.$$

3. Si las segundas derivadas parciales de f son continuas y si x, y y z cambian a partir de x_0, y_0 y z_0 en pequeñas cantidades dx, dy y dz, la **diferencial total**
$$df = f_x(P_0)\,dx + f_y(P_0)\,dy + f_z(P_0)\,dz$$
nos da una buena aproximación del cambio resultante en f.

EJEMPLO 8 Obtenga la linealización $L(x, y, z)$ de
$$f(x, y, z) = x^2 - xy + 3 \operatorname{sen} z$$
en el punto $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 0)$. Obtenga un límite superior para el error en que se incurre al sustituir f por L en el rectángulo
$$R: \quad |x - 2| \le 0.01, \qquad |y - 1| \le 0.02, \qquad |z| \le 0.01.$$

Solución Una evaluación rutinaria implica
$$f(2, 1, 0) = 2, \qquad f_x(2, 1, 0) = 3, \qquad f_y(2, 1, 0) = -2, \qquad f_z(2, 1, 0) = 3.$$
Por lo tanto,
$$L(x, y, z) = 2 + 3(x - 2) + (-2)(y - 1) + 3(z - 0) = 3x - 2y + 3z - 2.$$
Puesto que
$$f_{xx} = 2, \qquad f_{yy} = 0, \qquad f_{zz} = -3 \operatorname{sen} z, \qquad f_{xy} = -1, \qquad f_{xz} = 0, \qquad f_{yz} = 0,$$
y $|-3 \operatorname{sen} z| \le 3 \operatorname{sen} 0.01 \approx 0.03$, podemos tomar $M = 2$ como el límite de las segundas parciales. Por consiguiente, el error en que se incurre al sustituir f por L en R satisface
$$|E| \le \frac{1}{2}(2)(0.01 + 0.02 + 0.01)^2 = 0.0016. \quad \blacksquare$$

Ejercicios 14.6

Planos tangentes y rectas normales a superficies

En los ejercicios 1 a 8, encuentre las ecuaciones para

a) el plano tangente y

b) la recta normal en el punto P_0 a la superficie dada.

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 3, \quad P_0(1, 1, 1)$
2. $x^2 + y^2 - z^2 = 18, \quad P_0(3, 5, -4)$
3. $2z - x^2 = 0, \quad P_0(2, 0, 2)$
4. $x^2 + 2xy - y^2 + z^2 = 7, \quad P_0(1, -1, 3)$
5. $\cos \pi x - x^2 y + e^{xz} + yz = 4, \quad P_0(0, 1, 2)$
6. $x^2 - xy - y^2 - z = 0, \quad P_0(1, 1, -1)$
7. $x + y + z = 1, \quad P_0(0, 1, 0)$
8. $x^2 + y^2 - 2xy - x + 3y - z = -4, \quad P_0(2, -3, 18)$

En los ejercicios 9 a 12, obtenga una ecuación para el plano tangente a la superficie dada en el punto especificado.

9. $z = \ln(x^2 + y^2), \quad (1, 0, 0)$
10. $z = e^{-(x^2+y^2)}, \quad (0, 0, 1)$
11. $z = \sqrt{y - x}, \quad (1, 2, 1)$
12. $z = 4x^2 + y^2, \quad (1, 1, 5)$

Rectas tangentes a curvas en el espacio

En los ejercicios 13 a 18, encuentre ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva de intersección de las superficies en el punto dado.

13. Superficies: $x + y^2 + 2z = 4, \quad x = 1$
Punto: $(1, 1, 1)$

14. Superficies: $xyz = 1, \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$
Punto: $(1, 1, 1)$

15. Superficies: $x^2 + 2y + 2z = 4, \quad y = 1$
Punto: $(1, 1, 1/2)$

16. Superficies: $x + y^2 + z = 2, \quad y = 1$
Punto: $(1/2, 1, 1/2)$

17. Superficies: $x^3 + 3x^2y^2 + y^3 + 4xy - z^2 = 0,$
$x^2 + y^2 + z^2 = 11$
Punto: $(1, 1, 3)$

18. Superficies: $x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 - z = 0$
Punto: $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4\right)$

Estimación del cambio

19. ¿Alrededor de cuánto cambiará

$$f(x, y, z) = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

si el punto $P(x, y, z)$ se mueve desde $P_0(3, 4, 12)$ una distancia $ds = 0.1$ unidades en la dirección de $3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$?

20. ¿Alrededor de cuánto cambiará

$$f(x, y, z) = e^x \cos yz$$

si el punto $P(x, y, z)$ se mueve desde el origen a una distancia $ds = 0.1$ unidades en la dirección de $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$?

21. ¿Alrededor de cuánto cambiará

$$g(x, y, z) = x + x\cos z - y \operatorname{sen} z + y$$

si el punto $P(x, y, z)$ se mueve desde $P_0(2, -1, 0)$ una distancia $ds = 0.2$ unidades hacia el punto $P_1(0, 1, 2)$?

22. ¿Alrededor de cuánto cambiará

$$h(x, y, z) = \cos(\pi xy) + xz^2$$

si el punto $P(x, y, z)$ se mueve desde $P_0(-1, -1, -1)$ una distancia $ds = 0.1$ unidades hacia el origen?

23. Cambio de temperatura a lo largo de una circunferencia Suponga que la temperatura Celsius en el punto (x, y) en el plano xy es $T(x, y) = x \operatorname{sen} 2y$ y que la distancia en el plano xy se mide en metros. Una partícula se mueve *en el sentido de las manecillas del reloj* alrededor de una circunferencia con radio de 1 m y centro en el origen a razón constante de 2 m/s.

a) ¿Con qué rapidez cambia la temperatura experimentada por la partícula en grados Celsius por metro cuando se encuentra en el punto $P(1/2, \sqrt{3}/2)$?

b) ¿Con qué rapidez cambia la temperatura experimentada por la partícula en grados Celsius por segundo en P?

24. Cambio de temperatura a lo largo de una curva en el espacio La temperatura Celsius en una región en el espacio está dada por $T(x, y, z) = 2x^2 - xyz$. Una partícula se mueve en esta región y su posición en el tiempo t está dada por $x = 2t^2$, $y = 3t$, $z = -t^2$, donde el tiempo se mide en segundos y la distancia en metros.

a) ¿Con qué rapidez cambia la temperatura experimentada por la partícula en grados Celsius por metro cuando la partícula está en el punto $P(8, 6, -4)$?

b) ¿Con qué rapidez cambia la temperatura experimentada por la partícula en grados Celsius por segundo en P?

Determinación de la linealización

En los ejercicios 25 a 30, obtenga la linealización $L(x, y)$ de la función en cada punto.

25. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ en ***a)*** $(0, 0)$, ***b)*** $(1, 1)$

26. $f(x, y) = (x + y + 2)^2$ en ***a)*** $(0, 0)$, ***b)*** $(1, 2)$

27. $f(x, y) = 3x - 4y + 5$ en ***a)*** $(0, 0)$, ***b)*** $(1, 1)$

28. $f(x, y) = x^3y^4$ en ***a)*** $(1, 1)$, ***b)*** $(0, 0)$

29. $f(x, y) = e^x \cos y$ en ***a)*** $(0, 0)$, ***b)*** $(0, \pi/2)$

30. $f(x, y) = e^{2y-x}$ en ***a)*** $(0, 0)$, ***b)*** $(1, 2)$

31. Factor de sensación térmica La sensación térmica es una medida de la temperatura que se percibe en la piel expuesta; es una función de la temperatura del aire y la rapidez del viento. La fórmula precisa, actualizada por el Servicio Meteorológico Nacional en 2001 y con base en la teoría moderna de transferencia de calor, un modelo que toma en cuenta la resistencia del tejido de la piel, es

$$W = W(v, T) = 35.74 + 0.6215\,T - 35.75\,v^{0.16} + 0.4275\,T \cdot v^{0.16},$$

donde T es la temperatura del aire en °F y v es la rapidez del viento en millas por hora (mph). Se presenta un cuadro parcial de sensación térmica.

v (mph) \ T (°F)	30	25	20	15	10	5	0	−5	−10
5	25	19	13	7	1	−5	−11	−16	−22
10	21	15	9	3	−4	−10	−16	−22	−28
15	19	13	6	0	−7	−13	−19	−26	−32
20	17	11	4	−2	−9	−15	−22	−29	−35
25	16	9	3	−4	−11	−17	−24	−31	−37
30	15	8	1	−5	−12	−19	−26	−33	−39
35	14	7	0	−7	−14	−21	−27	−34	−41

a) Use la tabla para obtener $W(20, 25)$, $W(30, -10)$ y $W(15, 15)$.

b) Use la fórmula para encontrar $W(10, -40)$, $W(50, 40)$ y $W(60, 30)$.

c) Obtenga la linealización $L(v, T)$ de la función $W(v, T)$ en el punto $(25, 5)$.

d) Use $L(v, T)$ del inciso *c)* para calcular los siguientes valores de sensación térmica.

i. $W(24, 6)$ **ii.** $W(27, 2)$

iii. $W(5, -10)$ (Explique por qué este valor es muy diferente del que se encuentra en la tabla).

32. Obtenga la linealización de $L(v, T)$ de la función $W(v, T)$ del ejercicio 31 en el punto $(50, -20)$. Úsela para estimar los siguientes valores de sensación térmica.

a) $W(49, -22)$

b) $W(53, -19)$

c) $W(60, -30)$

Límites para error en las aproximaciones lineales

En los ejercicios 33 a 38, obtenga la aproximación lineal $L(x, y)$ de la función $f(x, y)$ en P_0. Luego, determine un límite superior para la magnitud $|E|$ del error en la aproximación $f(x, y) \approx L(x, y)$ en el rectángulo R.

33. $f(x, y) = x^2 - 3xy + 5$ en $P_0(2, 1)$,
R: $|x - 2| \le 0.1$, $|y - 1| \le 0.1$

34. $f(x, y) = (1/2)x^2 + xy + (1/4)y^2 + 3x - 3y + 4$ en $P_0(2, 2)$,
R: $|x - 2| \le 0.1$, $|y - 2| \le 0.1$

35. $f(x, y) = 1 + y + x \cos y$ en $P_0(0, 0)$,
R: $|x| \le 0.2$, $|y| \le 0.2$
(Use $|\cos y| \le 1$ y $|\text{sen } y| \le 1$ para calcular E).

36. $f(x, y) = xy^2 + y \cos(x - 1)$ en $P_0(1, 2)$,
R: $|x - 1| \le 0.1$, $|y - 2| \le 0.1$

37. $f(x, y) = e^x \cos y$ en $P_0(0, 0)$,
R: $|x| \le 0.1$, $|y| \le 0.1$
(Use $e^x \le 1.11$ y $|\cos y| \le 1$ para calcular E).

38. $f(x, y) = \ln x + \ln y$ en $P_0(1, 1)$,
R: $|x - 1| \le 0.2$, $|y - 1| \le 0.2$

Linealizaciones en tres variables

Obtenga las linealizaciones $L(x, y, z)$ de las funciones en los ejercicios 39 a 44 en los puntos especificados.

39. $f(x, y, z) = xy + yz + xz$ en
a) $(1, 1, 1)$ ***b)*** $(1, 0, 0)$ ***c)*** $(0, 0, 0)$

40. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ en
a) $(1, 1, 1)$ ***b)*** $(0, 1, 0)$ ***c)*** $(1, 0, 0)$

41. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ en
a) $(1, 0, 0)$ ***b)*** $(1, 1, 0)$ ***c)*** $(1, 2, 2)$

42. $f(x, y, z) = (\text{sen } xy)/z$ en
a) $(\pi/2, 1, 1)$ ***b)*** $(2, 0, 1)$

43. $f(x, y, z) = e^x + \cos(y + z)$ en
a) $(0, 0, 0)$ ***b)*** $\left(0, \frac{\pi}{2}, 0\right)$ ***c)*** $\left(0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

44. $f(x, y, z) = \tan^{-1}(xyz)$ en
a) $(1, 0, 0)$ ***b)*** $(1, 1, 0)$ ***c)*** $(1, 1, 1)$

En los ejercicios 45 a 48, determine la linealización $L(x, y, z)$ de la función $f(x, y, z)$ en P_0. Luego, encuentre un límite superior para la magnitud del error E en la aproximación $f(x, y, z) \approx L(x, y, z)$ en la región R.

45. $f(x, y, z) = xz - 3yz + 2$ en $P_0(1, 1, 2)$,
R: $|x - 1| \le 0.01$, $|y - 1| \le 0.01$, $|z - 2| \le 0.02$

46. $f(x, y, z) = x^2 + xy + yz + (1/4)z^2$ en $P_0(1, 1, 2)$,
R: $|x - 1| \le 0.01$, $|y - 1| \le 0.01$, $|z - 2| \le 0.08$

47. $f(x, y, z) = xy + 2yz - 3xz$ en $P_0(1, 1, 0)$,
R: $|x - 1| \le 0.01$, $|y - 1| \le 0.01$, $|z| \le 0.01$

48. $f(x, y, z) = \sqrt{2} \cos x \text{ sen}(y + z)$ en $P_0(0, 0, \pi/4)$,
R: $|x| \le 0.01$, $|y| \le 0.01$, $|z - \pi/4| \le 0.01$

Estimación del error; sensibilidad al cambio

49. Estimación del error máximo Suponga que se determina T mediante la fórmula $T = x(e^y + e^y)$, donde se encuentra que x y y valen 2 y ln 2 con los errores máximos posibles de $|dx| = 0.1$ y $|dy| = 0.02$. Calcule el error máximo posible en el valor calculado de T.

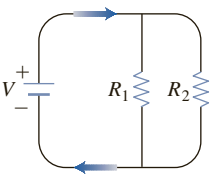
50. Variación en la resistencia eléctrica La resistencia eléctrica producida al unir resistencias de R_1 y R_2 ohms conectadas en paralelo (vea la siguiente figura) se calcula mediante la fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

a) Demuestre que

$$dR = \left(\frac{R}{R_1}\right)^2 dR_1 + \left(\frac{R}{R_2}\right)^2 dR_2.$$

b) Usted diseñó un circuito de dos resistencias como el que se ilustra en la figura, el cual tiene resistencias de $R_1 = 100$ ohms y $R_2 = 400$ ohms, pero siempre hay alguna variación en la fabricación y es probable que las resistencias recibidas por su empresa no tengan los valores exactos. ¿El valor de R será más sensible a la variación de R_1 o a la variación de R_2? Justifique su respuesta.



c) En otro circuito como el que se representa, usted planea cambiar R_1 de 20 a 20.1 ohms y R_2 de 25 a 24.9 ohms. ¿Alrededor de qué porcentaje cambiará R?

51. Usted planea calcular el área de un rectángulo largo y delgado, a partir de mediciones de su largo y ancho. ¿Cuál dimensión deberá medir con mayor cuidado? Justifique su respuesta.

52. ***a)*** Alrededor del punto $(1, 0)$, ¿$f(x, y) = x^2(y + 1)$ es más sensible a los cambios en x o a los cambios en y? Justifique su respuesta.

b) ¿Cuál razón entre dx y dy hará que df sea igual a cero en el punto $(1, 0)$?

53. Valor de un determinante de 2 × 2 Si $|a|$ es mucho mayor que $|b|$, $|c|$ y $|d|$, ¿a cuál de las variables (a, b, c o d) es más sensible el valor del determinante?

$$f(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Justifique su respuesta.

54. La fórmula de Wilson para el tamaño de un lote Esta fórmula de economía para determinar el tamaño de un lote de productos afirma que la cantidad más económica Q de bienes (aparatos de radio, zapatos, escobas, etcétera) para el pedido que realiza una tienda está dada por la fórmula $Q = \sqrt{2KM/h}$, donde K es el costo de realizar el pedido, M es el número de artículos vendidos por semana, y h es el costo de almacenamiento semanal para cada artículo (costo de espacio, instalaciones, seguridad, etcétera). ¿A cuál de las variables (K, M o h) es más sensible Q cerca del punto $(K_0, M_0, h_0) = (2, 20, 0.05)$? Justifique su respuesta.

Teoría y ejemplos

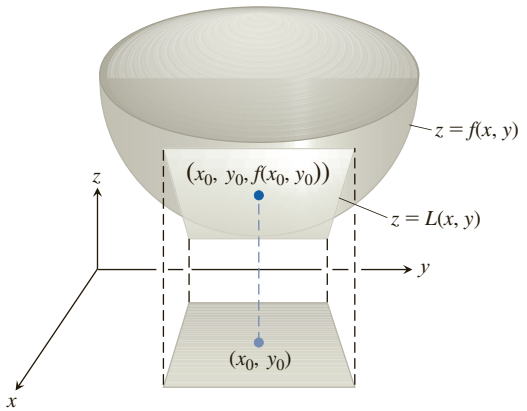
55. La linealización de $f(x, y)$ es una aproximación con un plano tangente Demuestre que el plano tangente en el punto $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ en la superficie $z = f(x, y)$, definida mediante una función diferenciable f, es el plano

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0$$

o bien,

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Por lo tanto, el plano tangente en P_0 es la gráfica de la linealización de f en P_0 (vea la siguiente figura).



56. Cambio a lo largo de la involuta de un círculo Obtenga la derivada de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en la dirección del vector unitario tangente a la curva

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t - t \cos t)\mathbf{j}, \qquad t > 0.$$

57. Curvas tangentes Una curva suave es *tangente* a la superficie en un punto de intersección si el vector de velocidad es ortogonal a ∇f en ese punto.

Demuestre que la curva

$$\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{i} + \sqrt{t}\,\mathbf{j} + (2t - 1)\mathbf{k}$$

es tangente a la superficie $x^2 + y^2 - z = 1$ cuando $t = 1$.

58. Curvas normales Una curva suave es *normal* a una superficie $f(x, y, z) = c$ en un punto de intersección si el vector de velocidad de la curva es un múltiplo escalar no nulo de ∇f en ese punto.

Demuestre que la curva

$$\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{i} + \sqrt{t}\,\mathbf{j} - \frac{1}{4}(t + 3)\mathbf{k}$$

es normal a la superficie $x^2 + y^2 - z = 3$ cuando $t = 1$.

14.7 Valores extremos y puntos silla

Las funciones continuas de dos variables asumen valores extremos en dominios cerrados y acotados (vea las figuras 14.41 y 14.42). En la presente sección veremos que podemos reducir la búsqueda de estos valores extremos examinando las primeras derivadas parciales de las funciones. Una función de dos variables puede asumir valores extremos sólo en los puntos frontera del dominio o en los puntos interiores del dominio donde las primeras derivadas parciales se anulan, o donde una o ambas derivadas no existen. Sin embargo, la anulación de las derivadas en un punto interior (a, b) no siempre señala la presencia de un valor extremo. La superficie, que es la gráfica de la función, podría tener la forma de una silla de montar exactamente arriba de (a, b) y cruzar su plano tangente en ese punto.

Criterios de las derivadas para los valores extremos locales

Para obtener los valores extremos locales de una función de una sola variable, buscamos los puntos donde la gráfica tiene una recta tangente horizontal. En esos puntos, buscamos puntos máximos locales, mínimos locales y los puntos de inflexión. Para una función $f(x, y)$ de dos variables, buscamos los puntos donde la superficie $z = f(x, y)$ tiene un *plano* tangente horizontal. En tales puntos, buscamos los máximos locales, los mínimos locales y los puntos silla. Comenzaremos por definir los puntos máximos y mínimos.

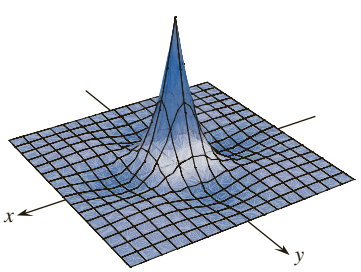


FIGURA 14.41 La función

$$z = (\cos x)(\cos y)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$$

tiene un valor máximo de 1 y un valor mínimo de aproximadamente -0.067 sobre la región cuadrada $|x| \le 3\pi/2, |y| \le 3\pi/2$.

DEFINICIONES Suponga que $f(x, y)$ está definida en una región R que contiene el punto (a, b). Entonces,

1. $f(a, b)$ es un valor **máximo local** de f si $f(a, b) \ge f(x, y)$ para todos los puntos (x, y) del dominio en un disco abierto con centro en (a, b).
2. $f(a, b)$ es un valor **mínimo local** de f si $f(a, b) \le f(x, y)$ para todos los puntos (x, y) del dominio en un disco abierto con centro en (a, b).

Los máximos locales corresponden a los picos de montaña en la superficie $z = f(x, y)$, y los mínimos locales corresponden al fondo de los valles (figura 14.43). En esos puntos, los planos tangentes, cuando existen, son horizontales. Los extremos locales también se conocen como puntos **extremos relativos**.

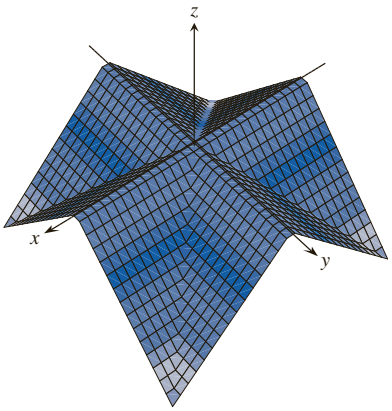


FIGURA 14.42 La "superficie del techo"

$$z = \frac{1}{2}\left(\left|\,|x| - |y|\,\right| - |x| - |y|\right)$$

tiene un valor máximo de 0 y un valor mínimo de $-a$ sobre la región cuadrada $|x| \le a, |y| \le a$.

Como en las funciones de una sola variable, la clave para identificar los puntos extremos locales es el criterio de la primera derivada, que se enuncia y demuestra a continuación.

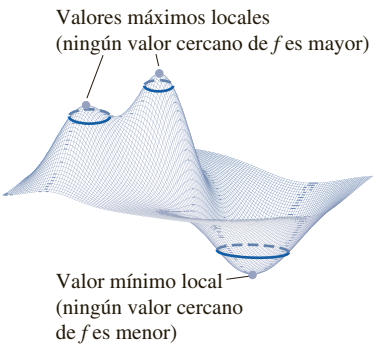


FIGURA 14.43 Un máximo local es un pico de montaña, y un mínimo local es el fondo de un valle.

TEOREMA 10 Criterio de la primera derivada para valores extremos locales Si $f(x, y)$ tiene un valor máximo o mínimo local en un punto interior (a, b) de su dominio, y si las primeras derivadas parciales existen allí, entonces, $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$.

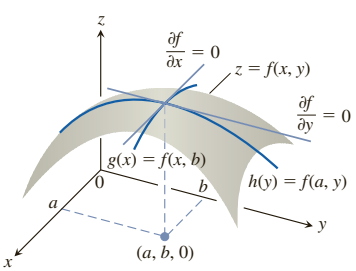


FIGURA 14.44 Si un máximo local de f ocurre en $x = a$, $y = b$, entonces, las primeras derivadas parciales $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$ son iguales a cero.

Demostración Si f tiene extremo local en (a, b), entonces, la función $g(x) = f(x, b)$ tiene un extremo local en $x = a$ (figura 14.44). Por lo tanto, $g'(a) = 0$ (capítulo 4, teorema 2). Ahora $g'(a) = f_x(a, b)$, de manera que $f_x(a, b) = 0$. Un argumento similar con la función $h(y) = f(a, y)$ demuestra que $f_y(a, b) = 0$. ■

Si sustituimos los valores $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$ en la ecuación

$$f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) - (z - f(a, b)) = 0$$

del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en (a, b), la ecuación se reduce a

$$0 \cdot (x - a) + 0 \cdot (y - b) - z + f(a, b) = 0$$

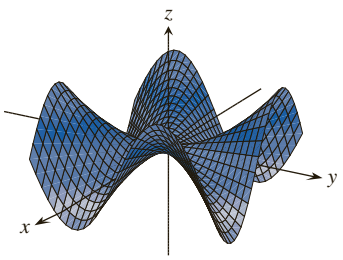
o bien,

$$z = f(a, b).$$

Así, el teorema 10 afirma que la superficie tiene un plano tangente horizontal en un extremo local, siempre que exista dicho plano.

DEFINICIÓN Un punto interior del dominio de una función $f(x, y)$ donde tanto f_x como f_y son iguales a cero, o donde alguna de éstas no existe, es un **punto crítico** de f.

El teorema 10 indica que los únicos puntos donde una función $f(x, y)$ puede tener valores extremos son los puntos críticos y los puntos frontera. Al igual que en las funciones diferenciables de una sola variable, no todos los puntos críticos dan origen a un extremo local. Una función diferenciable de una variable podría tener un punto de inflexión. Una función diferenciable de dos variables podría tener un *punto silla*, con la gráfica de f cruzando el plano tangente definido en ese punto.



$$z = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

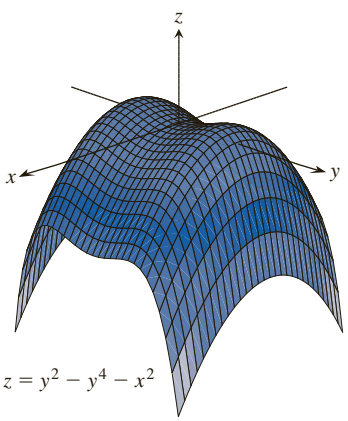


FIGURA 14.45 Puntos silla en el origen.

DEFINICIÓN Una función diferenciable $f(x, y)$ tiene un **punto silla** en un punto crítico (a, b) si en cada disco abierto con centro en (a, b) existen puntos del dominio (x, y) donde $f(x, y) > f(a, b)$, y puntos del dominio (x, y) donde $f(x, y) < f(a, b)$. El punto correspondiente $(a, b, f(a, b))$ sobre la superficie $z = f(x, y)$ se llama punto silla de la superficie (figura 14.45).

EJEMPLO 1 Obtenga los valores extremos locales de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4y + 9$.

Solución El dominio de f es todo el plano (de manera que no hay puntos frontera) y las derivadas parciales $f_x = 2x$ y $f_y = 2y - 4$ existen en todas partes. Por lo tanto, los valores extremos locales pueden presentarse sólo donde

$$f_x = 2x = 0 \qquad \text{y} \qquad f_y = 2y - 4 = 0.$$

La única posibilidad es el punto (0, 2), donde el valor de f es 5. Como $f(x, y) = x^2 + (y - 2)^2 + 5$ nunca es menor de 5, vemos que el punto crítico (0, 2) tiene un mínimo local (figura 14.46). ■

EJEMPLO 2 Determine (si existen) los valores extremos locales de $f(x, y) = y^2 - x^2$.

Solución El dominio de f es todo el plano (de manera que no hay puntos frontera), y las derivadas parciales $f_x = -2x$ y $f_y = 2y$ existen en todas partes. Por lo tanto, los valores extremos locales sólo pueden presentarse en el origen (0, 0), donde $f_x = 0$ y $f_y = 0$. Sin embargo, a lo largo del eje x positivo, el valor $f(x, 0) = -x^2 < 0$; a lo largo del eje y positivo, f tiene el valor $f(0, y) = y^2 > 0$. Por lo tanto, todos los discos abiertos en el plano xy con centro en (0, 0) contienen puntos donde la función es positiva y puntos donde es negativa. La función tiene un punto silla en el origen y no tiene valores extremos locales (figura 14.47*a*). La figura 14.47*b*) muestra las curvas de nivel (hipérbolas) de f y el decremento e incremento de la función de modo alternativo entre los cuatro grupos de hipérbolas. ■

El hecho de que $f_x = f_y = 0$ en un punto interior (a, b) de R no garantiza que f tenga un valor extremo local. Sin embargo, si f y sus primeras y segundas derivadas parciales son continuas en R, podemos saber más gracias al siguiente teorema, el cual se demostrará en la sección 14.9.

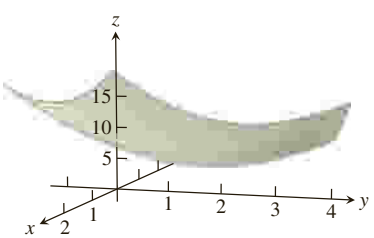


FIGURA 14.46 La gráfica de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4y + 9$ es el paraboloide que tiene un valor mínimo local de 5 en el punto (0, 2) (ejemplo 1).

TEOREMA 11 Criterio de la segunda derivada para valores extremos locales Suponga que $f(x, y)$ y sus primeras y segundas derivadas parciales son continuas en un disco con centro en (a, b), y que $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$. Entonces,

i. f tiene un **máximo local** en (a, b), si $f_{xx} < 0$ y $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ en (a, b).

ii. f tiene un **mínimo local** en (a, b), si $f_{xx} > 0$ y $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ en (a, b).

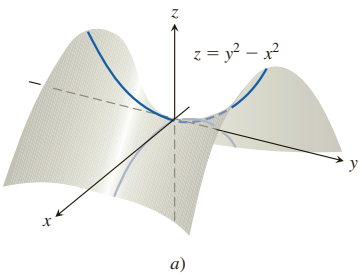
iii. f tiene un **punto silla** en (a, b), si $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ en (a, b).

iv. **El criterio no es concluyente** en (a, b), si $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ en (a, b). En este caso, debemos encontrar otra manera de determinar el comportamiento de f en (a, b).

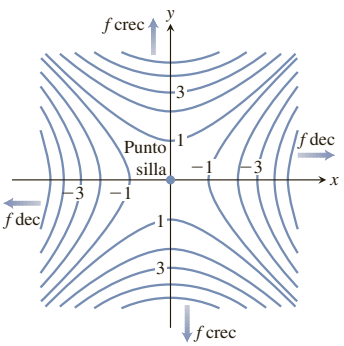
La expresión $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$ se conoce como **discriminante** o **hessiano** de f. Algunas veces es más fácil recordarlo como determinante,

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}{}^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}.$$

El teorema 11 afirma que si el discriminante es positivo en el punto (a, b), entonces, la superficie se curva del mismo modo en todas direcciones: hacia abajo si $f_{xx} < 0$, dando ori-



a)



b)

FIGURA 14.47 *a*) El origen es un punto silla de la función $f(x, y) = y^2 - x^2$. No hay valores extremos locales (ejemplo 2). *b*) Curvas de nivel de la función f del ejemplo 2.

gen a un máximo local, y hacia arriba si $f_{xx} > 0$, dando lugar a un mínimo local. Por otro lado, si el discriminante es negativo en (a, b), entonces, la superficie se curva hacia arriba en algunas direcciones y hacia abajo en otras, por lo que tenemos un punto silla.

EJEMPLO 3 Determine los valores extremos locales de la función

$$f(x, y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4.$$

Solución La función está definida y es diferenciable para todas las x y y, y su dominio no tiene puntos frontera. Por lo tanto, la función tiene valores extremos sólo en los puntos donde f_x y f_y son cero en forma simultánea. Esto da como resultado

$$f_x = y - 2x - 2 = 0, \qquad f_y = x - 2y - 2 = 0,$$

o bien,

$$x = y = -2.$$

Por lo tanto, el punto $(-2, -2)$ es el único donde f puede asumir un valor extremo. Para ver si esto es así, calculamos

$$f_{xx} = -2, \qquad f_{yy} = -2, \qquad f_{xy} = 1.$$

El discriminante de f en $(a, b) = (-2, -2)$ es

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (-2)(-2) - (1)^2 = 4 - 1 = 3.$$

La combinación

$$f_{xx} < 0 \qquad \text{y} \qquad f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$$

nos dice que f tiene un máximo local en $(-2, -2)$. El valor de f en este punto es $f(-2, -2) = 8$. ■

EJEMPLO 4 Obtenga los valores extremos locales de $f(x, y) = 3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 6xy$.

Solución Puesto que f es diferenciable en todos lados, puede asumir valores extremos sólo donde

$$f_x = 6y - 6x = 0 \qquad \text{y} \qquad f_y = 6y - 6y^2 + 6x = 0.$$

Partiendo de la primera de estas ecuaciones, encontramos que $x = y$, y al sustituir y en la segunda ecuación se obtiene

$$6x - 6x^2 + 6x = 0 \qquad \text{o} \qquad 6x(2 - x) = 0.$$

Por lo tanto, los dos puntos críticos son $(0, 0)$ y $(2, 2)$.

Para clasificar los puntos críticos, calculamos las segundas derivadas:

$$f_{xx} = -6, \qquad f_{yy} = 6 - 12y, \qquad f_{xy} = 6.$$

El discriminante está dado por

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (-36 + 72y) - 36 = 72(y - 1).$$

En el punto crítico $(0, 0)$, vemos que el valor del discriminante es el número negativo 72, de manera que la función tiene un punto silla en el origen. En el punto crítico $(2, 2)$, vemos que el discriminante tiene el valor positivo 72. Al combinar este resultado con el valor negativo de la segunda derivada parcial $f_{xx} = -6$, el teorema 11 afirma que el punto crítico $(2, 2)$ tiene un valor máximo local de $f(2, 2) = 12 - 16 - 12 + 24 = 8$. La gráfica de la superficie se presenta en la figura 14.48. ■

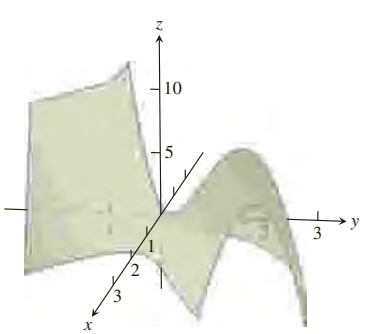


FIGURA 14.48 La superficie $z = 3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 6xy$ tiene un punto silla en el origen y un máximo local en el punto $(2, 2)$ (ejemplo 4).

EJEMPLO 5 Determine los puntos críticos de la función $f(x, y) = 10xye^{-(x^2+y^2)}$ y utilice el criterio de la segunda derivada para clasificar cada punto como punto silla, mínimo local o máximo local.

Solución Primero se determinan las derivadas parciales f_x y f_y y se igualan a cero de manera simultánea para buscar los puntos críticos:

$$f_x = 10ye^{-(x^2+y^2)} - 20x^2ye^{-(x^2+y^2)} = 10y(1 - 2x^2)e^{-(x^2+y^2)} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ o } 1 - 2x^2 = 0,$$
$$f_y = 10xe^{-(x^2+y^2)} - 20xy^2e^{-(x^2+y^2)} = 10x(1 - 2y^2)e^{-(x^2+y^2)} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } 1 - 2y^2 = 0.$$

Puesto que ambas derivadas parciales son continuas en todos los puntos, los únicos puntos críticos son

$$(0, 0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ y } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

A continuación calculamos las segundas derivadas parciales para evaluar el discriminante en cada punto crítico:

$$f_{xx} = -20xy(1 - 2x^2)e^{-(x^2+y^2)} - 40xye^{-(x^2+y^2)} = -20xy(3 - 2x^2)e^{-(x^2+y^2)},$$
$$f_{xy} = f_{yx} = 10(1 - 2x^2)e^{-(x^2+y^2)} - 20y^2(1 - 2x^2)e^{-(x^2+y^2)} = 10(1 - 2x^2)(1 - 2y^2)e^{-(x^2+y^2)},$$
$$f_{yy} = -20xy(1 - 2y^2)e^{-(x^2+y^2)} - 40xye^{-(x^2+y^2)} = -20xy(3 - 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

La siguiente tabla resume los valores necesarios para utilizar el criterio de la segunda derivada

Punto crítico	f_{xx}	f_{xy}	f_{yy}	Discriminante D
$(0, 0)$	0	10	0	-100
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{20}{e}$	0	$-\frac{20}{e}$	$\frac{400}{e^2}$
$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{20}{e}$	0	$\frac{20}{e}$	$\frac{400}{e^2}$
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{20}{e}$	0	$\frac{20}{e}$	$\frac{400}{e^2}$
$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{20}{e}$	0	$-\frac{20}{e}$	$\frac{400}{e^2}$

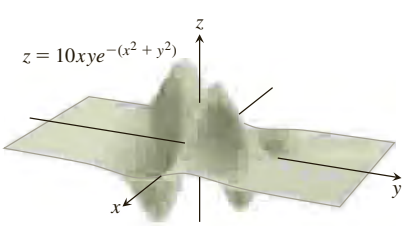


FIGURA 14.49 Una gráfica de la función del ejemplo 5.

Con los datos de la tabla, encontramos que $D < 0$ en el punto crítico $(0, 0)$, lo que da un punto silla; $D > 0$ y $f_{xx} < 0$ en los puntos críticos $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ y $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, lo que da máximos locales en esos puntos; $D > 0$ y $f_{xx} > 0$ en los puntos críticos $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ y $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, lo que da mínimos locales en esos puntos. En la figura 14.49 se observa una gráfica de la superficie. ■

Máximos y mínimos absolutos en regiones acotadas cerradas

Organizamos la búsqueda de los valores extremos absolutos de una función continua $f(x, y)$ en una región cerrada y acotada R en tres pasos.

1. *Elabore una lista de los puntos interiores de R* donde f puede tener valores máximos y mínimos locales, y evalúe f en dichos puntos. Éstos son los puntos críticos de f.
2. *Elabore una lista de los puntos frontera de R* donde f tiene máximos y mínimos locales, y evalúe f en esos puntos. En el siguiente ejemplo mostraremos cómo hacerlo.
3. *Busque en las listas* los valores máximo y mínimo de f. Éstos serán los valores máximo y mínimo absolutos de f en R. Puesto que los máximos y mínimos absolutos son también máximos y mínimos locales, los valores máximo y mínimo absolutos de f aparecerán en alguna de las listas elaboradas en los pasos 1 y 2.

EJEMPLO 6 Obtenga los valores máximos y mínimos absolutos de

$$f(x, y) = 2 + 2x + 4y - x^2 - y^2$$

en la región triangular en el primer cuadrante acotada por las rectas $x = 0$, $y = 0$ y $y = 9 - x$.

Solución Puesto que f es diferenciable, los únicos lugares donde f puede asumir estos valores son los puntos interiores del triángulo (figura 14.50*a*) donde $f_x = f_y = 0$ y en los puntos frontera.

***a*) Puntos interiores**. Para éstos, tenemos

$$f_x = 2 - 2x = 0, \qquad f_y = 4 - 2y = 0,$$

lo que da el único punto $(x, y) = (1, 2)$. El valor de f es

$$f(1, 2) = 7.$$

***b*) Puntos frontera**. Tomamos un lado del triángulo a la vez:

i. En el segmento OA, $y = 0$. La función

$$f(x, y) = f(x, 0) = 2 + 2x - x^2$$

puede ahora considerarse como una función de x definida en el intervalo cerrado $0 \le x \le 9$. Sus valores extremos (como sabemos por el capítulo 4) pueden presentarse en los puntos extremos

$$x = 0 \quad \text{donde} \quad f(0, 0) = 2$$
$$x = 9 \quad \text{donde} \quad f(9, 0) = 2 + 18 - 81 = -61$$

y en los puntos interiores donde $f'_x(x, 0) = 2 - 2x = 0$. El único punto interior donde $f'(x, 0) = 0$ es $x = 1$, donde

$$f(x, 0) = f(1, 0) = 3.$$

ii. En el segmento OB, $x = 0$ y

$$f(x, y) = f(0, y) = 2 + 4y - y^2.$$

Como en el inciso **i.**, consideramos $f(0, y)$ como una función de y definida en el intervalo cerrado $[0, 9]$. Sus valores extremos pueden ocurrir en los puntos extremos o en los puntos interiores donde $f'(0, y) = 0$. Puesto que $f'(0, y) = 4 - 2y$, el único punto interior donde $f'(0, y) = 0$ se presenta en $(0, 2)$, con $f(0, 2) = 6$. Así, los candidatos para este segmento son

$$f(0, 0) = 2, \qquad f(0, 9) = -43, \qquad f(0, 2) = 6.$$

iii. Ya consideramos los valores de f en los extremos de AB, así que sólo necesitamos buscar en los puntos interiores del segmento AB. Con $y = 9 - x$, tenemos

$$f(x, y) = 2 + 2x + 4(9 - x) - x^2 - (9 - x)^2 = -43 + 16x - 2x^2.$$

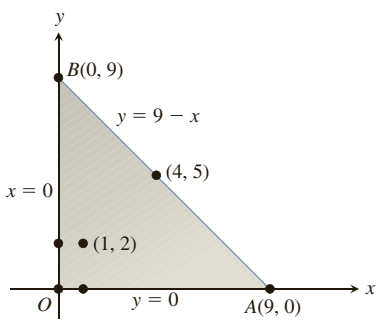
Al considerar $f'(x, 9 - x) = 16 - 4x = 0$, tenemos

$$x = 4.$$

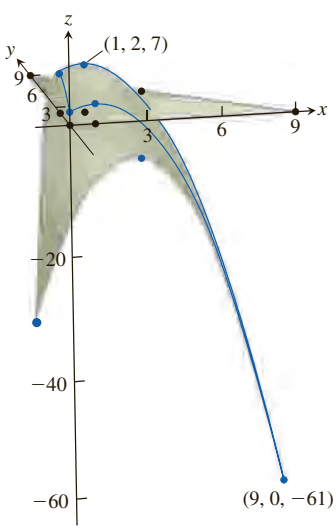
En este valor de x,

$$y = 9 - 4 = 5 \qquad \text{y} \qquad f(x, y) = f(4, 5) = -11.$$

Resumen Hacemos una lista de todos los candidatos: 7, 2, −61, 3, −43, 6, −11. El máximo es 7, y f lo toma en (1, 2). El mínimo es −61, y f lo adopta en (9, 0). Vea la figura 14.50*b*). ■



a)



b)

FIGURA 14.50 *a*) Esta región triangular es el dominio de la función en el ejemplo 6. *b*) Gráfica de la función en el ejemplo 6. Los puntos en color son los candidatos para máximos o mínimos.

Para resolver problemas de valores extremos con restricciones algebraicas sobre las variables se requiere, por lo general, del método de multiplicadores de Lagrange que se presenta en la siguiente sección. Sin embargo, algunas veces podemos resolver tales problemas de manera directa, como en el siguiente ejemplo.

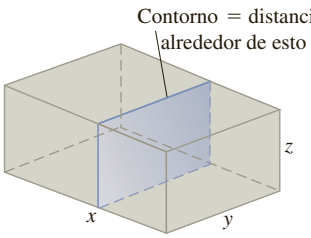


FIGURA 14.51 La caja del ejemplo 7.

EJEMPLO 7 Una compañía de mensajería sólo acepta cajas rectangulares en las que la suma de su largo y su contorno (el perímetro de una sección transversal) no exceda de 108 pulgadas. Determine las dimensiones de una caja aceptable con el volumen máximo.

Solución Sean x, y y z, respectivamente, el largo, ancho y la altura de la caja rectangular. Entonces, el contorno es $2y + 2z$. Queremos maximizar el volumen $V = xyz$ de la caja (figura 14.51) con la condición $x + 2y + 2z = 108$ (la caja más grande que acepta la compañía de mensajería). Así, podemos expresar el volumen de la caja como una función de dos variables:

$$\begin{aligned} V(y, z) &= (108 - 2y - 2z)yz \qquad \begin{matrix} V = xyz \text{ y} \\ x = 108 - 2y - 2z \end{matrix} \\ &= 108yz - 2y^2z - 2yz^2. \end{aligned}$$

Al igualar a cero las primeras derivadas parciales,

$$\begin{aligned} V_y(y, z) &= 108z - 4yz - 2z^2 = (108 - 4y - 2z)z = 0 \\ V_z(y, z) &= 108y - 2y^2 - 4yz = (108 - 2y - 4z)y = 0, \end{aligned}$$

obtenemos los puntos críticos (0, 0), (0, 54), (54, 0) y (18, 18). El volumen es cero en (0, 0), (0, 54) y (54, 0), por lo que ninguno de éstos es un volumen máximo. En el punto (18, 18), aplicamos el criterio de la segunda derivada (teorema 11):

$$V_{yy} = -4z, \qquad V_{zz} = -4y, \qquad V_{yz} = 108 - 4y - 4z.$$

De esta forma,

$$V_{yy}V_{zz} - V_{yz}{}^2 = 16yz - 16(27 - y - z)^2.$$

Por lo tanto,

$$V_{yy}(18, 18) = -4(18) < 0$$

y

$$\left[V_{yy}V_{zz} - V_{yz}{}^2 \right]_{(18,18)} = 16(18)(18) - 16(-9)^2 > 0$$

implican que (18, 18) da el volumen máximo. Las dimensiones del paquete son $x = 108 - 2(18) - 2(18) = 36$ in, $y = 18$ in y $z = 18$ in. El volumen máximo es $V = (36)(18)(18) = 11{,}664$ in^3 o 6.75 ft^3. ■

A pesar de la efectividad del teorema 11, le sugerimos recordar sus limitaciones. No se aplica a los puntos frontera del dominio de una función, donde es posible que una función tenga valores extremos y derivadas no nulas. Tampoco se aplica a puntos donde no existe f_x o f_y.

Resumen de criterios de máximos-mínimos

Los valores extremos de $f(x, y)$ pueden presentarse sólo en

i. **puntos frontera** del dominio de f;
ii. **puntos críticos** (puntos interiores donde $f_x = f_y = 0$ o puntos donde f_x o f_y no existen).

Si las derivadas parciales de primero y segundo órdenes de f son continuas en un disco con centro en el punto (a, b) y $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$, la naturaleza de $f(a, b)$ puede verificarse con el **criterio de la segunda derivada**:

i. $f_{xx} < 0$ y $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ en $(a, b) \Rightarrow$ **máximo local**
ii. $f_{xx} > 0$ y $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ en $(a, b) \Rightarrow$ **mínimo local**
iii. $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ en $(a, b) \Rightarrow$ **punto silla**
iv. $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ en $(a, b) \Rightarrow$ **el criterio no es concluyente**

Ejercicios 14.7

Determinación de extremos locales

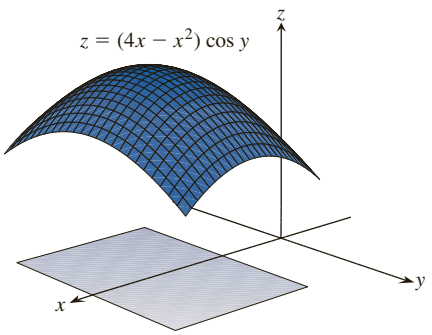
Determine todos los máximos locales, mínimos locales y puntos silla de las funciones de los ejercicios 1 a 30.

1. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$
2. $f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x + 4y - 4$
3. $f(x, y) = x^2 + xy + 3x + 2y + 5$
4. $f(x, y) = 5xy - 7x^2 + 3x - 6y + 2$
5. $f(x, y) = 2xy - x^2 - 2y^2 + 3x + 4$
6. $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^2 + 6y + 2$
7. $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$
8. $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 2y + 1$
9. $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y + 6$
10. $f(x, y) = x^2 + 2xy$
11. $f(x, y) = \sqrt{56x^2 - 8y^2 - 16x - 31} + 1 - 8x$
12. $f(x, y) = 1 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$
13. $f(x, y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$
14. $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3$
15. $f(x, y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$
16. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$
17. $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x + y^3 - 15y$
18. $f(x, y) = 2x^3 + 2y^3 - 9x^2 + 3y^2 - 12y$
19. $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$
20. $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy$
21. $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 1}$
22. $f(x, y) = \dfrac{1}{x} + xy + \dfrac{1}{y}$
23. $f(x, y) = y \operatorname{sen}$
24. $f(x, y) = e^{2x} \cos y$
25. $f(x, y) = e^{x^2+y^2-4x}$
26. $f(x, y) = e^y - ye^x$
27. $f(x, y) = e^{-y}(x^2 + y^2)$
28. $f(x, y) = e^x(x^2 - y^2)$
29. $f(x, y) = 2 \ln x + \ln y - 4x - y$
30. $f(x, y) = \ln(x + y) + x^2 - y$

Determinación de extremos absolutos

En los ejercicios 31 a 38, encuentre los máximos y mínimos absolutos de las funciones en los dominios dados.

31. $f(x, y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1$ en una región triangular cerrada y acotada por las rectas $x = 0$, $y = 2$, $y = 2x$ en el primer cuadrante.
32. $D(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 1$ en una región triangular cerrada y acotada por las rectas $x = 0$, $y = 4$, $y = x$ en el primer cuadrante.
33. $f(x, y) = x^2 + y^2$ en la región triangular cerrada y acotada por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $y + 2x = 2$ en el primer cuadrante.
34. $T(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x$ en la región rectangular $0 \le x \le 5$, $-3 \le y \le 3$.
35. $T(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$ en la región rectangular $0 \le x \le 5$, $-3 \le y \le 0$.
36. $f(x, y) = 48xy - 32x^3 + 24y^2$ en la región rectangular $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.
37. $f(x, y) = (4x - x^2)\cos y$ en la región rectangular $1 \le x \le 3$, $-\pi/4 \le y \le \pi/4$ (vea la siguiente figura).



38. $f(x, y) = 4x - 8xy + 2y + 1$ en la región triangular acotada por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ en el primer cuadrante.
39. Determine dos números a y b para $a \le b$, tales que

$$\int_a^b (6 - x - x^2)\, dx$$

tenga en ese punto su valor máximo.

40. Determine dos números a y b para $a \le b$, tales que

$$\int_a^b (24 - 2x - x^2)^{1/3} dx$$

tenga en ese punto su valor máximo.

41. **Temperaturas** Una placa circular plana tiene la forma de la región $x^2 + y^2 \le 1$. La placa, incluyendo la frontera donde $x^2 + y^2 = 1$, se calienta de manera que la temperatura en el punto (x, y) es

$$T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x.$$

Determine las temperaturas en los puntos más caliente y más frío de la placa.

42. Obtenga el punto crítico de

$$f(x, y) = xy + 2x - \ln x^2 y$$

en el primer cuadrante abierto ($x > 0$, $y > 0$) y demuestre que f toma un mínimo en ese punto.

Teoría y ejemplos

43. Obtenga los máximos, mínimos y puntos silla de $f(x, y)$, si existen, dado que

a) $f_x = 2x - 4y$ y $f_y = 2y - 4x$

b) $f_x = 2x - 2$ y $f_y = 2y - 4$

c) $f_x = 9x^2 - 9$ y $f_y = 2y + 4$

Describa su razonamiento en cada caso.

44. El discriminante $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ se anula en el origen para cada una de las siguientes funciones, de manera que el criterio de la segunda derivada falla. Determine si la función tiene un máximo, un mínimo o ninguno de éstos en el origen, imaginando la apariencia de la superficie $z = f(x, y)$. Describa su razonamiento en cada caso.

a) $f(x, y) = x^2y^2$

b) $f(x, y) = 1 - x^2y^2$

c) $f(x, y) = xy^2$

d) $f(x, y) = x^3y^2$

e) $f(x, y) = x^3y^3$

f) $f(x, y) = x^4y^4$

45. Demuestre que (0, 0) es un punto crítico de $f(x, y) = x^2 + kxy + y^2$ sin importar el valor que tenga la constante k. (*Sugerencia:* Considere dos casos: $k = 0$ y $k \neq 0$).

46. ¿Para cuáles valores de la constante k, el criterio de la segunda derivada garantiza que $f(x, y) = x^2 + kxy + y^2$ tendrá un punto silla en (0, 0)? ¿Y un mínimo local en (0, 0)? ¿Para cuáles valores de k, el criterio de la segunda derivada no es concluyente? Justifique sus respuestas.

47. Si $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$, ¿$f$ debe tener un valor máximo local o un mínimo local en (a, b)? Justifique su respuesta.

48. ¿Puede concluir algo acerca de $f(a, b)$ si f y sus primeras y segundas derivadas parciales son continuas en un disco con centro en el punto crítico (a, b), y $f_{xx}(a, b)$ y $f_{yy}(a, b)$ difieren en signo? Justifique su respuesta.

49. Entre todos los puntos de la gráfica de $z = 10 - x^2 - y^2$ que están arriba del plano $x + 2y + 3z = 0$, obtenga el punto más lejano de ese plano.

50. Determine el punto sobre la gráfica de $z = x^2 + y^2 + 10$ más cercano al plano $x + 2y - z = 0$.

51. Encuentre el punto en el plano $3x + 2y + z = 6$ más cercano al origen.

52. Obtenga la distancia mínima desde el punto $(2, -1, 1)$ al plano $x + y - z = 2$.

53. Determine tres números cuya suma sea 9, y cuya suma de los cuadrados sea un mínimo.

54. Obtenga tres números positivos cuya suma sea 3, y cuyo producto de los cuadrados sea un máximo.

55. Obtenga el valor máximo de $s = xy + yz + xz$, si $x + y + z = 6$.

56. Encuentre la distancia mínima desde el punto $(-6, 4, 0)$ al cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

57. Obtenga las dimensiones de la caja rectangular de máximo volumen que puede inscribirse en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

58. Entre todas las cajas rectangulares cerradas de volumen igual a 27 cm^3, ¿cuál es la de área más pequeña?

59. Usted está construyendo una caja rectangular abierta con 12 ft^2 de material. ¿Qué dimensiones tendrá la caja de máximo volumen?

60. Considere la función $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy - x - y + 1$ en el cuadrado $0 \le x \le 1$ y $0 \le y \le 1$.

a) Demuestre que f tiene un mínimo absoluto a lo largo del segmento de recta $2x + 2y = 1$ en este cuadrado. ¿Cuál *es* el valor mínimo absoluto?

b) Obtenga el valor máximo absoluto de f en el cuadrado.

Valores extremos en curvas parametrizadas Para determinar los valores extremos de una función $f(x, y)$ sobre una curva $x = x(t)$, $y = y(t)$, consideramos a f como una función de una variable t y empleamos la regla de la cadena para encontrar dónde se anula df/dt. Como en cualquier otro caso de una variable, los valores extremos de f se encuentran entre los valores de f en los

a) puntos críticos (puntos donde df/dt es cero o no existe), y

b) extremos del dominio del parámetro.

Obtenga los valores mínimos y máximos absolutos de las siguientes funciones de las curvas dadas.

61. Funciones:

a) $f(x, y) = x + y$ ***b***) $g(x, y) = xy$ ***c***) $h(x, y) = 2x^2 + y^2$

Curvas:

i. La semicircunferencia $x^2 + y^2 = 4, \quad y \ge 0$

ii. La cuarta parte de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0$

Use las ecuaciones paramétricas $x = 2 \cos t$, $y = 2 \operatorname{sen} t$.

62. Funciones:

a) $f(x, y) = 2x + 3y$

b) $g(x, y) = xy$

c) $h(x, y) = x^2 + 3y^2$

Curvas:

i. La semielipse $(x^2/9) + (y^2/4) = 1, \quad y \ge 0$

ii. El cuarto de elipse $(x^2/9) + (y^2/4) = 1, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0$

Use las ecuaciones paramétricas $x = 3 \cos t$, $y = 2 \operatorname{sen} t$.

63. Función: $f(x, y) = xy$

Curvas:

i. La recta $x = 2t$, $y = t + 1$

ii. El segmento de recta $x = 2t$, $y = t + 1$, $1 \le t \le 0$

iii. El segmento de recta $x = 2t$, $y = t + 1$, $0 \le t \le 1$

64. Funciones:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$

b) $g(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$

Curvas:

i. La recta $x = t, \quad y = 2 - 2t$

ii. El segmento de recta $x = t, \quad y = 2 - 2t, \quad 0 \le t \le 1$

65. Rectas de mínimos cuadrados y de regresión Cuando tratamos de ajustar una recta $y = mx + b$ a un conjunto de datos numéricos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, por lo general, seleccionamos la recta que minimiza la suma de los cuadrados de las distancias verticales de los puntos a la recta. En teoría, esto significa la obtención de valores de m y b que minimizan el valor de la función

$$w = (mx_1 + b - y_1)^2 + \ldots + (mx_n + b - y_n)^2. \qquad (1)$$

(Vea la figura). Demuestre que los valores de m y b que logran esto son:

$$m = \frac{\left(\sum x_k\right)\left(\sum y_k\right) - n\sum x_k y_k}{\left(\sum x_k\right)^2 - n\sum x_k{}^2}, \qquad (2)$$

$$b = \frac{1}{n}\left(\sum y_k - m\sum x_k\right), \qquad (3)$$

donde todas las sumas van desde $k = 1$ hasta $k = n$. Muchas calculadoras científicas tienen integradas estas fórmulas, lo que facilita la obtención de m y b oprimiendo sólo unas cuantas teclas después de introducir los datos.

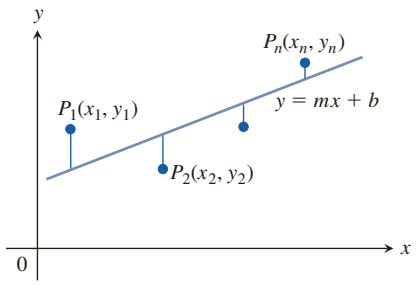
La recta $y = mx + b$ determinada por estos valores de m y b se llama **recta de mínimos cuadrados**, **recta de regresión** o **recta de tendencia** para los datos en cuestión. Determinar una recta de mínimos cuadrados permite:

1. resumir los datos mediante una expresión sencilla,

2. predecir los valores de y para otros valores de x que no se han estudiado experimentalmente.

3. manejar datos de forma analítica.

En la sección 1.4 demostramos estas ideas con diferentes aplicaciones.



En los ejercicios 66 a 68, use las ecuaciones (2) y (3) con la finalidad de obtener la recta de mínimos cuadrados para cada conjunto de puntos. Luego, use la ecuación lineal que obtenga para predecir el valor de y que correspondería a $x = 4$.

66. $(-2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 3)$ **67.** $(-1, 2)$, $(0, 1)$, $(3, -4)$

68. $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 69 a 74, explorará funciones para identificar sus extremos locales. Use un software matemático para ejecutar los siguientes pasos:

a) Grafique la función en el rectángulo dado.

b) Trace algunas curvas de nivel en el rectángulo.

c) Calcule las primeras derivadas parciales de la función y use la función de solución de ecuaciones del software para determinar los puntos críticos. ¿Cómo se relacionan los puntos críticos con las curvas de nivel graficadas en el inciso *b*)? ¿Cuáles puntos críticos, si acaso hay alguno, parecen ser un punto silla? Justifique su respuesta.

d) Calcule las segundas derivadas parciales de la función y obtenga el discriminante $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$.

e) Use los criterios de máximos y mínimos para clasificar los puntos críticos encontrados en el inciso *c*). ¿Sus resultados son congruentes con el análisis del inciso *c*)?

69. $f(x, y) = x^2 + y^3 - 3xy, \quad -5 \le x \le 5, \quad -5 \le y \le 5$

70. $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^2, \quad -2 \le x \le 2, \quad -2 \le y \le 2$

71. $f(x, y) = x^4 + y^2 - 8x^2 - 6y + 16, \quad -3 \le x \le 3, \quad -6 \le y \le 6$

72. $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 3, \quad -3/2 \le x \le 3/2, \quad -3/2 \le y \le 3/2$

73. $f(x, y) = 5x^6 + 18x^5 - 30x^4 + 30xy^2 - 120x^3, \quad -4 \le x \le 3, \quad -2 \le y \le 2$

74. $f(x, y) = \begin{cases} x^5 \ln(x^2 + y^2), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \quad -2 \le x \le 2, \quad -2 \le y \le 2$

14.8 Multiplicadores de Lagrange

Algunas veces necesitamos obtener los valores extremos de una función cuyo dominio está restringido a cierto subconjunto particular del plano (por ejemplo, un disco, una región triangular cerrada o una curva). Vimos una situación de este tipo en el ejemplo 6 de la sección anterior. En la presente sección, exploraremos un poderoso método para determinar los valores extremos de funciones restringidas: el método de *multiplicadores de Lagrange*.

Máximos y mínimos con restricciones

Para tener una idea, primero consideraremos el problema donde un mínimo con restricciones se puede obtener eliminando una variable.

EJEMPLO 1 Encuentre el punto $p(x, y, z)$ del plano $2x + y - z - 5 = 0$ que esté más cercano al origen.

Solución El problema nos pide obtener el valor mínimo de la función

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

sujeta a la restricción

$$2x + y - z - 5 = 0.$$

Puesto que $|\overrightarrow{OP}|$ tiene un valor mínimo siempre que la función

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

tenga un valor mínimo, podemos resolver el problema si encontramos el valor mínimo de $f(x, y, z)$ sujeto a la restricción $2x + y - z - 5 = 0$ (evitando las raíces cuadradas). Si consideramos a x y y como las variables independientes en esta ecuación y escribimos z como

$$z = 2x + y - 5,$$

nuestro problema se reduce a la obtención de los puntos (x, y) en los cuales la función

$$h(x, y) = f(x, y, 2x + y - 5) = x^2 + y^2 + (2x + y - 5)^2$$

tiene sus valores mínimos. Puesto que el dominio de h es todo el plano xy, el criterio de la primera derivada de la sección 14.7 nos dice que cualquier mínimo que h pudiera tener debe estar en puntos donde

$$h_x = 2x + 2(2x + y - 5)(2) = 0, \qquad h_y = 2y + 2(2x + y - 5) = 0.$$

Esto nos lleva a

$$10x + 4y = 20, \qquad 4x + 4y = 10,$$

y la solución es

$$x = \frac{5}{3}, \qquad y = \frac{5}{6}.$$

Podemos aplicar un argumento geométrico junto con el criterio de la segunda derivada para demostrar que estos valores minimizan h. La coordenada z del punto correspondiente en el plano $z = 2x + y - 5$ es

$$z = 2\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{5}{6} - 5 = -\frac{5}{6}.$$

Por lo tanto, el punto que buscamos es

$$P\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{6}\right).$$

La distancia de P al origen es $5/\sqrt{6} \approx 2.04$. ■

Intentar resolver un problema de máximos o mínimos con restricciones a través de una sustitución, como podríamos llamar al método del ejemplo 1, no siempre es sencillo. Por eso, conviene aprender el nuevo método de esta sección.

EJEMPLO 2 Encuentre los puntos del cilindro hiperbólico $x^2 - z^2 - 1 = 0$ más cercanos al origen.

Solución 1 El cilindro se ilustra en la figura 14.52. Buscamos los puntos sobre el cilindro que se encuentren más cercanos al origen. Éstos son los puntos cuyas coordenadas minimizan el valor de la función

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \text{Cuadrado de la distancia}$$

sujeta a la restricción $x^2 - z^2 - 1 = 0$. Si consideramos x y y como variables independientes en la ecuación de la restricción, entonces,

$$z^2 = x^2 - 1$$

y los valores de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ en el cilindro están dados por la función

$$h(x, y) = x^2 + y^2 + (x^2 - 1) = 2x^2 + y^2 - 1.$$

Para determinar los puntos en el cilindro cuyas coordenadas minimizan f, buscamos los puntos en el plano xy cuyas coordenadas minimizan h. El único valor extremo de h se presenta cuando

$$h_x = 4x = 0 \qquad \text{y} \qquad h_y = 2y = 0,$$

es decir, en el punto $(0, 0)$. Pero no existen puntos en el cilindro donde tanto x como y se anulen. ¿Qué estuvo mal?

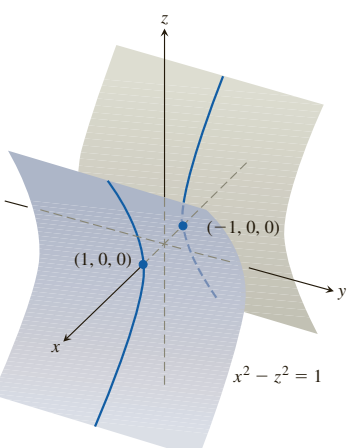


FIGURA 14.52 El cilindro hiperbólico $x^2 - z^2 - 1 = 0$ del ejemplo 2.

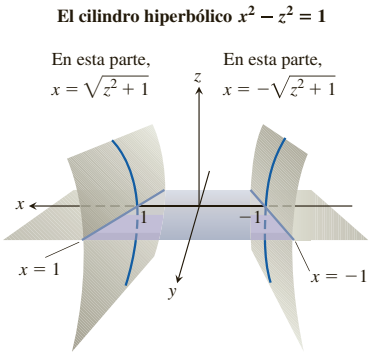


FIGURA 14.53 La región del plano xy a partir de la cual se seleccionan las primeras dos coordenadas de los puntos (x, y, z) del cilindro hiperbólico $x^2 - z^2 = 1$ excluye la banda $1 \le x \le 1$ en el plano xy (ejemplo 2).

Lo que ocurre es que el criterio de la primera derivada obtuvo (como debería) el punto *en el dominio de h* donde h tiene un valor mínimo. Por otro lado, nosotros queremos los puntos *del cilindro donde h* tiene un valor mínimo. Si bien el dominio de h es todo el plano xy, el dominio del cual podemos seleccionar las primeras dos coordenadas de los puntos (x, y, z) sobre el cilindro se restringe a la "sombra" del cilindro en el plano xy, la cual no incluye la banda entre las rectas $x = -1$ y $x = 1$ (figura 14.53).

Podemos evitar este problema si consideramos a y y z como variables independientes (en vez de x y y), expresando x en términos de y y z como

$$x^2 = z^2 + 1.$$

Con esta sustitución, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ se convierte en

$$k(y, z) = (z^2 + 1) + y^2 + z^2 = 1 + y^2 + 2z^2$$

y buscamos los puntos donde k toma su valor mínimo. El dominio de k en el plano yz concuerda ahora con el dominio del cual seleccionamos las coordenadas y y z de los puntos (x, y, z) sobre el cilindro. Por lo tanto, los puntos que minimizan k en el plano tendrán puntos correspondientes sobre el cilindro. Los valores más pequeños de k se presentan donde

$$k_y = 2y = 0 \qquad \text{y} \qquad k_z = 4z = 0,$$

o bien, donde $y = z = 0$. Esto nos lleva a

$$x^2 = z^2 + 1 = 1, \qquad x = \pm 1.$$

Los puntos correspondientes sobre el cilindro son $(\pm 1, 0, 0)$. A partir de la desigualdad, podemos ver que

$$k(y, z) = 1 + y^2 + 2z^2 \ge 1$$

así que los puntos $(\pm 1, 0, 0)$ dan un valor mínimo de k. También podemos ver que la distancia mínima del origen a un punto en el cilindro es una unidad.

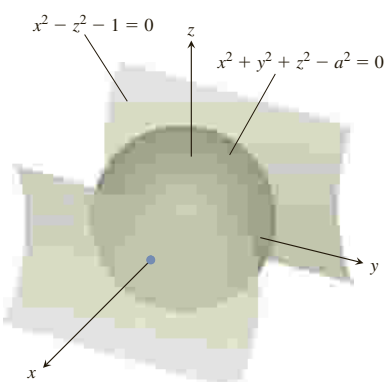


FIGURA 14.54 Una esfera con centro en el origen que crece como una burbuja de jabón hasta que toca justamente el cilindro hiperbólico $x^2 - z^2 - 1 = 0$ (ejemplo 2).

Solución 2 Otra manera de encontrar los puntos sobre el cilindro más cercanos al origen es imaginar una pequeña esfera, con centro en el origen, que crece como una burbuja de jabón hasta tocar al cilindro (figura 14.54). En cada punto de contacto, el cilindro y la esfera tienen el mismo plano tangente y la misma recta normal. Por consiguiente, si la esfera y el cilindro se representan como las superficies de nivel que se obtienen igualando

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 \qquad \text{y} \qquad g(x, y, z) = x^2 - z^2 - 1$$

a cero, entonces, los gradientes ∇f y ∇g serán paralelos cuando las superficies se toquen. Por lo tanto, en cualquier punto de contacto debemos encontrar un escalar λ ("lambda"), tal que

$$\nabla f = \lambda \nabla g,$$

o bien,

$$2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} = \lambda(2x\mathbf{i} - 2z\mathbf{k}).$$

Así, las coordenadas x, y y z de cualquier punto de tangencia tendrán que satisfacer las tres ecuaciones escalares

$$2x = 2\lambda x, \qquad 2y = 0, \qquad 2z = -2\lambda z.$$

¿Para qué valores de λ ocurrirá que un punto (x, y, z), cuyas coordenadas satisfacen estas ecuaciones escalares, se encuentre también sobre la superficie $x^2 - z^2 - 1 = 0$? Para contestar esta pregunta, aplicamos nuestro conocimiento de que ningún punto sobre la superficie tiene una coordenada x nula, para concluir que $x \neq 0$. Por lo tanto, $2x = 2\lambda x$ sólo si

$$2 = 2\lambda, \qquad \text{o} \qquad \lambda = 1.$$

Para $\lambda = 1$, la ecuación $2z = -2\lambda z$ se convierte en $2z = -2z$. Si esta ecuación se satisface también, z debe anularse. Puesto que también $y = 0$ (de la ecuación $2y = 0$), concluimos que todos los puntos que buscamos tienen coordenadas de la forma

$$(x, 0, 0).$$

¿Cuáles puntos sobre la superficie $x^2 - z^2 = 1$ tienen coordenadas de esta forma? Los puntos $(x, 0, 0)$ para los cuales

$$x^2 - (0)^2 = 1, \qquad x^2 = 1 \qquad \text{o} \qquad x = \pm 1.$$

Los puntos sobre el cilindro más cercanos al origen son los puntos $(\pm 1, 0, 0)$. ■

Método de multiplicadores de Lagrange

En la solución 2 del ejemplo 2, usamos el **método de multiplicadores de Lagrange**. El método indica que los valores extremos de una función $f(x, y, z)$, cuyas variables están sujetas a una restricción $g(x, y, z) = 0$, se encuentran sobre la superficie $g = 0$ en los puntos donde

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

para algún escalar λ (llamado **multiplicador de Lagrange**).

Para explorar el método y saber por qué funciona, haremos primero la siguiente observación, la cual establecemos como teorema.

TEOREMA 12 Teorema del gradiente ortogonal Suponga que $f(x, y, z)$ es diferenciable en una región cuyo interior contiene una curva suave

$$C: \quad \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Si P_0 es un punto de C donde f tiene un máximo o un mínimo local relativo a sus valores sobre C, entonces, ∇f es ortogonal a C en P_0.

Demostración Demostraremos que ∇f es ortogonal al vector $\mathbf{r}'$ tangente a la curva en P_0. Los valores de f en C están dados por la composición $f(x(t), y(t), z(t))$, cuya derivada con respecto a t es

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \nabla f \cdot \mathbf{r}'.$$

En cualquier punto P_0 donde f tiene un mínimo o un máximo local relativo a sus valores sobre la curva, $df/dt = 0$, de manera que

$$\nabla f \cdot \mathbf{r}' = 0.$$ ■

Al eliminar en el teorema 12 los términos en z, obtenemos un resultado similar para funciones de dos variables.

COROLARIO En los puntos de una curva suave $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, donde una función diferenciable $f(x, y)$ toma sus máximos y mínimos locales en relación con sus valores en la curva, $\nabla f \cdot \mathbf{r}' = 0$.

El teorema 12 es la clave del método de los multiplicadores de Lagrange. Suponga que $f(x, y, z)$ y $g(x, y, z)$ son diferenciables y que P_0 es un punto en la superficie $g(x, y, z) = 0$, donde f tiene un valor máximo o mínimo local en relación con sus otros valores sobre la superficie. Suponemos también que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ en los puntos sobre la superficie $g(x, y, z) = 0$. Así, f toma un máximo o un mínimo local en P_0 en relación con sus valores en todas las curvas diferenciables que pasan por P_0 sobre la superficie $g(x, y, z) = 0$. Por lo tanto, ∇f es

ortogonal al vector tangente de todas las curvas diferenciables que pasan por P_0. Esto también ocurre con ∇g (ya que ∇g es ortogonal a la superficie de nivel $g = 0$, como vimos en la sección 14.5). Por lo tanto, en P_0, ∇f es algún múltiplo escalar λ de ∇g.

El método de multiplicadores de Lagrange

Suponga que $f(x, y, z)$ y $g(x, y, z)$ son diferenciables y que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ cuando $g(x, y, z) = 0$. Para determinar los valores máximos y mínimos locales de f sujeta a la restricción $g(x, y, z) = 0$ (si éstas existen), se obtienen los valores de x, y, z y λ que satisfacen en forma simultánea las ecuaciones

$$\nabla f = \lambda \nabla g \qquad \text{y} \qquad g(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

Para funciones de dos variables independientes, la condición es similar, pero sin la variable z.

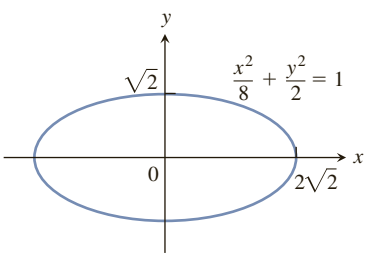


FIGURA 14.55 El ejemplo 3 muestra cómo obtener los valores mayores y menores del producto xy sobre esta elipse.

Se debe tener cuidado al aplicar este método. Es posible que un valor extremo no exista en realidad (ejercicio 45).

EJEMPLO 3 Obtenga los valores mayores y menores que toma la función

$$f(x, y) = xy$$

sobre la elipse (figura 14.55)

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

Solución Queremos encontrar los valores extremos de $f(x, y) = xy$ sujetos a la restricción

$$g(x, y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0.$$

Para hacerlo, primero hallamos los valores de x, y y λ para los cuales

$$\nabla f = \lambda \nabla g \qquad \text{y} \qquad g(x, y) = 0.$$

La ecuación del gradiente en las ecuaciones (1) nos da

$$y\mathbf{i} + x\mathbf{j} = \frac{\lambda}{4} x\mathbf{i} + \lambda y\mathbf{j},$$

de donde obtenemos

$$y = \frac{\lambda}{4} x, \qquad x = \lambda y \qquad \text{y} \qquad y = \frac{\lambda}{4}(\lambda y) = \frac{\lambda^2}{4} y,$$

de manera que $y = 0$ o $\lambda = \pm 2$. Ahora consideraremos estos dos casos.

Caso 1: Si $y = 0$, entonces, $x = y = 0$. Pero (0, 0) no está en la elipse. Por lo tanto, $y \neq 0$.

Caso 2: Si $y \neq 0$, entonces, $\lambda = \pm 2$ y $x = \pm 2y$. Al sustituir esto en la ecuación $g(x, y) = 0$, se obtiene

$$\frac{(\pm 2y)^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1, \qquad 4y^2 + 4y^2 = 8 \qquad \text{y} \qquad y = \pm 1.$$

Por lo tanto, la función $f(x, y) = xy$ toma sus valores extremos sobre la elipse en los cuatro puntos $(\pm 2, 1)$, $(\pm 2, -1)$. Los valores extremos son $xy = 2$ y $xy = -2$.

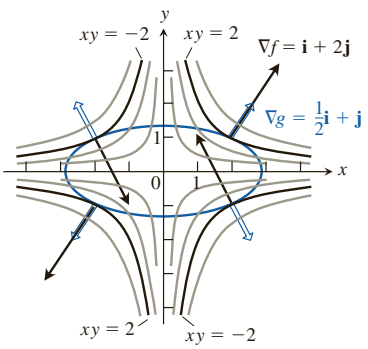


FIGURA 14.56 Cuando está sujeta a la restricción $g(x, y) = x^2/8 + y^2/2 - 1 = 0$, la función $f(x, y) = xy$ toma los valores extremos en los cuatro puntos $(\pm 2, \pm 1)$. Éstos son los puntos sobre la elipse cuando ∇f (negro) es un múltiplo escalar de ∇g (en color) (ejemplo 3).

Geometría de la solución Las curvas de nivel de la función $f(x, y) = xy$ son las hipérbolas $xy = c$ (figura 14.56). Cuanto más lejos estén las hipérbolas del origen, mayor será el valor absoluto de f. Queremos obtener los valores extremos de $f(x, y)$, considerando que el punto (x, y) también está en la elipse $x^2 + 4y^2 = 8$. ¿Cuáles de las hipérbolas que cortan a la elipse se encuentran más lejos del origen? Las hipérbolas que apenas rozan a la elipse, aquellas que son tangentes a ella, son las más lejanas. En estos puntos, cualquier vector normal a la hipérbola es normal a la elipse, así que $\nabla f = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ es un múltiplo ($\lambda = \pm 2$) de $\nabla g = (x/4)\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. En el punto (2, 1), por ejemplo,

$$\nabla f = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \qquad \nabla g = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad \nabla f = 2\nabla g.$$

En el punto (−2, 1),

$$\nabla f = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}, \qquad \nabla g = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad \nabla f = -2\nabla g. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 4 Determine los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 3x + 4y$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

Solución Modelamos esto como un problema de multiplicadores de Lagrange con

$$f(x, y) = 3x + 4y, \qquad g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

y buscamos los valores de x, y y λ que satisfacen las ecuaciones

$$\nabla f = \lambda \nabla g: \quad 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} = 2x\lambda\mathbf{i} + 2y\lambda\mathbf{j}$$
$$g(x, y) = 0: \quad x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

La ecuación gradiente en las ecuaciones (1) implica que $\lambda \neq 0$ y resulta

$$x = \frac{3}{2\lambda}, \qquad y = \frac{2}{\lambda}.$$

Estas ecuaciones nos indican, entre otras cosas, que x y y tienen el mismo signo. Con estos valores para x y y, la ecuación $g(x, y) = 0$ da

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 - 1 = 0,$$

de manera que

$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{4}{\lambda^2} = 1, \qquad 9 + 16 = 4\lambda^2, \qquad 4\lambda^2 = 25 \qquad \text{y} \qquad \lambda = \pm\frac{5}{2}.$$

Por lo tanto,

$$x = \frac{3}{2\lambda} = \pm\frac{3}{5}, \qquad y = \frac{2}{\lambda} = \pm\frac{4}{5}$$

y $f(x, y) = 3x + 4y$ tiene valores extremos en $(x, y) = \pm(3/5, 4/5)$.

Al calcular el valor de $3x + 4y$ en los puntos $\pm(3/5, 4/5)$, vemos que sus valores máximo y mínimo sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ son

$$3\left(\frac{3}{5}\right) + 4\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{25}{5} = 5 \qquad \text{y} \qquad 3\left(-\frac{3}{5}\right) + 4\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{25}{5} = -5.$$

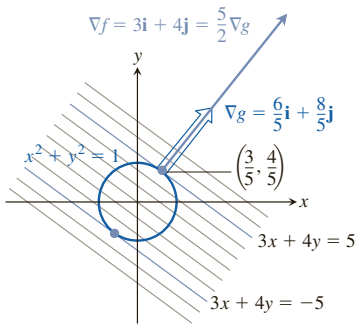


FIGURA 14.57 La función $f(x, y) = 3x + 4y$ toma su valor máximo sobre la circunferencia unitaria $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ en el punto $(3/5, 4/5)$, y su valor mínimo en el punto $(-3/5, -4/5)$ (ejemplo 4). En cada uno de estos puntos, ∇f es un múltiplo escalar de ∇g. La figura muestra los gradientes en el primer punto, pero no en el segundo.

La geometría de la solución Las curvas de nivel de $f(x, y) = 3x + 4y$ son las rectas $3x + 4y = c$ (figura 14.57). Cuanto más lejos se encuentran las rectas del origen, mayor será el valor absoluto de f. Queremos encontrar los valores extremos de $f(x, y)$, dado que el punto (x, y) también está sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. ¿Cuáles de las rectas que cortan la circunferencia se encuentran más lejos del origen? Las rectas tangentes a la circunferencia son las más lejanas. En los puntos de tangencia, cualquier vector normal a la recta es normal a la circunferencia, de manera que el gradiente $\nabla f = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ es un múltiplo ($\lambda = \pm 5/2$) del gradiente $\nabla g = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$. En el punto $(3/5, 4/5)$, por ejemplo,

$$\nabla f = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, \qquad \nabla g = \frac{6}{5}\mathbf{i} + \frac{8}{5}\mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad \nabla f = \frac{5}{2}\nabla g. \quad \blacksquare$$

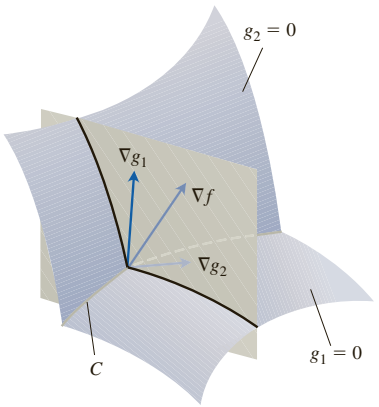


FIGURA 14.58 Los vectores ∇g_1 y ∇g_2 están en un plano perpendicular a la curva C porque ∇g_1 es normal a la superficie $g_1 = 0$, y ∇g_2 es normal a la superficie $g_2 = 0$.

Multiplicadores de Lagrange con dos restricciones

Muchos problemas nos exigen encontrar los valores extremos de una función diferenciable $f(x, y, z)$ cuyas variables están sujetas a dos restricciones. Si las restricciones son

$$g_1(x, y, z) = 0 \qquad \text{y} \qquad g_2(x, y, z) = 0$$

y g_1 y g_2 son diferenciables, y ∇g_1 no es paralelo a ∇g_2, obtenemos los mínimos y máximos locales con una restricción de f introduciendo dos multiplicadores de Lagrange λ y μ. Es decir, localizamos los puntos $P(x, y, z)$ donde f toma sus valores extremos con una restricción, obteniendo los valores de x, y, z, λ y μ que satisfacen simultáneamente las ecuaciones

$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2, \qquad g_1(x, y, z) = 0, \qquad g_2(x, y, z) = 0 \tag{2}$$

Las ecuaciones (2) tienen una agradable interpretación geométrica. La superficies $g_1 = 0$ y $g_2 = 0$ (por lo general) se cortan en una curva suave, digamos C (figura 14.58). Buscamos a lo largo de esta curva los puntos donde f tiene valores máximos y mínimos locales en relación con sus otros valores sobre la curva. Éstos son los puntos donde ∇f es normal a C, como vimos en el teorema 12. Pero ∇g_1 y ∇g_2 también son normales a C en estos puntos porque C se encuentra en las superficies $g_1 = 0$ y $g_2 = 0$. Por lo tanto, ∇f está en el plano determinado por ∇g_1 y ∇g_2, lo cual significa que $\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$ para algunas λ y μ. Como los puntos que buscamos también están en ambas superficies, sus coordenadas deben satisfacer las ecuaciones $g_1(x, y, z) = 0$ y $g_2(x, y, z) = 0$, las cuales son los requisitos restantes de las ecuaciones (2).

EJEMPLO 5 El plano $x + y + z = 1$ corta al cilindro $x^2 + y^2 = 1$ en una elipse (figura 14.59). Identifique los puntos sobre la elipse que se encuentran más cercanos al origen y más lejanos de éste.

Solución Obtenemos los valores extremos de

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

[el cuadrado de la distancia de (x, y, z) al origen] sujeta a las restricciones

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{3}$$
$$g_2(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0. \tag{4}$$

La ecuación de gradientes de las ecuaciones (2) nos da entonces

$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$$
$$2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} = \lambda(2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}) + \mu(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$
$$2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} = (2\lambda x + \mu)\mathbf{i} + (2\lambda y + \mu)\mathbf{j} + \mu\mathbf{k}$$

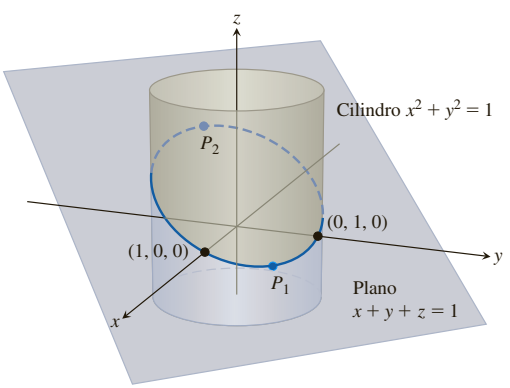


FIGURA 14.59 En la elipse donde el plano y el cilindro se intersecan, encontramos los puntos más cercanos y más lejanos al origen (ejemplo 5).

o bien,

$$2x = 2\lambda x + \mu, \qquad 2y = 2\lambda y + \mu, \qquad 2z = \mu. \tag{5}$$

Las ecuaciones escalares de la ecuación (5) generan

$$\begin{aligned} 2x &= 2\lambda x + 2z \Rightarrow (1 - \lambda)x = z, \\ 2y &= 2\lambda y + 2z \Rightarrow (1 - \lambda)y = z. \end{aligned} \tag{6}$$

Las ecuaciones (6) se satisfacen simultáneamente si $\lambda = 1$ y $z = 0$ o $\lambda \neq 1$ y $x = y = z/(1 - \lambda)$.

Si $z = 0$, al resolver las ecuaciones (3) y (4) en forma simultánea para obtener los puntos correspondientes sobre la elipse, obtenemos los dos puntos (1, 0, 0) y (0, 1, 0). Esto tiene sentido cuando observamos la figura 14.59.

Si $x = y$, entonces, las ecuaciones (3) y (4) nos dan

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 - 1 &= 0 & x + x + z - 1 &= 0 \\ 2x^2 &= 1 & z &= 1 - 2x \\ x &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2} & z &= 1 \mp \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Los puntos correspondientes sobre la elipse son

$$P_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \sqrt{2}\right) \quad \text{y} \quad P_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2}\right).$$

Sin embargo, debemos tener cuidado. Si bien P_1 y P_2 dan máximos locales de f sobre la elipse, P_2 está más alejado del origen que P_1.

Los puntos sobre la elipse más cercanos al origen son (1, 0, 0) y (0, 1, 0). El punto sobre la elipse más lejano del origen es P_2. (Vea la figura 14.59). ■

Ejercicios 14.8

Dos variables independientes con una restricción

1. **Extremos en una elipse** Determine los puntos sobre la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$, donde $f(x, y) = xy$ toma sus valores extremos.
2. **Extremos en una circunferencia** Obtenga los valores extremos de $f(x, y) = xy$ sujeta a la restricción $g(x, y) = x^2 + y^2 - 10 = 0$.
3. **Máximo en una recta** Determine el valor máximo de $f(x, y) = 49 - x^2 - y^2$ sobre la recta $x + 3y = 10$.
4. **Extremos sobre una recta** Obtenga los valores extremos locales de $f(x, y) = x^2y$ sobre la recta $x + y = 3$.
5. **Mínimo con una restricción** Determine los puntos sobre la curva $xy^2 = 54$ más cercanos al origen.
6. **Mínimo con una restricción** Obtenga los puntos de la curva $x^2y = 2$ más próximos al origen.
7. Use el método de multiplicadores de Lagrange para determinar
   - ***a*) Mínimo en una hipérbola** El valor mínimo de $x + y$, sujeto a las restricciones $xy = 16$, $x > 0$, $y > 0$
   - ***b*) Máximo sobre una recta** El valor máximo de xy, sujeto a la restricción $x + y = 16$.

   Comente acerca de la geometría de cada solución.
8. **Extremos en una curva** Determine los puntos de la curva $x^2 + xy + y^2 = 1$ en el plano xy más cercanos y más lejanos al origen.
9. **Área superficial mínima con volumen fijo** Obtenga las dimensiones de la lata cilíndrica circular recta y cerrada con menor área superficial cuyo volumen sea de 16π cm^3.
10. **Cilindro en una esfera** Determine el radio y la altura del cilindro circular recto y abierto de mayor área superficial que puede inscribirse en una esfera de radio a. ¿Cuál *es* la mayor área superficial?
11. **Rectángulo de mayor área en una elipse** Use el método de multiplicadores de Lagrange para encontrar las dimensiones del rectángulo de mayor área que se puede inscribir en la elipse $x^2/16 + y^2/9 = 1$ con lados paralelos a los ejes de coordenadas.
12. **Rectángulo del mayor perímetro en una elipse** Determine las dimensiones del rectángulo de mayor perímetro que puede inscribirse en la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ con lados paralelos a los ejes de coordenadas. ¿Cuál *es* el mayor perímetro?
13. **Extremos en una circunferencia** Obtenga los valores máximos y mínimos de $x^2 + y^2$, sujetos a la restricción $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$.
14. **Extremos en una circunferencia** Determine los valores máximos y mínimos de $3x - y + 6$, sujetos a la restricción $x^2 + y^2 = 4$.
15. **Hormiga en una placa de metal** La temperatura en un punto (x, y) de una placa de metal es $T(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2$. Una hormiga camina sobre la placa alrededor de una circunferencia de radio 5 con centro en el origen. ¿Cuáles son las temperaturas máxima y mínima que encuentra la hormiga?
16. **Tanque de almacenamiento más económico** Se ha pedido a su empresa diseñar un tanque de almacenamiento para gas líquido. Las especificaciones del cliente demandan un tanque

cilíndrico con extremos semiesféricos, y el tanque debe alojar 8000 m^3 de gas. El cliente también quiere usar la menor cantidad posible de material en la construcción del tanque. ¿Qué radio y altura recomendaría para la porción cilíndrica del tanque?

Tres variables independientes con una restricción

17. Distancia mínima a un punto Determine el punto sobre el plano $x + 2y + 3z = 13$ más cercano al punto (1, 1, 1).

18. Distancia máxima a un punto Determine el punto sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ más lejano del punto $(1, -1, 1)$.

19. Distancia mínima al origen Obtenga la distancia mínima de la superficie $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ al origen.

20. Distancia mínima al origen Obtenga el punto sobre la superficie $z = xy + 1$ más cercano al origen.

21. Distancia mínima al origen Determine los puntos sobre la superficie $z^2 = xy + 4$ más cercanos al origen.

22. Distancia mínima al origen Obtenga el(los) punto(s) sobre la superficie $xyz = 1$ más cercano(s) al origen.

23. Extremos en una esfera Determine los valores máximos y mínimos de

$$f(x, y, z) = x - 2y + 5z$$

sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 30$.

24. Extremos en una esfera Obtenga los puntos sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, donde $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ tiene sus valores máximos y mínimos.

25. Minimizar una suma de cuadrados Obtenga tres números reales cuya suma sea 9 y cuya suma de sus cuadrados sea lo más pequeña posible.

26. Maximizar un producto Determine el mayor producto que pueden tener los números positivos x, y y z, si $x + y + z^2 = 16$.

27. Caja rectangular de mayor volumen en una esfera Determine las dimensiones de la caja rectangular cerrada con mayor volumen que puede inscribirse en una esfera unitaria.

28. Caja con vértice en un plano Determine el volumen de la mayor caja rectangular cerrada en el primer octante que tiene tres caras en los planos de coordenadas y un vértice en el plano $x/a + y/b + z/c = 1$, donde $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$.

29. Punto más caliente en una sonda espacial Una sonda espacial en forma del elipsoide

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$$

entra a la atmósfera de la Tierra y su superficie se empieza a calentar. Después de una hora, la temperatura en el punto (x, y, z) sobre la superficie de la sonda es

$$T(x, y, z) = 8x^2 + 4yz - 16z + 600.$$

Determine el punto más caliente sobre la superficie de la sonda.

30. Temperaturas extremas en una esfera Suponga que la temperatura Celsius en el punto (x, y, z) sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ es $T = 400xyz^2$. Localice las temperaturas máxima y mínima sobre la esfera.

31. Función de producción de Cobb-Douglas Durante la década de 1920, Charles Cobb y Paul Douglas modelaron la salida de producción total P (de una empresa, una industria o de toda una economía) como una función de las horas de trabajo implicadas x y del capital invertido y (que incluye el valor monetario de todos los edificios y el equipo). La función de producción de Cobb-Douglas está dada por

$$P(x, y) = kx^{\alpha}y^{1-\alpha},$$

donde k y α son constantes representativas de una empresa particular o de una economía.

a) Demuestre que duplicar tanto las horas de trabajo como el capital da como resultado el doble de la producción P.

b) Suponga que una empresa particular tiene la función de producción para $k = 120$ y $\alpha = 3/4$. Considere que el costo de cada unidad de trabajo es de \$250, que el costo de cada unidad de capital es de \$400, y que el gasto de todos los costos no puede exceder de \$100 000. Determine el nivel de producción máximo de la empresa.

32. (*Continuación del ejercicio 31*). Si el costo de una unidad de trabajo es c_1 y el costo de una unidad de capital es c_2, y si la empresa puede gastar sólo B dólares como su presupuesto total, entonces, la producción tiene la restricción dada por $c_1x + c_2y = B$. Demuestre que el máximo nivel de producción sujeto a la restricción ocurre en el punto

$$x = \frac{\alpha B}{c_1} \quad \text{y} \quad y = \frac{(1 - \alpha)B}{c_2}.$$

33. Maximizar una función de utilidad: un ejemplo de economía En economía, la *utilidad* de las cantidades x y y de dos bienes de capital G_1 y G_2 se mide algunas veces por una función $U(x, y)$. Por ejemplo, G_1 y G_2 podrían ser dos sustancias químicas requeridas por una compañía farmacéutica, y $U(x, y)$ la ganancia de fabricar un producto cuya síntesis requiere diferentes cantidades de las sustancias, dependiendo del proceso utilizado. Si G_1 cuesta a dólares el kilogramo, G_2 cuesta b dólares el kilogramo y la cantidad total asignada para la compra de G_1 y G_2 combinada es de c dólares, entonces, los gerentes de la compañía quieren maximizar $U(x, y)$, dado que $ax + by = c$. Por lo tanto, necesitan resolver un problema típico de multiplicadores de Lagrange.

Suponga que

$$U(x, y) = xy + 2x$$

y que la ecuación $ax + by = c$ se simplifica como

$$2x + y = 30.$$

Determine el valor máximo de U y los valores correspondientes de x y y sujetos a esta última restricción.

34. Tipos de sangre Los tipos de sangre se clasifican por formas de tres genes A, B y O. Los tipos de sangre AA, BB y OO son *homocigóticos*, y los tipos AB, AO y BO son *heterocigóticos*. Si p, q y r representan las proporciones de las formas de los tres genes con respecto a la población, respectivamente, entonces, la *Ley de Hardy-Weinberg* afirma que la proporción Q de personas heterocigóticas en cualquier población dada se modela por

$$Q(p, q, r) = 2(pq + pr + qr),$$

sujeta a $p + q + r = 1$. Determine el máximo valor de Q.

35. Longitud de una viga En el ejercicio 39 de la sección 4.6 planteamos un problema que pedía determinar la longitud L de la viga más corta que se puede recargar sobre una pared de altura h hacia un edificio localizado a k unidades de la pared. Utilice multiplicadores de Lagrange para demostrar que

$$L = (h^{2/3} + k^{2/3})^{3/2}.$$

36. Localización de un radiotelescopio Usted es el encargado de instalar un radiotelescopio en un planeta recién descubierto. Para reducir al mínimo la interferencia, quiere colocar el radiotelescopio donde el campo magnético del planeta sea más débil. El planeta es esférico, con un radio de 6 unidades. Con base en un sistema de coordenadas cuyo origen es el centro del planeta,

la fuerza del campo magnético está dada por $M(x, y, z) = 6x - y^2 + xz + 60$. ¿Dónde debe ubicar el radiotelescopio?

Valores extremos sujetos a dos restricciones

37. Maximice la función $f(x, y, z) = x^2 + 2y - z^2$ sujeta a las restricciones $2x - y = 0$ y $y + z = 0$

38. Minimice la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, sujeta a las restricciones $x + 2y + 3z = 6$ y $x + 3y + 9z = 9$.

39. Distancia mínima al origen Determine el punto más cercano al origen sobre la recta de intersección de los planos $y + 2z = 12$ y $x + y = 6$.

40. Valor máximo en la recta de intersección Encuentre el valor máximo de $f(x, y, z) = x^2 + 2y - z^2$ sobre la recta de intersección de los planos $2x - y = 0$ y $y + z = 0$.

41. Extremos en una curva de intersección Determine los valores extremos de $f(x, y, z) = x^2yz + 1$ en la intersección del plano $z = 1$ con la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 10$.

42. ***a*) Máximos en una recta de intersección** Obtenga el valor máximo de $w = xyz$ sobre la recta de intersección de los dos planos $x + y + z = 40$ y $x + y - z = 0$.

***b*)** Exponga un argumento geométrico que confirme que ha encontrado un valor máximo de w, y no un mínimo.

43. Extremos sobre una circunferencia de intersección Determine los valores extremos de la función $f(x, y, z) = xy + z^2$ sobre la circunferencia donde el plano $y - x = 0$ corta a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

44. Distancia mínima al origen Obtenga el punto más cercano al origen sobre la curva de intersección del plano $2y + 4z = 5$ y el cono $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

Teoría y ejemplos

45. La condición $\nabla f = \lambda \nabla g$ no es suficiente Si bien $\nabla f = \lambda \nabla g$ es una condición necesaria para la existencia de un valor extremo de $f(x, y)$ sujeta a las condiciones $g(x, y) = 0$ y $\nabla g \neq 0$, no es en sí una garantía para que exista. Como un buen ejemplo, intente usar el método de multiplicadores de Lagrange para obtener un valor máximo de $f(x, y) = x + y$ sujeta a la restricción $xy = 16$. El método identificará los dos puntos (4, 4) y (−4, −4) como candidatos para la localización de valores extremos. Hasta ahora, la suma $(x + y)$ no tiene valores máximos en la hipérbola $xy = 16$. Cuanto más lejos se vaya del origen sobre esa hipérbola en el primer cuadrante, mayor será la suma $f(x, y) = x + y$.

46. Un plano de mínimos cuadrados El plano $z = Ax + By + C$ se "ajusta" a los siguientes puntos (x_k, y_k, z_k):

$$(0, 0, 0), \quad (0, 1, 1), \quad (1, 1, 1), \quad (1, 0, -1).$$

Determine los valores de A, B y C que minimizan

$$\sum_{k=1}^{4} (Ax_k + By_k + C - z_k)^2,$$

la suma de los cuadrados de las desviaciones.

47. ***a*) Máximo en una esfera** Demuestre que el valor máximo de $a^2b^2c^2$ en una esfera de radio r con centro en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas abc es $(r^2/3)^3$.

***b*) Medias geométrica y aritmética** Con base en el inciso *a*), demuestre que para números no negativos de a, b y c,

$$(abc)^{1/3} \leq \frac{a + b + c}{3};$$

es decir, la *media geométrica* de tres números no negativos es menor o igual que su *media aritmética*.

48. Suma de productos Considere n números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Obtenga el máximo de $\Sigma_{i=1}^{n} a_i x_i$ sujeta a la restricción $\Sigma_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 49 a 54, use un software matemático para realizar los siguientes pasos de implementación del método de multiplicadores de Lagrange para encontrar extremos con restricciones:

***a*)** Establezca la función $h = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2$ donde f es la función por optimizar sujeta a las restricciones $g_1 = 0$ y $g_2 = 0$.

***b*)** Determine todas las primeras derivadas parciales de h, incluyendo las parciales con respecto a λ_1 y λ_2, e iguálelas a cero.

***c*)** Resuelva el sistema de ecuaciones planteado en el inciso *b*) para despejar todas las incógnitas, incluyendo λ_1 y λ_2.

***d*)** Evalúe f en cada uno de los puntos de la solución determinados en el inciso *c*) y seleccione el valor extremo sujeto a las restricciones solicitadas en el ejercicio.

49. Minimice $f(x, y, z) = xy + yz$ sujeta a las restricciones $x^2 + y^2 - 2 = 0$ y $x^2 + z^2 - 2 = 0$.

50. Minimice $f(x, y, z) = xyz$ sujeta a las restricciones $x^2 + y^2 - 1 = 0$ y $x - z = 0$.

51. Maximice $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a las restricciones $2y + 4z - 5 = 0$ y $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$.

52. Minimice $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a las restricciones $x^2 - xy + y^2 - z^2 - 1 = 0$ y $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

53. Minimice $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ sujeta a las restricciones $2x - y + z - w - 1 = 0$ y $x + y - z + w - 1 = 0$.

54. Determine la distancia de la recta $y = x + 1$ a la parábola $y^2 = x$. [*Sugerencia:* Sea (x, y) un punto sobre la recta y sea (w, z) un punto sobre la parábola. Debe minimizar $(x - w)^2 + (y - z)^2$].

14.9 Fórmula de Taylor para dos variables

En esta sección usaremos la fórmula de Taylor con la finalidad de deducir el criterio de la segunda derivada para valores extremos locales (sección 14.7) y la fórmula del error para linealizaciones de funciones de dos variables independientes (sección 14.6). El uso de la fórmula de Taylor en estas deducciones implica una extensión de la fórmula que brinda aproximaciones polinomiales de todos los órdenes para funciones de dos variables independientes.

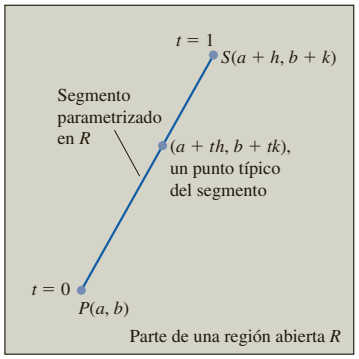


FIGURA 14.60 Iniciamos la deducción del criterio de la segunda derivada en $P(a, b)$ parametrizando un segmento de recta típico de P a un punto S cercano.

Deducción del criterio de la segunda derivada

Sea $f(x, y)$ con derivadas parciales continuas en una región abierta R que contiene un punto $P(a, b)$, donde $f_x = f_y = 0$ (figura 14.60). Sean h y k incrementos suficientemente pequeños para identificar el punto $S(a + h, b + k)$ y el segmento de recta que lo une con P dentro de R. Parametrizamos el segmento PS como

$$x = a + th, \qquad y = b + tk, \qquad 0 \le t \le 1.$$

Si $F(t) = f(a + th, b + tk)$, la regla de la cadena nos da

$$F'(t) = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} = hf_x + kf_y.$$

Puesto que f_x y f_y son diferenciables (tienen derivadas parciales continuas), F' es una función diferenciable de t y

$$\begin{aligned} F'' &= \frac{\partial F'}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F'}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}(hf_x + kf_y)\cdot h + \frac{\partial}{\partial y}(hf_x + kf_y)\cdot k \\ &= h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy}. \qquad f_{xy} = f_{yx} \end{aligned}$$

Puesto que F y F' son continuas en $[0, 1]$, y F' es diferenciable en $(0, 1)$, podemos aplicar la fórmula de Taylor con $n = 2$ y $a = 0$ para obtener

$$\begin{aligned} F(1) &= F(0) + F'(0)(1 - 0) + F''(c)\frac{(1 - 0)^2}{2} \\ &= F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(c) \end{aligned} \tag{1}$$

para alguna c entre 0 y 1. Al escribir la ecuación (1) en términos de f, se obtiene

$$\begin{aligned} f(a + h, b + k) = f(a, b) &+ hf_x(a, b) + kf_y(a, b) \\ &+ \frac{1}{2}\left(h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy}\right)\Big|_{(a+ch,\, b+ck)}. \end{aligned} \tag{2}$$

Puesto que $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$, esto se reduce a

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = \frac{1}{2}\left(h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy}\right)\Big|_{(a+ch,\, b+ck)}. \tag{3}$$

La presencia de un extremo de f en (a, b) queda determinada por el signo de $f(a + h, b + k) - f(a, b)$. Por la ecuación (3), éste es el mismo signo que el de

$$Q(c) = (h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy})\big|_{(a+ch,\, b+ck)}.$$

Ahora, si $Q(0) \neq 0$, el signo de $Q(c)$ será el mismo que el de $Q(0)$ para valores suficientemente pequeños de h y k. Podemos predecir el signo de

$$Q(0) = h^2 f_{xx}(a, b) + 2hkf_{xy}(a, b) + k^2 f_{yy}(a, b) \tag{4}$$

a partir de los signos de f_{xx} y $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ en (a, b). Multiplicamos ambos lados de la ecuación (4) por f_{xx} y reordenamos el lado derecho para obtener

$$f_{xx}Q(0) = (hf_{xx} + kf_{xy})^2 + (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}{}^2)k^2. \tag{5}$$

A partir de la ecuación (5), vemos que

1. Si $f_{xx} < 0$ y f_{xx} y $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ en (a, b), entonces, $Q(0) < 0$ para todos los valores no nulos suficientemente pequeños de h y k, y f tiene un valor *máximo local* en (a, b).
2. Si $f_{xx} > 0$ y $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ en (a, b), entonces, $Q(0) > 0$ para todos los valores no nulos suficientemente pequeños de h y k, y f tiene un valor *mínimo local* en (a, b).

3. Si $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ en (a, b), existen combinaciones de valores no nulos arbitrariamente pequeños de h y k para los cuales $Q(0) > 0$, y otros valores para los cuales $Q(0) < 0$. Arbitrariamente, cerca del punto $P_0(a, b, f(a, b))$ sobre la superficie $z = f(x, y)$ existen puntos sobre P_0 y puntos por debajo de P_0, de manera que f tiene un *punto silla* en (a, b).
4. Si $f_{xx}\, f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$, se necesita otro criterio. La posibilidad de que $Q(0)$ se anule nos evita tener que sacar conclusiones acerca del signo de $Q(c)$.

Fórmula del error para aproximaciones lineales

Queremos demostrar que la diferencia $E(x, y)$ entre los valores de una función $f(x, y)$ y su linealización $L(x, y)$ en (x_0, y_0) satisface la desigualdad

$$|E(x, y)| \le \frac{1}{2} M(|x - x_0| + |y - y_0|)^2.$$

Se supone que la función f tiene segundas derivadas parciales continuas de todo un conjunto abierto que contiene una región rectangular cerrada R con centro en (x_0, y_0). El número M es un límite superior de $|f_{xx}|$, $|f_{yy}|$ y $|f_{xy}|$ en R.

La desigualdad que queremos proviene de la ecuación (2). Sustituimos x_0 y y_0 en vez de a y b, y $x - x_0$ y $y - y_0$ en lugar de h y k, respectivamente, y reordenamos el resultado como

$$f(x, y) = \underbrace{f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}_{\text{linealización } L(x, y)}$$

$$+ \frac{1}{2}\underbrace{\left((x - x_0)^2 f_{xx} + 2(x - x_0)(y - y_0) f_{xy} + (y - y_0)^2 f_{yy}\right)\Big|_{(x_0 + c(x - x_0),\, y_0 + c(y - y_0))}}_{\text{error } E(x, y)}.$$

Esta ecuación revela que

$$|E| \le \frac{1}{2}\left(|x - x_0|^2 |f_{xx}| + 2|x - x_0||y - y_0|\, |f_{xy}| + |y - y_0|^2 |f_{yy}|\right).$$

Por lo tanto, si M es un límite superior para los valores de $|f_{xx}|$, $|f_{xy}|$ y $|f_{yy}|$ en R, entonces,

$$\begin{aligned} |E| &\le \frac{1}{2}\left(|x - x_0|^2 M + 2|x - x_0||y - y_0| M + |y - y_0|^2 M\right) \\ &= \frac{1}{2} M(|x - x_0| + |y - y_0|)^2. \end{aligned}$$

Fórmula de Taylor para funciones de dos variables

Las fórmulas deducidas anteriormente para F' y F'' pueden obtenerse aplicando a $f(x, y)$ los operadores

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{y} \quad \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} + k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Éstas son las primeras dos instancias de una fórmula más general,

$$F^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} F(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x, y), \tag{6}$$

la cual indica que la aplicación de d^n/dt^n a $F(t)$ nos da el mismo resultado que si se aplica el operador

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n$$

a $f(x, y)$ después de desarrollarlo por medio del teorema del binomio.

Si las derivadas parciales de f hasta orden $n + 1$ son continuas en toda una región rectangular con centro en (a, b), podemos extender la fórmula de Taylor para $F(t)$ a

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^{(n)} + \text{residuo},$$

y tomamos $t = 1$, para obtener

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \text{residuo},$$

Al reemplazar las primeras n derivadas de la derecha de esta última serie por sus expresiones equivalentes de la ecuación (6) evaluada en $t = 0$ y agregando el término del residuo adecuado, obtenemos la siguiente fórmula.

Fórmula de Taylor para $f(x, y)$ en el punto (a, b)

Suponga que $f(x, y)$ y sus derivadas parciales hasta orden $n + 1$ son continuas en una región rectangular abierta R, con centro en el punto (a, b). Entonces, en R,

$$\begin{aligned} f(a + h, b + k) = {} & f(a, b) + (hf_x + kf_y)\big|_{(a,b)} + \frac{1}{2!}(h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy})\big|_{(a,b)} \\ & + \frac{1}{3!}(h^3 f_{xxx} + 3h^2 k f_{xxy} + 3hk^2 f_{xyy} + k^3 f_{yyy})\big|_{(a,b)} + \cdots + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\Big|_{(a,b)} \\ & + \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f\Big|_{(a+ch,\, b+ck)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Los términos de las primeras n derivadas se evalúan en (a, b). El último término se evalúa en algún punto $(a + ch, b + ck)$ sobre el segmento de recta que une (a, b) y $(a + h, b + k)$.

Si $(a, b) = (0, 0)$ y consideramos a h y k como variables independientes (denotándolas ahora como x y y), entonces, la ecuación (7) adopta la siguiente forma.

Fórmula de Taylor para $f(x, y)$ en el origen

$$\begin{aligned} f(x, y) = {} & f(0, 0) + xf_x + yf_y + \frac{1}{2!}(x^2 f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2 f_{yy}) \\ & + \frac{1}{3!}(x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy}) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(x^n \frac{\partial^n f}{\partial x^n} + nx^{n-1}y\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y} + \cdots + y^n \frac{\partial^n f}{\partial y^n}\right) \\ & + \frac{1}{(n+1)!}\left(x^{n+1}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}} + (n+1)x^n y\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^n \partial y} + \cdots + y^{n+1}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1}}\right)\Bigg|_{(cx,\, cy)} \end{aligned} \tag{8}$$

Los términos de las primeras n derivadas se evalúan en $(0, 0)$. El último término se evalúa en un punto sobre el segmento de recta que une el origen con (x, y).

La fórmula de Taylor brinda aproximaciones polinomiales para funciones de dos variables. Los términos de las primeras n derivadas nos dan el polinomio; el último término nos da el error de aproximación. Los primeros tres términos de la fórmula de Taylor nos dan la linealización de la función. Para mejorar esta aproximación lineal, agregamos términos con potencias más altas.

EJEMPLO 1 Obtenga una aproximación cuadrática de $f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ cerca del origen. ¿Qué tan precisa es la aproximación si $|x| \le 0.1$ y $|y| \le 0.1$?

Solución Consideramos $n = 2$ en la ecuación (8):

$$f(x, y) = f(0, 0) + (xf_x + yf_y) + \frac{1}{2}(x^2 f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2 f_{yy}) + \frac{1}{6}(x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy})_{(cx,\, cy)}.$$

Calculando los valores de las derivadas parciales

$$f(0, 0) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y\big|_{(0,0)} = 0, \qquad f_{xx}(0, 0) = -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y\big|_{(0,0)} = 0,$$
$$f_x(0, 0) = \cos x \operatorname{sen} y\big|_{(0,0)} = 0, \qquad f_{xy}(0, 0) = \cos x \cos y\big|_{(0,0)} = 1,$$
$$f_y(0, 0) = \operatorname{sen} x \cos y\big|_{(0,0)} = 0, \qquad f_{yy}(0, 0) = -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y\big|_{(0,0)} = 0,$$

tenemos el resultado

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \approx 0 + 0 + 0 + \frac{1}{2}(x^2(0) + 2xy(1) + y^2(0)), \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \approx xy.$$

El error en la aproximación es

$$E(x, y) = \frac{1}{6}(x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy})\Big|_{(cx,\, cy)}.$$

Las terceras derivadas nunca exceden de 1 en valor absoluto porque son productos de senos y cosenos. Además, $|x| \le 0.1$ y $|y| \le 0.1$. Por lo tanto,

$$|E(x, y)| \le \frac{1}{6}((0.1)^3 + 3(0.1)^3 + 3(0.1)^3 + (0.1)^3) = \frac{8}{6}(0.1)^3 \le 0.00134$$

(redondeado). El error no excederá a 0.00134 si $|x| \le 0.1$ y $|y| \le 0.1$. ■

Ejercicios 14.9

Determinación de aproximaciones cuadráticas y cúbicas

En los ejercicios 1 a 10, use la fórmula de Taylor para $f(x, y)$ en el origen con la finalidad de obtener aproximaciones cuadráticas y cúbicas de f cerca del origen.

1. $f(x, y) = xe^y$

2. $f(x, y) = e^x \cos y$

3. $f(x, y) = y \operatorname{sen} x$

4. $f(x, y) = \operatorname{sen} x \cos y$

5. $f(x, y) = e^x \ln(1 + y)$

6. $f(x, y) = \ln(2x + y + 1)$

7. $f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$

8. $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$

9. $f(x, y) = \dfrac{1}{1 - x - y}$

10. $f(x, y) = \dfrac{1}{1 - x - y + xy}$

11. Use la fórmula de Taylor para encontrar una aproximación cuadrática de $f(x, y) = \cos x \cos y$ en el origen. Calcule el error en la aproximación si $|x| \le 0.1$ y $|y| \le 0.1$.

12. Use la fórmula de Taylor para obtener una aproximación cuadrática de $e^x \operatorname{sen} y$ en el origen. Calcule el error en la aproximación si $|x| \le 0.1$ y $|y| \le 0.1$.

14.10 Derivadas parciales con variables restringidas

En la determinación de las derivadas parciales de funciones como $w = f(x, y)$, hemos supuesto que x y y son independientes. Sin embargo, en muchas aplicaciones, éste no es el caso. Por ejemplo, la energía interna U de un gas se puede expresar como una función $U = f(P, V, T)$ de la presión P, el volumen V y la temperatura T. Si las moléculas individuales del gas no interactúan, P, V y T obedecen (y están restringidas por) la ley de los gases ideales

$$PV = nRT \qquad (n \text{ y } R \text{ son constantes}),$$

y no son independientes. En esta sección aprenderemos cómo obtener las derivadas parciales en situaciones como ésta, las cuales se presentan a menudo en economía, ingeniería y física.

Cómo determinar cuáles variables son dependientes y cuáles son independientes

Si las variables de una función $w = f(x, y, z)$ están restringidas por una relación como la impuesta sobre x, y y z por la ecuación $z = x^2 + y^2$, los significados geométricos y los valores numéricos de las derivadas parciales de f dependerán de las variables elegidas como dependientes o como independientes. Para ver cómo esta selección afecta el resultado, consideremos el cálculo de $\partial w/\partial x$ cuando $w = x^2 + y^2 + z^2$ y $z = x^2 + y^2$.

EJEMPLO 1 Determine $\partial w/\partial x$ si $w = x^2 + y^2 + z^2$ y $z = x^2 + y^2$.

Solución Tenemos dos ecuaciones con cuatro incógnitas x, y, z y w. Como en muchos de estos sistemas, podemos despejar dos incógnitas (las variables dependientes) en términos de las otras (las variables independientes). Al pedirnos $\partial w/\partial x$, nos están diciendo que w es una variable dependiente y x una variable independiente. Las posibles opciones para las otras variables son

Dependientes	*Independientes*
w, z	x, y
w, y	x, z

En cualquier caso, podemos expresar w en forma explícita en términos de las variables independientes seleccionadas. Lo hacemos usando la segunda ecuación $z = x^2 + y^2$ para eliminar la variable dependiente restante en la primera ecuación.

En el primer caso, la variable dependiente restante es z. Al sustituirla por $x^2 + y^2$, eliminamos a z de la primera ecuación. La expresión resultante es

$$\begin{aligned} w &= x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)^2 \\ &= x^2 + y^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \end{aligned}$$

y

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 4x^3 + 4xy^2. \tag{1}$$

Ésta es la fórmula para $\partial w/\partial x$ cuando x y y son las variables independientes.

En el segundo caso, donde x y z son las variables independientes y y es la variable dependiente restante, eliminamos la variable dependiente y en la expresión de w al sustituir y^2 por $z - x^2$. Con esto, se obtiene

$$w = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (z - x^2) + z^2 = z + z^2$$

y

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

Ésta es la fórmula para $\partial w/\partial x$ cuando x y z son las variables independientes.

Las fórmulas para $\partial w/\partial x$ en las ecuaciones (1) y (2) son en verdad diferentes. No podemos cambiar una fórmula por la otra usando la relación $z = x^2 + y^2$. No hay sólo una $\partial w/\partial x$, sino dos, y vemos que la instrucción original para encontrar $\partial w/\partial x$ era incompleta. Ahora nos preguntamos, ¿cuál $\partial w/\partial x$?

Las interpretaciones geométricas de las ecuaciones (1) y (2) nos ayudan a explicar por qué difieren las ecuaciones. La función $w = x^2 + y^2 + z^2$ mide el cuadrado de la distancia del punto (x, y, z) al origen. La condición $z = x^2 + y^2$ indica que el punto (x, y, z) está sobre el paraboloide de revolución que se muestra en la figura 14.61. ¿Qué significa calcular $\partial w/\partial x$ en un punto $P(x, y, z)$ que se puede mover solamente sobre esta superficie? ¿Cuál es el valor de $\partial w/\partial x$ cuando las coordenadas de P son, digamos, $(1, 0, 1)$?

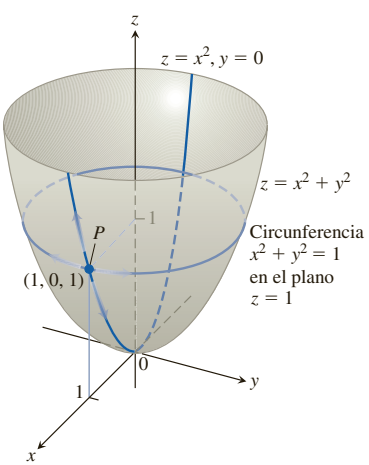


FIGURA 14.61 Si se restringe P a estar sobre el paraboloide $z = x^2 + y^2$, el valor de la derivada parcial de $w = x^2 + y^2 + z^2$ con respecto a x en P depende de la dirección del movimiento (ejemplo 1). **1.** Cuando x cambia, con $y = 0$, P se mueve hacia arriba y hacia abajo sobre la superficie en la parábola $w = x^2$ en el plano xz con $\partial w/\partial x = 2x + 4x^3$. **2.** Cuando x cambia, con $z = 1$, P se mueve sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$ y $\partial w/\partial x = 0$.

Si tomamos a x y y como variables independientes, entonces, encontramos $\partial w/\partial x$ manteniendo a y fija (en este caso, en $y = 0$) y dejando que x varíe. Por consiguiente, P se mueve a través de la parábola $z = x^2$ en el plano xz. Como P se mueve sobre esta parábola, w, que es el cuadrado de la distancia de P al origen, cambia. Calculamos $\partial w/\partial x$ en este caso (nuestra primera solución anterior) como

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 4x^3 + 4xy^2.$$

En el punto $P(1, 0, 1)$, el valor de esta derivada es

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2 + 4 + 0 = 6.$$

Si tomamos x y z como independientes, entonces, encontramos $\partial w/\partial x$ manteniendo a z fija mientras x cambia. Puesto que la coordenada z de P es 1, al variar x, P se mueve sobre una circunferencia en el plano $z = 1$. Conforme P se mueve sobre la circunferencia, su distancia con respecto al origen permanece constante, y w (que es el cuadrado de esta distancia) no cambia. Es decir,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

como encontramos en nuestra segunda solución. ■

Cómo encontrar $\partial w/\partial x$ cuando las variables en $w = f(x, y, z)$ están restringidas por otra ecuación

Como vimos en el ejemplo 1, una típica rutina para encontrar $\partial w/\partial x$, cuando las variables en la función $w = f(x, y, z)$ están relacionadas por otra ecuación, consta de tres pasos, los cuales también se aplican para encontrar $\partial w/\partial y$ y $\partial w/\partial z$.

1. *Determine* cuáles variables serán dependientes y cuáles independientes. (En la práctica, la decisión se basa en el contexto físico o teórico de nuestro trabajo. En los ejercicios al final de esta sección, decimos cuáles variables son cuáles).
2. *Elimine* la(s) otra(s) variable(s) dependiente(s) en la expresión de w.
3. *Diferencie* en la forma habitual.

Si no podemos llevar a cabo el paso 2 después de determinar cuáles serán las variables dependientes, diferenciamos las ecuaciones como están y, después, tratamos de despejar $\partial w/\partial x$. El siguiente ejemplo muestra cómo se hace.

EJEMPLO 2 Obtenga $\partial w/\partial x$ en el punto $(x, y, z) = (2, -1, 1)$ si

$$w = x^2 + y^2 + z^2, \qquad z^3 - xy + yz + y^3 = 1,$$

y x y y son las variables independientes.

Solución No es conveniente eliminar z en la expresión de w. Por lo tanto, diferenciamos ambas ecuaciones en forma implícita con respecto a x, tratando a x y y como variables independientes, y a w y z como variables dependientes. Esto nos da

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} \tag{3}$$

y

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial x} - y + y\frac{\partial z}{\partial x} + 0 = 0. \tag{4}$$

Estas ecuaciones pueden combinarse para expresar $\partial w/\partial x$ en términos de x, y y z. Despejamos $\partial z/\partial x$ en la ecuación (4) para obtener

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{y + 3z^2}$$

y al sustituir en la ecuación (3), obtenemos

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + \frac{2yz}{y + 3z^2}.$$

El valor de esta derivada en $(x, y, z) = (2, -1, 1)$ es

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{(2,-1,1)} = 2(2) + \frac{2(-1)(1)}{-1 + 3(1)^2} = 4 + \frac{-2}{2} = 3.$$ ■

Notación

Para mostrar cuáles variables se consideran como independientes al calcular una derivada, podemos usar la siguiente notación:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y \qquad \partial w/\partial x \text{ con } x \text{ y } y \text{ independientes}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,\,t} \qquad \partial f/\partial y \text{ con } y,\ x \text{ y } t \text{ independientes}$$

EJEMPLO 3 Obtenga $(\partial w/\partial x)_{y,z}$ si $w = x^2 + y - z + \operatorname{sen} t$ y $x + y = t$.

Solución Con x, y y z independientes, tenemos

$$t = x + y, \qquad w = x^2 + y - z + \operatorname{sen}(x + y)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,\,z} = 2x + 0 - 0 + \cos(x + y)\frac{\partial}{\partial x}(x + y)$$

$$= 2x + \cos(x + y).$$ ■

Diagramas de flechas

En la resolución de problemas como el del ejemplo 3, es útil iniciar con un diagrama de flechas que muestre la relación entre las variables y las funciones. Si

$$w = x^2 + y - z + \operatorname{sen} t \qquad \text{y} \qquad x + y = t$$

y nos piden calcular $\partial w/\partial x$ cuando x, y y z son independientes, el diagrama adecuado es como el siguiente:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \rightarrow w \qquad (5)$$

Variables independientes — Variables intermedias — Variables dependiente

Para evitar confusión entre las variables independientes y las intermedias con los mismos nombres simbólicos en el diagrama, es útil renombrar las variables intermedias (de manera que se vean como *funciones* de las variables independientes). Así, $u = x$, $v = y$ y $s = z$ denotan las variables intermedias renombradas. Con esta notación, el diagrama de flechas queda como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \\ s \\ t \end{pmatrix} \rightarrow w \tag{6}$$

Variables independientes | Variables intermedias y relaciones | Variable dependiente

$u = x$
$v = y$
$s = z$
$t = x + y$

El diagrama muestra las variables independientes a la izquierda, las variables intermedias y su relación con las variables independientes en la parte central, y la variable dependiente a la derecha. La función w queda entonces como

$$w = u^2 + v - s + \operatorname{sen} t,$$

donde

$$u = x, \qquad v = y, \qquad s = z \qquad \text{y} \qquad t = x + y.$$

Para calcular $\partial w/\partial x$, aplicamos a w la regla de la cadena para cuatro variables, auxiliados por el diagrama de flechas de la ecuación (6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} \\ &= (2u)(1) + (1)(0) + (-1)(0) + (\cos t)(1) \\ &= 2u + \cos t \\ &= 2x + \cos(x + y). \end{aligned}$$

Se sustituyen las variables independientes originales $u = x$ y $t = x + y$

Ejercicios 14.10

Cálculo de derivadas parciales con variables restringidas

En los ejercicios 1 a 3, inicie trazando un diagrama que muestre las relaciones entre las variables.

1. Si $w = x^2 + y^2 + z^2$ y $z = x^2 + y^2$, determine

a) $\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)_z$ ***b)*** $\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)_x$ ***c)*** $\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)_y$.

2. Si $w = x^2 + y - z + \operatorname{sen} t$ y $x + y = t$, determine

a) $\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)_{x,z}$ ***b)*** $\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)_{z,t}$ ***c)*** $\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)_{x,y}$

d) $\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)_{y,t}$ ***e)*** $\left(\dfrac{\partial w}{\partial t}\right)_{x,z}$ ***f)*** $\left(\dfrac{\partial w}{\partial t}\right)_{y,z}$.

3. Sea $U = f(P, V, T)$ la energía interna de un gas que obedece la ley del gas ideal $PV = nRT$ (n y R constantes). Determine

a) $\left(\dfrac{\partial U}{\partial P}\right)_V$ ***b)*** $\left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_V$.

4. Calcule

a) $\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)_y$ ***b)*** $\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)_y$

en el punto $(x, y, z) = (0, 1, \pi)$ si

$$w = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \text{y} \qquad y \operatorname{sen} z + z \operatorname{sen} x = 0.$$

5. Calcule

a) $\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)_x$ ***b)*** $\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)_z$

en el punto $(w, x, y, z) = (4, 2, 1, 1)$ si

$$w = x^2y^2 + yz - z^3 \qquad \text{y} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 6.$$

6. Calcule $(\partial u/\partial y)_x$ en el punto $(u, v) = (\sqrt{2}, 1)$ si $x = u^2 + v^2$ y $y = uv$.

7. Suponga que $x^2 + y^2 = r^2$ y $x = r\cos\theta$, como en coordenadas polares. Obtenga

$$\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_\theta \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_y.$$

8. Suponga que

$$w = x^2 - y^2 + 4z + t \qquad \text{y} \qquad x + 2z + t = 25.$$

Demuestre que cada una de las ecuaciones

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x - 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = 2x - 2$$

nos da $\partial w/\partial x$, dependiendo de las variables seleccionadas como dependientes y de las seleccionadas como independientes. Identifique las variables independientes en cada caso.

Teoría y ejemplos

9. Compruebe el hecho, ampliamente considerado en hidrodinámica, de que si $f(x, y, z) = 0$, entonces,

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1.$$

(*Sugerencia:* Exprese todas las derivadas en términos de las derivadas parciales formales $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ y $\partial f/\partial z$).

10. Si $z = x + f(u)$, donde $u = xy$, demuestre que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = x.$$

11. Suponga que la ecuación $g(x, y, z) = 0$ determina a z como una función diferenciable de las variables independientes x y y, y que $g_z \neq 0$. Demuestre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = -\frac{\partial g/\partial y}{\partial g/\partial z}.$$

12. Suponga que $f(x, y, z, w) = 0$ y $g(x, y, z, w) = 0$ definen a z y w como funciones diferenciables de las variables independientes x y y, y suponga que

$$\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial g}{\partial z} \neq 0.$$

Demuestre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial w} - \dfrac{\partial f}{\partial w}\dfrac{\partial g}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial g}{\partial w} - \dfrac{\partial f}{\partial w}\dfrac{\partial g}{\partial z}}$$

y

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_x = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial g}{\partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial z}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial g}{\partial w} - \dfrac{\partial f}{\partial w}\dfrac{\partial g}{\partial z}}.$$

Capítulo 14 Preguntas de repaso

1. ¿Qué es una función real de dos variables independientes? ¿De tres variables independientes? Dé ejemplos.

2. ¿Qué significa que los conjuntos en el plano o el espacio sean abiertos? ¿Cerrados? Ejemplifique. Dé ejemplos de conjuntos que no sean abiertos ni cerrados.

3. ¿Cómo desplegaría gráficamente los valores de una función $f(x, y)$ de dos variables independientes? ¿Cómo lo haría para una función $f(x, y, z)$ de tres variables independientes?

4. ¿Qué quiere decir que una función $f(x, y)$ tenga un límite L cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$? ¿Cuáles son las propiedades básicas de los límites de funciones de dos variables independientes?

5. ¿Cuándo ocurre que una función de dos (o tres) variables independientes es continua en un punto de su dominio? Dé ejemplos de funciones que sean continuas en algunos puntos, pero no en otros.

6. ¿Qué se puede decir acerca de las combinaciones algebraicas y las composiciones de funciones continuas?

7. Explique el criterio de dos trayectorias para la inexistencia de límites.

8. ¿Cómo se definen las derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ de una función $f(x, y)$? ¿Cómo se interpretan y se calculan?

9. ¿En qué difiere la relación entre las primeras derivadas parciales y la continuidad de las funciones de dos variables independientes, y la relación entre la primera derivada y la continuidad de las funciones reales de una variable independiente? Dé un ejemplo.

10. ¿Cuál es el teorema de las derivadas mixtas para las derivadas parciales mixtas de segundo orden? ¿Cómo ayuda este teorema en el cálculo de las derivadas parciales de segundo orden y de orden superior? Dé ejemplos.

11. ¿Qué significa que una función $f(x, y)$ sea diferenciable? ¿Qué dice el teorema del incremento acerca de la diferenciabilidad?

12. ¿Cómo se deduce a partir del examen de f_x y f_y que una función $f(x, y)$ es diferenciable? ¿Cuál es la relación entre la diferenciabilidad de f y la continuidad de f en un punto?

13. ¿Qué es la regla de la cadena general? ¿Qué forma adopta para funciones de dos variables independientes? ¿Y para funciones de tres variables independientes? ¿Para funciones definidas en superficies? ¿Cómo se esquematizan estas diferentes formas? Dé ejemplos. ¿Qué patrón permite recordar las diversas formas?

14. ¿Cuál es la derivada de una función $f(x, y)$ en un punto P_0 en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u}$? ¿Qué razón describe? ¿Qué interpretación geométrica tiene? Dé ejemplos.

15. ¿Qué es el vector gradiente de una función diferenciable $f(x, y)$? ¿Cómo se relaciona con las derivadas direccionales de la función? Defina resultados análogos para funciones de tres variables independientes.

16. ¿Cómo obtiene la recta tangente en un punto sobre una curva de nivel de una función diferenciable $f(x, y)$? ¿Cómo obtiene el plano tangente y la recta normal en un punto sobre una superficie de nivel de una función diferenciable $f(x, y, z)$? Dé ejemplos.

17. ¿Cómo puede utilizar las derivadas direccionales para estimar el cambio?

18. ¿Cómo se da una aproximación lineal de una función $f(x, y)$ de dos variables independientes en un punto (x_0, y_0)? ¿Por qué haría esto? ¿Cómo se da una aproximación lineal de una función de tres variables independientes?

19. ¿Qué puede decir acerca de la precisión de las aproximaciones lineales de las funciones de dos (o tres) variables independientes?

20. Si (x, y) se mueve de (x_0, y_0) a un punto $(x_0 + dx, y_0 + dy)$ cercano, ¿cómo podría estimar el cambio resultante en el valor de una función diferenciable $f(x, y)$? Dé un ejemplo.

21. ¿Cómo define los máximos locales, mínimos locales y puntos silla para una función diferenciable $f(x, y)$? Dé ejemplos.

22. ¿Cuáles son los criterios de derivadas disponibles para identificar los valores extremos locales de una función $f(x, y)$? ¿De qué manera simplifican la búsqueda de estos valores? Dé ejemplos.

23. ¿Cómo encuentra los valores extremos de una función continua $f(x, y)$ en una región cerrada y acotada en el plano xy? Dé un ejemplo.

24. Describa el método de multiplicadores de Lagrange y dé ejemplos.

25. ¿Cómo genera la fórmula de Taylor para una función $f(x, y)$ las aproximaciones polinomiales y las estimaciones de errores?

26. Si $w = f(x, y, z)$, donde las variables x, y y z están restringidas por una ecuación $g(x, y, z) = 0$, ¿cuál es el significado de la notación $(\partial w/\partial x)_y$? ¿Cómo ayuda un diagrama de flechas a calcular esta derivada parcial con variables restringidas? Dé ejemplos.

Capítulo 14 Ejercicios de práctica

Dominio, rango y curvas de nivel

En los ejercicios 1 a 4, determine el dominio y el rango de la función dada e identifique sus curvas de nivel. Trace una curva de nivel típica

1. $f(x, y) = 9x^2 + y^2$ **2.** $f(x, y) = e^{x+y}$

3. $g(x, y) = 1/xy$ **4.** $g(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$

En los ejercicios 5 a 8, obtenga el dominio y el rango de la función dada e identifique sus superficies de nivel. Trace una superficie de nivel típica.

5. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ **6.** $g(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$

7. $h(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$ **8.** $k(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$

Evaluación de límites

Calcule los límites en los ejercicios 9 a 14.

9. $\lim\limits_{(x,y)\to(\pi,\ \ln 2)} e^y \cos x$ **10.** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2 + y}{x + \cos y}$

11. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x - y}{x^2 - y^2}$ **12.** $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^3y^3 - 1}{xy - 1}$

13. $\lim\limits_{P\to(1,\ -1,\ e)} \ln|x + y + z|$ **14.** $\lim\limits_{P\to(1,-1,-1)} \tan^{-1}(x + y + z)$

Considerando diferentes trayectorias de aproximación, demuestre que los límites de los ejercicios 15 y 16 no existen.

15. $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y\neq x^2}} \dfrac{y}{x^2 - y}$ **16.** $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ xy\neq 0}} \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$

17. Extensión continua Sea $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ para $(x, y) \neq (0, 0)$. ¿Es posible definir $f(0, 0)$ de manera que f sea continua en el origen? ¿Por qué?

18. Extensión continua Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x - y)}{|x| + |y|}, & |x| + |y| \neq 0 \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

¿Es f continua en el origen? ¿Por qué?

Derivadas parciales

En los ejercicios 19 a 24, calcule la derivada parcial de la función con respecto a cada variable.

19. $g(r, \theta) = r\cos\theta + r\operatorname{sen}\theta$

20. $f(x, y) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

21. $f(R_1, R_2, R_3) = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}$

22. $h(x, y, z) = \operatorname{sen}(2\pi x + y - 3z)$

23. $P(n, R, T, V) = \dfrac{nRT}{V}$ (la ley del gas ideal)

24. $f(r, l, T, w) = \dfrac{1}{2rl}\sqrt{\dfrac{T}{\pi w}}$

Derivadas parciales de segundo orden

Calcule las derivadas parciales de segundo orden de las funciones en los ejercicios 25 a 28.

25. $g(x, y) = y + \dfrac{x}{y}$ **26.** $g(x, y) = e^x + y\operatorname{sen} x$

27. $f(x, y) = x + xy - 5x^3 + \ln(x^2 + 1)$

28. $f(x, y) = y^2 - 3xy + \cos y + 7e^y$

Cálculos con la regla de la cadena

29. Calcule dw/dt en $t = 0$ si $w = \operatorname{sen}(xy + \pi)$, $x = e^t$ $y = \ln(t + 1)$.

30. Calcule dw/dt en $t = 1$ si $w = xe^y + y\operatorname{sen} z - \cos z$, $x = 2\sqrt{t}$, $y = t - 1 + \ln t$ y $z = \pi t$.

31. Calcule $\partial w/\partial r$ y $\partial w/\partial s$ cuando $r = \pi$ y $s = 0$ si $w = \operatorname{sen}(2x - y)$, $x = r + \operatorname{sen} s$, $y = rs$.

32. Calcule $\partial w/\partial u$ y $\partial w/\partial v$ cuando $u = v = 0$ si $w = \ln\sqrt{1 + x^2} - \tan^{-1} x$ y $x = 2e^u \cos v$.

33. Obtenga el valor de la derivada $f(x, y, z) = xy + yz + xz$ con respecto a t sobre la curva $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = \cos 2t$ en $t = 1$.

34. Demuestre que si $w = f(s)$ es cualquier función derivable de s y si $s = y + 5x$, entonces,

$$\frac{\partial w}{\partial x} - 5\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Diferenciación implícita

Suponiendo que las ecuaciones de los ejercicios 35 y 36 definen y como una función diferenciable de x, calcule el valor dy/dx en el punto P.

35. $1 - x - y^2 - \operatorname{sen} xy = 0, \quad P(0, 1)$

36. $2xy + e^{x+y} - 2 = 0, \quad P(0, \ln 2)$

Derivadas direccionales

En los ejercicios 37 a 40, determine las direcciones en las cuales f crece y decrece más rápidamente en P_0, y calcule la derivada de f en cada dirección. Además, obtenga la derivada de f en P_0 en la dirección del vector $\mathbf{v}$.

37. $f(x, y) = \cos x \cos y, \quad P_0(\pi/4, \pi/4), \quad \mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

38. $f(x, y) = x^2e^{-2y}, \quad P_0(1, 0), \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

39. $f(x, y, z) = \ln(2x + 3y + 6z), \quad P_0(-1, -1, 1),$
$\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

40. $f(x, y, z) = x^2 + 3xy - z^2 + 2y + z + 4, \quad P_0(0, 0, 0),$
$\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

41. Derivada en dirección de la velocidad Calcule la derivada de $f(x, y, z) = xyz$ en la dirección del vector de velocidad de la hélice

$$\mathbf{r}(t) = (\cos 3t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} 3t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$$

en $t = \pi/3$.

42. Máxima derivada direccional ¿Cuál es el valor máximo que la derivada direccional de $f(x, y, z) = xyz$ puede tener en el punto $(1, 1, 1)$?

43. Derivadas direccionales con valores dados En el punto $(1, 2)$, la función $f(x, y)$ tiene una derivada de 2 en dirección hacia $(2, 2)$ y una derivada de -2 en dirección hacia $(1, 1)$.

a) Obtenga $f_x(1, 2)$ y $f_y(1, 2)$.

b) Obtenga la derivada de f en $(1, 2)$ en dirección hacia el punto $(4, 6)$.

44. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos si $f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0)? Justifique sus respuestas.

a) Si $\mathbf{u}$ es un vector unitario, la derivada de f en (x_0, y_0) en la dirección de $\mathbf{u}$ es $(f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j}) \cdot \mathbf{u}$.

b) La derivada de f en (x_0, y_0) en la dirección de $\mathbf{u}$ es un vector.

c) La derivada direccional de f en (x_0, y_0) tiene su valor máximo en la dirección de ∇f.

d) En (x_0, y_0), el vector ∇f es normal a la curva $f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Gradientes, planos tangentes y rectas normales

En los ejercicios 45 y 46, grafique la superficie $f(x, y, z) = c$ junto con ∇f en los puntos dados.

45. $x^2 + y + z^2 = 0; \quad (0, -1, \pm 1), \quad (0, 0, 0)$

46. $y^2 + z^2 = 4; \quad (2, \pm 2, 0), \quad (2, 0, \pm 2)$

En los ejercicios 47 y 48, determine una ecuación para el plano tangente a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ en el punto P_0. También obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta normal a la superficie en P_0.

47. $x^2 - y - 5z = 0, \quad P_0(2, -1, 1)$

48. $x^2 + y^2 + z = 4, \quad P_0(1, 1, 2)$

En los ejercicios 49 y 50, obtenga una ecuación para el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto dado.

49. $z = \ln(x^2 + y^2), \quad (0, 1, 0)$

50. $z = 1/(x^2 + y^2), \quad (1, 1, 1/2)$

En los ejercicios 51 y 52, determine las ecuaciones para las rectas tangentes y normales a la curva de nivel $f(x, y) = c$ en el punto P_0. Luego, trace las rectas y la curva de nivel junto con ∇f en P_0.

51. $y - \operatorname{sen} x = 1, \quad P_0(\pi, 1)$ **52.** $\dfrac{y^2}{2} - \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{3}{2}, \quad P_0(1, 2)$

Rectas tangentes a curvas

En los ejercicios 53 y 54, determine las ecuaciones paramétricas para la recta que es tangente a la curva de intersección de las superficies en el punto dado.

53. Superficies: $x^2 + 2y + 2z = 4, \quad y = 1$
Punto: $(1, 1, 1/2)$

54. Superficies: $x + y^2 + z = 2, \quad y = 1$
Punto: $(1/2, 1, 1/2)$

Linealizaciones

En los ejercicios 55 y 56, determine la linealización $L(x, y)$ de la función $f(x, y)$ en el punto P_0. Luego, obtenga un límite superior para la magnitud del error E en la aproximación $f(x, y) \approx L(x, y)$ en el rectángulo R.

55. $f(x, y) = \operatorname{sen} x \cos y, \quad P_0(\pi/4, \pi/4)$

$R: \quad \left|x - \dfrac{\pi}{4}\right| \le 0.1, \quad \left|y - \dfrac{\pi}{4}\right| \le 0.1$

56. $f(x, y) = xy - 3y^2 + 2, \quad P_0(1, 1)$

$R: \quad |x - 1| \le 0.1, \quad |y - 1| \le 0.2$

Determine las linealizaciones de las funciones en los ejercicios 57 y 58 en los puntos dados.

57. $f(x, y, z) = xy + 2yz - 3xz$ en $(1, 0, 0)$ y $(1, 1, 0)$

58. $f(x, y, z) = \sqrt{2} \cos x \operatorname{sen}(y + z)$ en $(0, 0, \pi/4)$ y $(\pi/4, \pi/4, 0)$

Estimación y sensibilidad a los cambios

59. Medición del volumen de una tubería Usted planea calcular el volumen dentro de un tramo de tubería de alrededor de 36 pulgadas de diámetro y 1 milla de largo. ¿Con cuál medición debe ser más cuidadoso, con el largo o con el diámetro? ¿Por qué?

60. Sensibilidad al cambio ¿Es $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3$ más sensible a los cambios en x o a los cambios en y cuando está cerca del punto $(1, 2)$? ¿Cómo lo sabe?

61. Cambio en un circuito eléctrico Suponga que la corriente I (en amperes) en un circuito eléctrico se relaciona con el voltaje V (en volts) y la resistencia R (en ohms) mediante la ecuación $I = V/R$. Si el voltaje se reduce de 24 a 23 volts y la resistencia disminuye de 100 a 80 ohms, ¿I crecerá o decrecerá? ¿Aproximadamente cuánto? ¿El cambio de I es más sensible al cambio en el voltaje o al cambio en la resistencia? ¿Cómo lo sabe?

62. Error máximo al estimar el área de una elipse Si $a = 10$ cm y $b = 16$ cm con una aproximación milimétrica, ¿cuál es error porcentual máximo esperado en el cálculo del área $A = \pi ab$ de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$?

63. Error al estimar un producto Sean $y = uv$ y $z = u + v$, donde u y v son variables independientes positivas.

a) Si u se mide con un error del 2% y v con un error del 3%, ¿aproximadamente cuál es el error porcentual en el valor calculado de y?

b) Demuestre que el error porcentual del valor calculado de z es menor que el error porcentual en el valor de y.

64. Índice cardiaco Para poder comparar a las personas en estudios cardiológicos, los investigadores dividen el bombeo cardiaco medido entre el área de la superficie corporal para obtener el *índice cardiaco* C:

$$C = \frac{\text{bombeo cardiaco}}{\text{área de la superficie corporal}}.$$

El área de la superficie corporal B de una persona con peso w y estatura h se calcula mediante la fórmula

$$B = 71.84w^{0.425}h^{0.725},$$

la cual nos da B en centímetros cuadrados cuando w se mide en kilogramos y h en centímetros. Usted va a calcular el índice cardiaco de una persona de 180 cm de estatura, 70 kg de peso, con un bombeo cardiaco de 7 L/min. ¿Qué tendrá un mayor efecto sobre el cálculo: un error de 1 kg en la medición del peso o un error de 1 cm en la medición de la estatura?

Extremos locales

Verifique la existencia de máximos y mínimos locales, así como la de puntos silla, de las funciones en los ejercicios 65 a 70. Obtenga el valor de cada función en estos puntos.

65. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 2x + 2y - 4$

66. $f(x, y) = 5x^2 + 4xy - 2y^2 + 4x - 4y$

67. $f(x, y) = 2x^3 + 3xy + 2y^3$

68. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 15$

69. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2$

70. $f(x, y) = x^4 - 8x^2 + 3y^2 - 6y$

Extremos absolutos

En los ejercicios 71 a 78, determine los valores máximos y mínimos de f en la región R.

71. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x + 3y$

R: La región triangular determinada en el primer cuadrante por la recta $x + y = 4$

72. $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y + 1$

R: La región rectangular en el primer cuadrante acotada por los ejes de coordenadas y las rectas $x = 4$ y $y = 2$

73. $f(x, y) = y^2 - xy - 3y + 2x$

R: La región cuadrada encerrada por las rectas $x = \pm 2$ y $y = \pm 2$

74. $f(x, y) = 2x + 2y - x^2 - y^2$

R: La región cuadrada acotada por los ejes de coordenadas y las rectas $x = 2$ y $y = 2$ en el primer cuadrante

75. $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y$

R: La región triangular acotada abajo por el eje x, arriba por la recta $y = x + 2$, y a la derecha por la recta $x = 2$

76. $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4 + 16$

R: La región triangular acotada abajo por la recta $y = -2$, arriba por la recta $y = x$, y a la derecha por la recta $x = 2$

77. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2$

R: La región cuadrada limitada por las rectas $x = \pm 1$ y $y = \pm 1$

78. $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3 + 1$

R: La región cuadrada limitada por las rectas $x = \pm 1$ y $y = \pm 1$

Multiplicadores de Lagrange

79. Extremos en una circunferencia Determine los valores extremos de $f(x, y) = x^3 + y^2$ en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

80. Extremos en una circunferencia Determine los valores extremos de $f(x, y) = xy$ en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

81. Extremos en un disco Calcule los valores extremos de $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 2y$ en el disco unitario $x^2 + y^2 \le 1$.

82. Extremos en un disco Determine los valores extremos de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x - xy$ en el disco $x^2 + y^2 \le 9$.

83. Extremos en una esfera Obtenga los valores extremos de $f(x, y, z) = x - y + z$ en la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

84. Distancia mínima al origen Determine los puntos sobre la superficie $x^2 - zy = 4$ más cercanos al origen.

85. Minimizar el costo de una caja Una caja rectangular cerrada tiene un volumen de V cm^3. El costo del material empleado en la caja es a centavos/cm^2 para la tapa y el fondo, b centavos/cm^2 para el frente y la parte posterior y c centavos/cm^2 para el resto de las caras. ¿Qué dimensiones minimizan el costo total de los materiales?

86. Menor volumen Encuentre el plano $x/a + y/b + z/c = 1$ que pasa por el punto (2, 1, 2) y corta el menor volumen en el primer octante.

87. Extremos en curvas de intersección de superficies Determine los valores extremos de $f(x, y, z) = x(y + z)$ sobre la curva de intersección del cilindro circular recto $x^2 + y^2 = 1$ y el cilindro hiperbólico $xz = 1$.

88. Distancia mínima al origen sobre una curva de intersección de un plano y un cono Determine el punto más cercano al origen sobre la curva de intersección del plano $x + y + z = 1$ y el cono $z^2 = 2x^2 + 2y^2$.

Teoría y ejemplos

89. Sean $w = f(r, \theta)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \tan^1(y/x)$. Obtenga $\partial w/\partial x$ y $\partial w/\partial y$; exprese sus respuestas en términos de r y θ.

90. Sean $z = f(u, v)$, $u = ax + by$ y $v = ax - by$. Exprese z_x y z_y en términos de f_u, f_v y las constantes a y b.

91. Si a y b son constantes, $w = u^3 + \tanh u + \cos u$, y $u = ax + by$, demuestre que

$$a\frac{\partial w}{\partial y} = b\frac{\partial w}{\partial x}.$$

92. Uso de la regla de la cadena Si $w = \ln(x^2 + y^2 + 2z)$, $x = r + s$, $y = r - s$ y $z = 2rs$, determine w_r y w_s mediante la regla de la cadena. Luego, verifique su respuesta de otra manera.

93. Ángulo entre vectores Las ecuaciones $e^u \cos v - x = 0$ y $e^u \operatorname{sen} v - y = 0$ definen a u y v como funciones diferenciables de x y y. Demuestre que el ángulo entre los vectores

$$\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\mathbf{j}$$

es constante.

94. Coordenadas polares y segundas derivadas La introducción de las coordenadas polares $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$ cambia $f(x, y)$ a $g(r, \theta)$. Obtenga el valor de $\partial^2 g/\partial\theta^2$ en el punto $(r, \theta) = (2, \pi/2)$, dado que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1$$

en ese punto.

95. Recta normal paralela a un plano Encuentre los puntos de la superficie

$$(y + z)^2 + (z - x)^2 = 16$$

donde la recta normal es paralela al plano yz.

96. Plano tangente paralelo al plano *xy* Encuentre los puntos sobre la superficie

$$xy + yz + zx - x - z^2 = 0$$

donde el plano tangente es paralelo al plano xy.

97. Cuando el gradiente es paralelo al vector de posición Suponga que $\nabla f(x, y, z)$ siempre es paralelo al vector de posición $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Demuestre que $f(0, 0, -a) = f(0, 0, a)$ para cualquier a.

98. Derivada direccional lateral, pero sin gradiente La *derivada direccional lateral de f en* $P(x_0, y_0, z_0)$ *en la dirección* $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ es el número

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2, z_0 + su_3) - f(x_0, y_0, z_0)}{s}.$$

Demuestre que la derivada direccional lateral de

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

en el origen es igual a 1 en cualquier dirección, pero que f no tiene vector gradiente en el origen.

99. Recta normal por el origen Demuestre que la recta normal a la superficie $xy + z = 2$ en el punto (1, 1, 1) pasa por el origen.

100. Plano tangente y recta normal

a) Grafique la superficie $x^2 - y^2 + z^2 = 4$.

b) Obtenga un vector normal a la superficie en (2, −3, 3). Agregue el vector a su gráfica.

c) Determine ecuaciones para el plano tangente y la recta normal en (2, −3, 3).

Derivadas parciales con variables restringidas

En los ejercicios 101 y 102, primero trace un diagrama que muestre las relaciones entre las variables.

101. Si $w = x^2e^{yz}$ y $z = x^2 - y^2$, determine

a) $\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)_z$ ***b)*** $\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)_x$ ***c)*** $\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)_y$.

102. Sea $U = f(P, V, T)$ la energía interna de un gas que obedece la ley de los gases ideales $PV = nRT$ (n y R constantes). Determine

a) $\left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_P$ ***b)*** $\left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_T$.

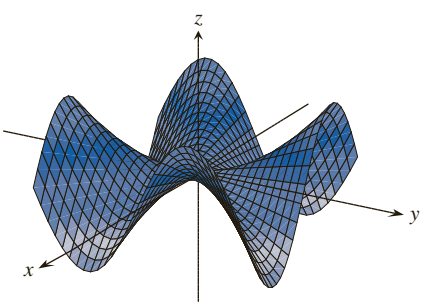
Capítulo 14 Ejercicios adicionales y avanzados

Derivadas parciales

1. Función con punto silla en el origen Si resolvió el ejercicio 60 de la sección 14.2, sabe que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(vea la siguiente figura) es continua en (0, 0). Obtenga $f_{xy}(0, 0)$ y $f_{yx}(0, 0)$.



2. Búsqueda de una función a partir de las segundas derivadas parciales Obtenga una función $w = f(x, y)$ cuyas primeras derivadas parciales son $\partial w/\partial x = 1 + e^x\cos y$ y $\partial w/\partial y = 2y - e^x\,\text{sen}\,y$, y cuyo valor en el punto (ln 2, 0) es ln 2.

3. Demostración de la regla de Leibniz La regla de Leibniz afirma que si f es continua en $[a, b]$ y si $u(x)$ y $v(x)$ son funciones diferenciables de x con valores en $[a, b]$, entonces,

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}.$$

Demuestre la regla considerando

$$g(u, v) = \int_u^v f(t)\,dt, \qquad u = u(x), \qquad v = v(x)$$

y calculando dg/dx con la regla de la cadena.

4. Determinación de una función con segundas parciales restringidas Suponga que f es una función dos veces diferenciable de r, que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y que

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0.$$

Demuestre que para algunas constantes a y b,

$$f(r) = \frac{a}{r} + b.$$

5. Funciones homogéneas Una función $f(x, y)$ es *homogénea de grado n* (n es un entero no negativo) si $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ para todas las t, x y y. Para tal función (suficientemente diferenciable), demuestre que

a) $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = nf(x, y)$

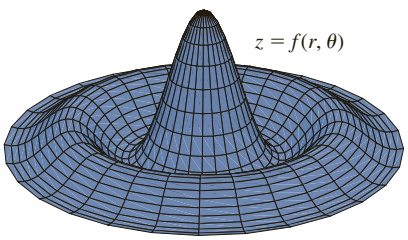
b) $x^2\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) + 2xy\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + y^2\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = n(n-1)f.$

6. Superficie en coordenadas polares Sea

$$f(r, \theta) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} 6r}{6r}, & r \neq 0 \\ 1, & r = 0, \end{cases}$$

donde r y θ son coordenadas polares. Determine

a) $\lim_{r \to 0} f(r, \theta)$ ***b)*** $f_r(0, 0)$ ***c)*** $f_\theta(r, \theta), \quad r \neq 0.$



Gradientes y tangentes

7. Propiedades de los vectores de posición Sean $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $r = |\mathbf{r}|$.

a) Demuestre que $\nabla r = \mathbf{r}/r$.

b) Demuestre que $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r}$.

c) Encuentre una función cuyo gradiente sea $\mathbf{r}$.

d) Demuestre que $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = r\,dr$.

e) Demuestre que $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{A}$ para cualquier vector constante $\mathbf{A}$.

8. Gradiente ortogonal a una tangente Suponga que una función diferenciable $f(x, y)$ tiene el valor constante c a lo largo de la curva diferenciable $x = g(t)$, $y = h(t)$; es decir,

$$f(g(t), h(t)) = c$$

para todos los valores de t. Diferencie ambos lados de esta ecuación con respecto a t para demostrar que ∇f es ortogonal al vector tangente a la curva en todos los puntos de la curva.

9. Curva tangente a una superficie Demuestre que la curva

$$\mathbf{r}(t) = (\ln t)\mathbf{i} + (t \ln t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

es tangente a la superficie

$$xz^2 - yz + \cos xy = 1$$

en $(0, 0, 1)$.

10. Curva tangente a una superficie Demuestre que la curva

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{t^3}{4} - 2\right)\mathbf{i} + \left(\frac{4}{t} - 3\right)\mathbf{j} + \cos(t - 2)\mathbf{k}$$

es tangente a la superficie

$$x^3 + y^3 + z^3 - xyz = 0$$

en $(0, -1, 1)$.

Valores extremos

11. Extremos en una superficie Demuestre que los únicos máximos y mínimos posibles para z en la superficie $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ ocurren en $(0, 0)$ y $(3, 3)$. Demuestre que no hay máximos ni mínimos en $(0, 0)$. Determine si z tiene un máximo o un mínimo en $(3, 3)$.

12. Máximo en el primer cuadrante cerrado Obtenga el valor máximo $f(x, y) = 6xye^{-(2x+3y)}$ en el primer cuadrante cerrado (incluye los ejes no negativos).

13. Volumen mínimo recortado en el primer octante Obtenga el volumen mínimo para una región acotada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y un plano tangente al elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

en un punto del primer octante.

14. Distancia mínima de una recta a una parábola en el plano *xy* Minimizando la función $f(x, y, u, v) = (x - u)^2 + (y - v)^2$ sujeta a las restricciones $y = x + 1$ y $u = v^2$, obtenga la distancia mínima en el plano xy de la recta $y = x + 1$ a la parábola $y^2 = x$.

Teoría y ejemplos

15. Primeras parciales acotadas implican continuidad Demuestre el siguiente teorema: si $f(x, y)$ está definida en una región abierta R del plano xy y si f_x y f_y están acotadas en R, entonces, $f(x, y)$ es continua en R. (El supuesto de estar acotada es esencial).

16. Suponga que $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$ es una curva suave en el dominio de una función diferenciable $f(x, y, z)$. Describa la relación entre df/dt, ∇f y $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$. ¿Qué se puede decir acerca de ∇f y $\mathbf{v}$ en los puntos interiores de la curva donde f tiene valores extremos en relación con sus otros valores sobre la curva? Justifique su respuesta.

17. Determinación de funciones a partir de derivadas parciales Suponga que f y g son funciones de x y y tales que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y},$$

y suponga que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad f(1, 2) = g(1, 2) = 5 \qquad \text{y} \qquad f(0, 0) = 4.$$

Obtenga $f(x, y)$ y $g(x, y)$.

18. Razón de cambio de la razón de cambio Sabemos que si $f(x, y)$ es una función de dos variables y si $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ es un vector unitario, entonces, $D_\mathbf{u} f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$ es la razón de cambio de $f(x, y)$ en (x, y) en la dirección de $\mathbf{u}$. Dé una fórmula similar para la razón de cambio *de la razón de cambio de* $f(x, y)$ en (x, y) en la dirección de $\mathbf{u}$.

19. Trayectoria de una partícula en busca de calor Una partícula que requiere calor tiene la propiedad de que en cualquier punto (x, y) del plano se mueve en dirección del mayor incremento de temperatura. Si la temperatura en (x, y) es $T(x, y) = -e^{-2y}\cos x$, obtenga la ecuación $y = f(x)$ para la trayectoria de una partícula que está en busca de calor en el punto $(\pi/4, 0)$.

20. Velocidad después de un rebote Una partícula que viaja en línea recta a velocidad constante $\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ pasa por el punto $(0, 0, 30)$ y golpea la superficie $z = 2x^2 + 3y^2$. La partícula rebota en la superficie, de manera que el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia. Si no hay pérdida de rapidez, ¿cuál es la velocidad de la partícula después del rebote? Simplifique su respuesta.

21. Derivadas direccionales tangentes a una superficie Sea S la superficie dada por la gráfica de $f(x, y) = 10 - x^2 - y^2$. Suponga que la temperatura de cada punto (x, y, z) en el espacio es $T(x, y, z) = x^2y + y^2z + 4x + 14y + z$.

a) Entre todas las posibles direcciones tangenciales a la superficie S en el punto $(0, 0, 10)$, ¿cuál de ellas hará que la razón de cambio de la temperatura en $(0, 0, 10)$ sea máxima?

b) ¿Cuál de las direcciones tangentes a S en el punto $(1, 1, 8)$ hará que la razón de cambio de la temperatura sea máxima?

22. Perforación de un pozo En la superficie plana del suelo, unos geólogos taladraron hasta formar un pozo recto y encontraron un depósito de mineral a 1000 ft de profundidad. Perforaron para formar un segundo pozo a 100 ft al norte del primero y hallaron el mineral a 950 ft. Un tercer pozo a 100 ft al este del primero dio con el depósito de mineral a 1025 ft. Los geólogos tienen razones para creer que el depósito de mineral tiene la forma de un domo y, por razones de economía, les gustaría encontrar el lugar donde el depósito está más cerca de la superficie. Suponiendo que la superficie sea el plano xy, ¿en qué dirección del primer pozo usted sugeriría a los geólogos taladrar para construir su cuarto pozo?

La ecuación unidimensional de calor Si $w(x, t)$ representa la temperatura en la posición x en el tiempo t en un alambre uniforme y perfectamente aislado, entonces, las derivadas parciales w_{xx} y w_t satisfacen la ecuación diferencial de la forma

$$w_{xx} = \frac{1}{c^2} w_t.$$

Esta ecuación se llama *ecuación unidimensional de calor*. El valor de la constante positiva c^2 se determina mediante el material del cual está hecho el alambre.

23. Obtenga todas las soluciones de la ecuación unidimensional de calor de la forma $w = e^{rt}$ sen πx, donde r es una constante.

24. Obtenga todas las soluciones de la ecuación unidimensional de calor de la forma $w = e^{rt}$ sen kx y que satisfacen las condiciones $w(0, t) = 0$ y $w(L, t) = 0$. ¿Qué sucede con estas soluciones cuando $t \to \infty$?

Capítulo 14 Proyectos de aplicación tecnológica

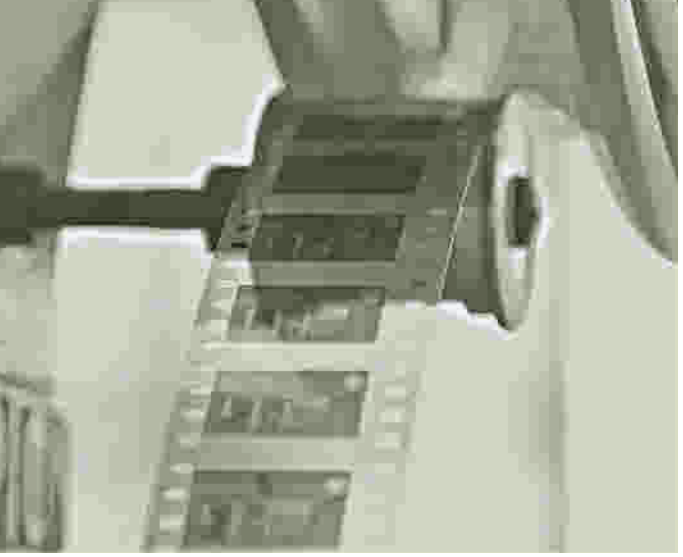
Módulos Mathematica/Maple:

Graficación de superficies
Genere de manera eficiente gráficas de superficies, contornos y curvas de nivel.

Análisis de las matemáticas que subyacen en las acrobacias que se realizan en patineta: Análisis de la derivada direccional
Se presenta la trayectoria de un profesional de la patineta, primero en una superficie plana, luego sobre una rampa y, finalmente, en un paraboloide. Calcule, trace y analice la derivada direccional en términos del patinador.

Búsqueda de patrones y aplicación del método de mínimos cuadrados a datos reales
Ajuste una recta a un conjunto de puntos de datos numéricos seleccionando la recta que minimice la suma de los cuadrados de las distancias verticales de los puntos a la recta.

Lagrange practica el arte de la patineta: ¿Qué altura alcanza?
Analice las aventuras de un profesional de la patineta para alturas máximas y mínimas desde una perspectiva tanto gráfica como analítica, usando los multiplicadores de Lagrange.



15 Integrales múltiples

INTRODUCCIÓN En este capítulo definimos la *integral doble* de una función de dos variables $f(x, y)$ sobre una región en el plano como el límite de las aproximaciones con sumas de Riemann. Así como una sola integral denota un área con signo, dos signos integrales representan un volumen con signo. Las integrales dobles se pueden evaluar usando el teorema fundamental del cálculo que estudiamos en la sección 5.4, pero ahora se efectúan dos veces las evaluaciones de las integrales con respecto a cada una de las variables x y y sucesivamente. Las integrales dobles se pueden utilizar para calcular áreas o regiones más generales que las que se resolvieron en el capítulo 5. Además, así como la regla de la sustitución permitía simplificar integrales, en ocasiones podemos utilizar coordenadas polares para simplificar el cálculo de una integral doble. Estudiaremos sustituciones más generales para evaluar también integrales dobles.

Además, definiremos *integrales triples* para una función de tres variables $f(x, y, z)$ sobre una región en el espacio. Las integrales triples se pueden utilizar para encontrar volúmenes de regiones aún más generales en el espacio, y su evaluación es similar a la de las integrales dobles, sólo que esta vez se efectúa una tercera evaluación. En ocasiones, para simplificar el cálculo de una integral triple, se utilizan *coordenadas cilíndricas* o *esféricas*, así que investigaremos esas técnicas. Las integrales dobles y triples tienen muchas aplicaciones, tales como el cálculo del valor promedio de una función de varias variables, y de los momentos y centros de masa considerando regiones más generales que las anteriores.

15.1 Integrales dobles e iteradas sobre rectángulos

En el capítulo 5 definimos la integral definida de una función continua $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ como el límite de las sumas de Riemann. En esta sección ampliaremos esta idea para definir la *integral doble* de una función continua de dos variables $f(x, y)$ sobre un rectángulo R acotado en el plano. Las sumas de Riemann para la integral de una función $f(x)$ de una variable se obtienen mediante la partición de un intervalo finito en pequeños subintervalos, para después multiplicar el ancho de cada subintervalo por el valor de f en un punto c_k dentro del subintervalo y, finalmente, sumando todos estos productos. Un método similar de hacer la partición, multiplicar y sumar se usa para construir integrales dobles como límites de aproximaciones con sumas de Riemann.

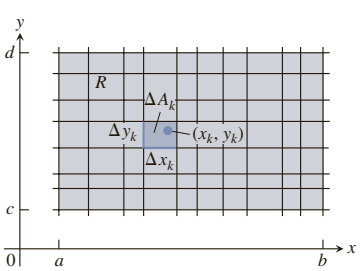


FIGURA 15.1 Cuadrícula rectangular que divide la región R en pequeños rectángulos de área $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$.

Integrales dobles

Iniciaremos nuestro estudio de las integrales dobles considerando el tipo más sencillo de regiones planas: un rectángulo. Consideremos una función $f(x, y)$ definida en una región rectangular R,

$$R: \quad a \le x \le b, \quad c \le y \le d.$$

Subdividimos R en pequeños rectángulos considerando una red de rectas paralelas a los ejes x y y (figura 15.1). Las rectas dividen R en n partes rectangulares, donde el número de partes

n crece cuando el ancho y la altura de cada una de ellas disminuyen. Estos rectángulos forman una **partición** de R. Una pequeña parte rectangular de ancho Δx y altura Δy tiene área $\Delta A = \Delta x \Delta y$. Si numeramos las pequeñas partes que dividen a R en cierto orden, entonces, sus áreas están dadas por $\Delta A_1, \Delta A_2, \ldots, \Delta A_n$, donde ΔA_k es el área del k-ésimo rectángulo pequeño.

Para formar una suma de Riemann sobre R, seleccionamos un punto (x_k, y_k) en el k-ésimo rectángulo pequeño, multiplicamos el valor de f en ese punto por el área ΔA_k, y sumamos todos los productos:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\, \Delta A_k.$$

Podemos obtener diferentes valores de S_n, dependiendo de la forma en que tomemos (x_k, y_k) en el k-ésimo rectángulo pequeño.

Nos interesa saber qué ocurre con las sumas de Riemann cuando las anchuras y alturas de todos los pequeños rectángulos de la partición de R tienden a cero. La **norma** de una partición P, representada como $\|P\|$, es el máximo entre los anchos y las alturas de los rectángulos en la partición. Si $\|P\| = 0.1$, entonces, todos los rectángulos de la partición de R tienen un ancho máximo de 0.1 y una altura máxima de 0.1. Algunas veces las sumas de Riemann convergen cuando la norma de P tiende a cero, lo que se representa como $\|P\| \to 0$. El límite resultante se expresa así:

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\, \Delta A_k.$$

Cuando $\|P\| \to 0$ y los rectángulos se vuelven más angostos y más cortos, su número n aumenta, por lo que también representamos este límite como

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\, \Delta A_k,$$

sin perder de vista que $\|P\| \to 0$; por lo tanto, $\Delta A_k \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Hay muchas opciones de selección implicadas en un límite de este tipo. La colección de pequeños rectángulos queda determinada por la cuadrícula formada por las rectas verticales y horizontales que establecen una partición rectangular de R. En cada uno de los pequeños rectángulos resultantes se elige un punto arbitrario (x_k, y_k) donde se evalúa f. Estas elecciones determinan una sola suma de Riemann. Para formar un límite, repetimos el proceso completo una y otra vez, eligiendo particiones tales que los anchos y las alturas de los rectángulos tiendan a cero y cuyo número tienda a infinito.

Cuando existe el límite de las sumas S_n y se obtiene el mismo valor límite sin importar las elecciones que se hagan, entonces, la función f es **integrable**, mientras que el límite se denomina la **integral doble** de f sobre R y se representa como

$$\iint_R f(x, y)\, dA \qquad \text{o} \qquad \iint_R f(x, y)\, dx\, dy.$$

Es posible demostrar que si $f(x, y)$ es una función continua en R, entonces, f es integrable, como en el caso de una sola variable estudiado en el capítulo 5. Muchas funciones discontinuas también son integrables, incluyendo funciones que son discontinuas sólo en un número finito de puntos o curvas suaves. Dejaremos la prueba de estos hechos para textos más avanzados.

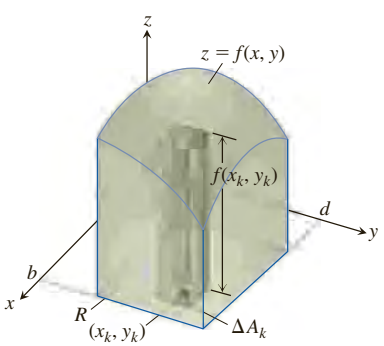


FIGURA 15.2 La aproximación de sólidos con cajas rectangulares nos conduce a definir los volúmenes de sólidos más generales como integrales dobles. El volumen del sólido que aquí se muestra es la integral doble de $f(x, y)$ sobre la región base R.

Integrales dobles como volúmenes

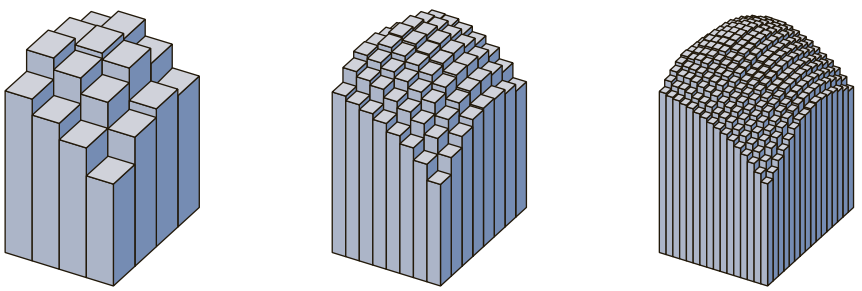
Cuando $f(x, y)$ es una función positiva sobre una región rectangular R del plano xy, podemos interpretar la integral doble de f sobre R como el volumen de la región sólida tridimensional en el plano xy acotada abajo por R y arriba por la superficie $z = f(x, y)$ (figura 15.2). Cada término $f(x_k, y_k)\Delta A_k$ en la suma $S_n = \sum f(x_k, y_k)\Delta A_k$ es el volumen de una caja rectangular vertical que se aproxima al volumen de la porción del sólido que está directamente sobre la

base ΔA_k. De esta manera, la suma S_n se aproxima a lo que llamaremos el volumen total del sólido. Este volumen se *define* como

$$\text{Volumen} = \lim_{n\to\infty} S_n = \iint_R f(x, y)\, dA,$$

donde $\Delta A_k \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Como es de esperarse, este método general para calcular el volumen coincide con los métodos del capítulo 6, pero no lo demostraremos aquí. La figura 15.3 revela que las aproximaciones al volumen mediante sumas de Riemann son cada vez más precisas cuando el número n de cajas aumenta.



a) $n = 16$ *b*) $n = 64$ *c*) $n = 256$

FIGURA 15.3 Cuando n crece, las aproximaciones mediante sumas de Riemann tienden al volumen total del sólido que se ilustra en la figura 15.2.

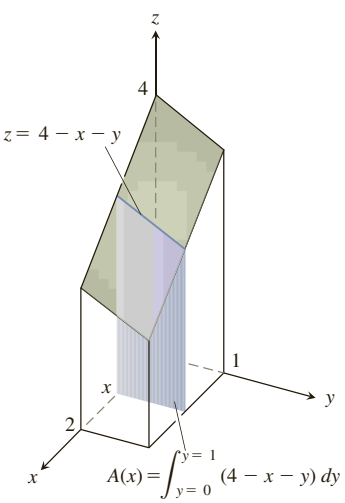


FIGURA 15.4 Para obtener el área de la sección transversal $A(x)$, mantenemos x fija e integramos con respecto a y.

Teorema de Fubini para calcular integrales dobles

Suponga que deseamos calcular el volumen que existe bajo el plano $z = 4 - x - y$ sobre la región rectangular R: $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$, en el plano xy. Si aplicamos el método de dividir en trozos que se explicó en la sección 6.1, con rebanadas perpendiculares al eje x (figura 15.4), entonces, el volumen será

$$\int_{x=0}^{x=2} A(x)\, dx, \tag{1}$$

donde $A(x)$ es el área de la sección transversal en x. Para cada valor de x, calculamos $A(x)$ mediante la integral

$$A(x) = \int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y)\, dy, \tag{2}$$

que es el área bajo la curva $z = 4 - x - y$ en el plano de la sección transversal en x. Al calcular $A(x)$, x se mantiene fija y se integra con respecto a y. Al combinar las ecuaciones (1) y (2), vemos que el volumen de todo el sólido es

$$\begin{aligned}\text{Volumen} &= \int_{x=0}^{x=2} A(x)\, dx = \int_{x=0}^{x=2} \left(\int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y)\, dy \right) dx \\ &= \int_{x=0}^{x=2} \left[4y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_{x=0}^{x=2} \left(\frac{7}{2} - x \right) dx \\ &= \left[\frac{7}{2}x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 5.\end{aligned}$$

Si sólo queremos escribir una fórmula para el volumen, sin resolver las integraciones, podemos escribir

$$\text{Volumen} = \int_0^2 \int_0^1 (4 - x - y)\, dy\, dx. \tag{3}$$

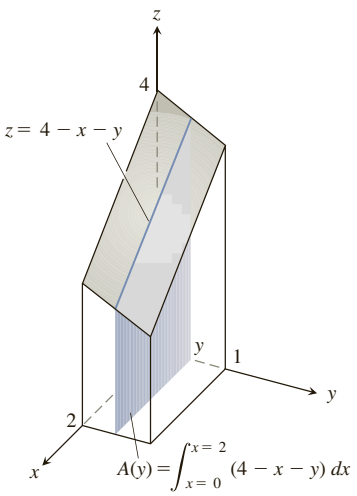


FIGURA 15.5 Para obtener el área de la sección transversal $A(x)$, mantenemos y fija e integramos con respecto a x.

La expresión de la derecha, llamada **integral iterada** o **repetida**, indica que el volumen se obtiene integrando $4 - x - y$ con respecto a y desde $y = 0$ hasta $y = 1$, mientras x se mantiene fija, y luego integrando la expresión resultante en x con respecto a x desde $x = 0$ hasta $x = 2$. Los límites de integración 0 y 1 se asocian con y, de manera que se colocan en la integral más cercana a dy. Los otros límites de integración, 0 y 2, se asocian con la variable x, de forma que se colocan en el símbolo de la integral exterior que está vinculada con dx.

¿Qué ocurriría si calculáramos el volumen rebanándolo en planos perpendiculares al eje y (figura 15.5)? Como una función de y, el área de la sección transversal típica es

$$A(y) = \int_{x=0}^{x=2} (4 - x - y)\, dx = \left[4x - \frac{x^2}{2} - xy\right]_{x=0}^{x=2} = 6 - 2y. \tag{4}$$

Por lo tanto, el volumen de todo sólido es

$$\text{Volumen} = \int_{y=0}^{y=1} A(y)\, dy = \int_{y=0}^{y=1} (6 - 2y)\, dy = \left[6y - y^2\right]_0^1 = 5,$$

lo que concuerda con nuestro cálculo anterior.

De nuevo, expresamos la fórmula del volumen como una integral iterada al escribir

$$\text{Volumen} = \int_0^1 \int_0^2 (4 - x - y)\, dx\, dy.$$

La expresión de la derecha indica que es posible obtener el volumen integrando $4 - x - y$ con respecto a x desde $x = 0$ hasta $x = 2$ como en la ecuación (4), e integrando el resultado con respecto a y desde $y = 0$ hasta $y = 1$. En esta integral iterada, el orden de integración es primero x y luego y, a la inversa del orden de la ecuación (3).

¿Qué tiene que ver el cálculo de estos volúmenes mediante integrales iteradas con la integral doble

$$\iint_R (4 - x - y)\, dA$$

sobre el rectángulo R: $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$? La respuesta es que ambas integrales iteradas dan el valor de la integral doble. Esto es lo que razonablemente esperaríamos, puesto que la integral doble mide el volumen de la misma región que las dos integrales iteradas. El teorema publicado en 1907 por Guido Fubini afirma que la integral doble de cualquier función continua sobre un rectángulo se calcula como una integral iterada en cualquier orden de integración. (Fubini demostró su teorema de manera más general, pero esto es lo que afirma en nuestro contexto).

TEOREMA 1 Teorema de Fubini (primera forma) Si $f(x, y)$ es continua en la región rectangular R: $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, entonces,

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx.$$

El teorema de Fubini indica que las integrales dobles sobre rectángulos se calculan mediante integrales iteradas. Por lo tanto, evaluamos una integral doble integrando con respecto a una variable a la vez, mediante el teorema fundamental del cálculo.

El teorema de Fubini también indica que la integral doble se calcula integrando en *cualquier* orden, a nuestra conveniencia. Cuando calculamos un volumen rebanando, usamos planos perpendiculares al eje x o planos perpendiculares al eje y.

EJEMPLO 1 Calcule $\iint_R f(x, y)\, dA$ para

$$f(x, y) = 100 - 6x^2y \qquad \text{y} \qquad R: \quad 0 \le x \le 2, \quad -1 \le y \le 1.$$

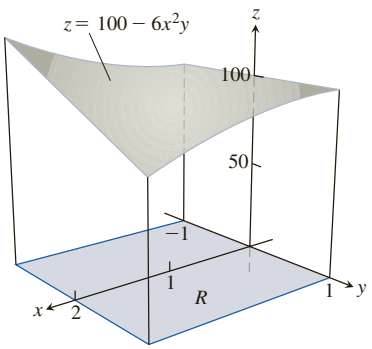


FIGURA 15.6 La integral doble $\iint_R f(x, y)\, dA$ nos da el volumen bajo esta superficie sobre la región rectangular R (ejemplo 1).

Solución La figura 15.6 muestra el volumen bajo la superficie. De acuerdo con el teorema de Fubini,

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2} (100 - 6x^2y)\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} \Big[100x - 2x^3y \Big]_{x=0}^{x=2} dy$$

$$= \int_{-1}^{1} (200 - 16y)\, dy = \Big[200y - 8y^2 \Big]_{-1}^{1} = 400.$$

Al invertir el orden de integración, se obtiene la misma respuesta:

$$\int_{0}^{2}\int_{-1}^{1} (100 - 6x^2y)\, dy\, dx = \int_{0}^{2} \Big[100y - 3x^2y^2 \Big]_{y=-1}^{y=1} dx$$

$$= \int_{0}^{2} \big[(100 - 3x^2) - (-100 - 3x^2) \big]\, dx$$

$$= \int_{0}^{2} 200\, dx = 400. \quad \blacksquare$$

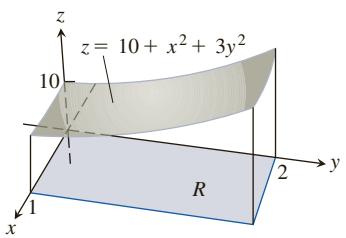


FIGURA 15.7 La integral doble $\iint_R f(x, y)\, dA$ nos da el volumen bajo esta superficie sobre la región rectangular R (ejemplo 2).

EJEMPLO 2 Determine el volumen de la región acotada arriba por el paraboloide elíptico $z = 10 + x^2 + 3y^2$ y abajo por el rectángulo R: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$.

Solución La superficie y el volumen se representan en la figura 15.7. El volumen está dado por la integral doble

$$V = \iint_R (10 + x^2 + 3y^2)\, dA = \int_{0}^{1}\int_{0}^{2} (10 + x^2 + 3y^2)\, dy\, dx$$

$$= \int_{0}^{1} \Big[10y + x^2y + y^3 \Big]_{y=0}^{y=2} dx$$

$$= \int_{0}^{1} (20 + 2x^2 + 8)\, dx = \Big[20x + \frac{2}{3}x^3 + 8x \Big]_{0}^{1} = \frac{86}{3}. \quad \blacksquare$$

Ejercicios 15.1

Evaluación de integrales iteradas

En los ejercicios 1 a 14, evalúe las integrales iteradas.

1. $\displaystyle\int_{1}^{2}\int_{0}^{4} 2xy\, dy\, dx$

2. $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{-1}^{1} (x - y)\, dy\, dx$

3. $\displaystyle\int_{-1}^{0}\int_{-1}^{1} (x + y + 1)\, dx\, dy$

4. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2}\right) dx\, dy$

5. $\displaystyle\int_{0}^{3}\int_{0}^{2} (4 - y^2)\, dy\, dx$

6. $\displaystyle\int_{0}^{3}\int_{-2}^{0} (x^2y - 2xy)\, dy\, dx$

7. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} \frac{y}{1 + xy}\, dx\, dy$

8. $\displaystyle\int_{1}^{4}\int_{0}^{4} \left(\frac{x}{2} + \sqrt{y}\right) dx\, dy$

9. $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2}\int_{1}^{\ln 5} e^{2x+y}\, dy\, dx$

10. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{1}^{2} xye^{x}\, dy\, dx$

11. $\displaystyle\int_{-1}^{2}\int_{0}^{\pi/2} y \operatorname{sen} x\, dx\, dy$

12. $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi}\int_{0}^{\pi} (\operatorname{sen} x + \cos y)\, dx\, dy$

13. $\displaystyle\int_{1}^{4}\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{xy}\, dx\, dy$

14. $\displaystyle\int_{-1}^{2}\int_{1}^{2} x \ln y\, dy\, dx$

Evaluación de integrales dobles sobre rectángulos

En los ejercicios 15 a 22, evalúe la integral doble sobre la región R dada.

15. $\displaystyle\iint_R (6y^2 - 2x)\, dA$, R: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$

16. $\displaystyle\iint_R \left(\frac{\sqrt{x}}{y^2}\right) dA$, R: $0 \le x \le 4$, $1 \le y \le 2$

17. $\displaystyle\iint_R xy \cos y\, dA$, R: $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le \pi$

18. $\displaystyle\iint_R y \operatorname{sen}(x + y)\, dA$, R: $-\pi \le x \le 0$, $0 \le y \le \pi$

19. $\iint_R e^{x-y}\,dA, \quad R: \quad 0 \le x \le \ln 2, \quad 0 \le y \le \ln 2$

20. $\iint_R xye^{xy^2}\,dA, \quad R: \quad 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 1$

21. $\iint_R \frac{xy^3}{x^2+1}\,dA, \quad R: \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2$

22. $\iint_R \frac{y}{x^2y^2+1}\,dA, \quad R: \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1$

En los ejercicios 23 y 24, integre f sobre la región dada.

23. Cuadrado $f(x, y) = 1/(xy)$ sobre el cuadrado $1 \le x \le 2$, $1 \le y \le 2$.

24. Rectángulo $f(x, y) = y \cos xy$ sobre el rectángulo $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le 1$.

25. Determine el volumen de la región acotada arriba por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, y abajo por el cuadrado R: $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$.

26. Obtenga el volumen de la región acotada arriba por el paraboloide elíptico $z = 16 - x^2 - y^2$, y abajo por el cuadrado R: $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$.

27. Encuentre el volumen de la región acotada arriba por el plano $z = 2 - x - y$, y abajo por el cuadrado R: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

28. Obtenga el volumen de la región acotada arriba por el plano $z = y/2$ y abajo por el rectángulo R: $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 2$.

29. Determine el volumen de la región acotada arriba por la superficie $z = 2$ sen x cos y y abajo por el rectángulo R: $0 \le x \le \pi/2$, $0 \le y \le \pi/4$.

30. Encuentre el volumen de la región acotada arriba por la superficie $z = 4 - y^2$ y abajo por el rectángulo R: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$.

31. Determine un valor de la constante k tal que

$$\int_1^2 \int_0^3 kx^2y\,dx\,dy = 1.$$

32. Evalúe $\int_{-1}^{1} \int_0^{\pi/2} x \text{ sen } \sqrt{y}\,dy\,dx$.

33. Con base en el teorema de Fubini, evalúe

$$\int_0^2 \int_0^1 \frac{x}{1+xy}\,dx\,dy.$$

34. Con base en el teorema de Fubini, evalúe

$$\int_0^1 \int_0^3 xe^{xy}\,dx\,dy.$$

T **35.** Utilice un programa de aplicación para calcular las integrales

a) $\int_0^1 \int_0^2 \frac{y-x}{(x+y)^3}\,dx\,dy$

b) $\int_0^2 \int_0^1 \frac{y-x}{(x+y)^3}\,dy\,dx$

Explique por qué sus resultados no contradicen el teorema de Fubini.

36. Si $f(x, y)$ es continua sobre R: $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ y

$$F(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(u, v)\,dv\,du$$

en el interior de R, calcule las segundas derivadas parciales F_{xy} y F_{yx}.

15.2 Integrales dobles sobre regiones generales

En esta sección definiremos y evaluaremos integrales dobles sobre regiones acotadas en el plano, las cuales son más generales que los rectángulos. Estas integrales dobles también se evalúan como integrales iteradas, donde el mayor problema es la determinación de los límites de integración. Como la región de integración tiene límites diferentes a los segmentos de recta paralelos a los ejes de coordenadas, los límites de integración con frecuencia implican variables, no sólo constantes.

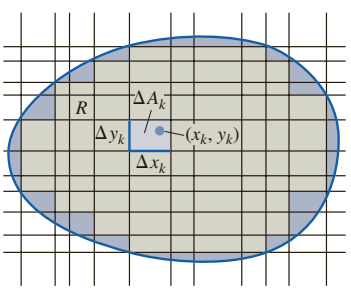


FIGURA 15.8 Una cuadrícula rectangular que divide una región acotada no rectangular en celdas rectangulares.

Integrales dobles en regiones acotadas no rectangulares

Para definir la integral doble de una función $f(x, y)$ sobre una región acotada no rectangular R, como la de la figura 15.8, comenzamos una vez más por colocar sobre R una rejilla de pequeñas celdas rectangulares, cuya unión contiene todos los puntos de R. Esta vez, sin embargo, puesto que su frontera es curva, no podemos llenar R exactamente con un número finito de rectángulos que se encuentren dentro de R, y algunos de los pequeños rectángulos de la cuadrícula estarán parcialmente fuera de R. Para formar una partición de R se consideran los rectángulos que están por completo dentro de R, sin tomar en cuenta aquellos que están parcial o totalmente afuera. En el caso de las regiones comunes, se cubre una porción cada vez mayor de R cuando la norma de la partición (el ancho y la altura máximos de cualquier rectángulo empleado) tiende a cero.

Una vez que tenemos la partición de R, numeramos los rectángulos en algún orden desde 1 hasta n, y haciendo que ΔA_k sea el área del k-ésimo rectángulo. Luego, elegimos un punto (x_k, y_k) en el k-ésimo rectángulo y formamos la suma de Riemann

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k.$$

Cuando la norma de la partición de S_n tiende a cero, $\|P\| \to 0$, el ancho y la altura de cada rectángulo encerrado tiende a cero y su número tiende a infinito. Si $f(x, y)$ es una función continua, entonces, estas sumas de Riemann tienden a un valor límite, que no depende de la selección realizada. Este límite se llama **integral doble** de $f(x, y)$ sobre R:

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k = \iint_R f(x, y)\,dA.$$

La naturaleza de la frontera de R introduce aspectos que no estaban presentes en las integrales sobre un intervalo. Cuando R tiene una frontera curva, los n rectángulos de una partición están dentro de R, pero no la cubren del todo. Para que una partición aproxime bien a R, las partes de R cubiertas por pequeños rectángulos que tienen una parte fuera de R deben ser despreciables cuando la norma de la partición tienda a cero. Esta propiedad de "cobertura casi total" por una partición de norma pequeña se satisface en todas las regiones que estudiaremos. No hay problema con las fronteras formadas por polígonos, circunferencias, elipses y gráficas continuas sobre un intervalo, unidas entre sí por los extremos. Una curva con forma "fractal" sería problemática, pero tales curvas rara vez se presentan en la mayoría de las aplicaciones. Un estudio detallado de los tipos de regiones R que se usan para el cálculo de integrales dobles se deja para textos más avanzados.

Volúmenes

Si $f(x, y)$ es positiva y continua sobre R, se define el volumen de la región sólida entre R y la superficie $z = f(x, y)$ como $\iint_R f(x, y)\,dA$, igual que antes (figura 15.9).

Si R es una región como la que se muestra en el plano xy de la figura 15.10, acotada "arriba" y "abajo" por las curvas $y = g_2(x)$ y $y = g_1(x)$, y a los lados por las rectas $x = a$, $x = b$, de nuevo calculamos el volumen por el método de las rebanadas. Primero calculamos el área de la sección transversal

$$A(x) = \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x, y)\,dy$$

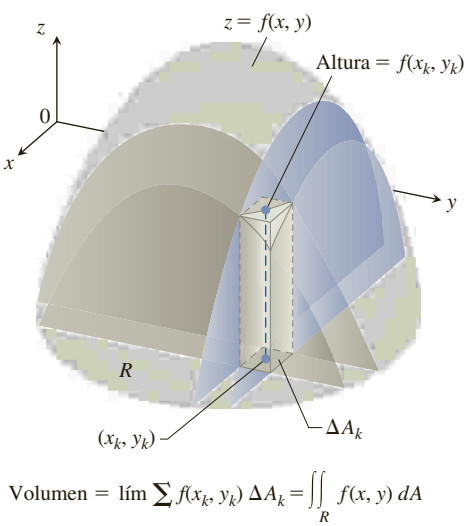


FIGURA 15.9 Se define el volumen de sólidos con bases curvas de la misma forma como se define el límite de aproximación de cajas rectangulares.

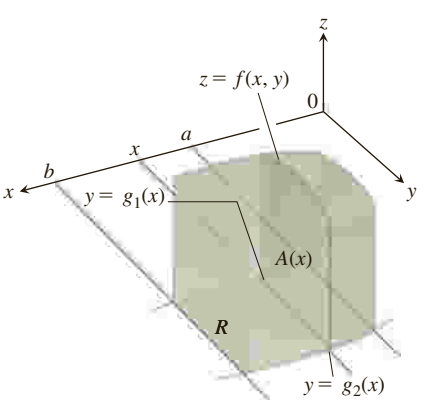


FIGURA 15.10 El área de la rebanada vertical que aquí se muestra es $A(x)$. Para calcular el volumen del sólido, integramos esta área desde $x = a$ hasta $x = b$:

$$\int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\,dy\,dx.$$

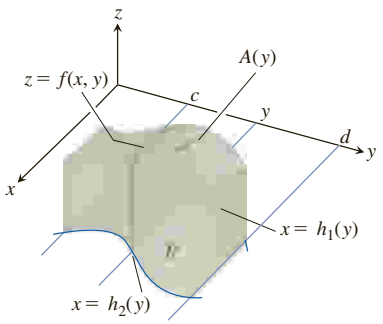


FIGURA 15.11 El volumen del sólido que aquí se muestra es

$$\int_c^d A(y)\,dy = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Para un sólido dado, el teorema 2 indica que el volumen se calcula como en la figura 15.10 o del modo que aquí se muestra. Ambos cálculos tienen el mismo resultado.

y luego integramos $A(x)$ a partir de $x = a$ hasta $x = b$ para obtener el volumen como una integral iterada:

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\,dy\,dx. \tag{1}$$

De manera similar, si R es una región como la que se ilustra en la figura 15.11, acotada por las curvas $x = h_2(y)$ y $x = h_1(y)$ y las rectas $y = c$ y $y = d$, entonces, el volumen calculado por rebanadas está dado por la integral iterada

$$\text{Volumen} = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\,dx\,dy. \tag{2}$$

El hecho de que las integrales iteradas de las ecuaciones (1) y (2) den el volumen que definimos como la integral doble de f sobre R es una consecuencia de la forma más fuerte del teorema de Fubini.

TEOREMA 2 Teorema de Fubini (forma más fuerte) Sea $f(x, y)$ continua en una región R.

1. Si R está definida por $a \le x \le b$, y $g_1(x) \le y \le g_2(x)$, con g_1 y g_2 continuas en $[a, b]$, entonces,
$$\iint_R f(x, y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\,dy\,dx.$$
2. Si R está definida por $c \le y \le d$, y $h_1(y) \le x \le h_2(y)$, con h_1 y h_2 continuas en $[c, d]$, entonces,
$$\iint_R f(x, y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\,dx\,dy.$$

EJEMPLO 1 Determine el volumen del prisma cuya base es el triángulo en el plano xy acotado por el eje x y las rectas $y = x$ y $x = 1$, y cuya parte superior se encuentra en el plano

$$z = f(x, y) = 3 - x - y.$$

Solución Observe la figura 15.12. Para cualquier x entre 0 y 1, y puede variar desde $y = 0$ hasta $y = x$ (figura 15.12*b*). Por lo tanto,

$$V = \int_0^1 \int_0^x (3 - x - y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[3y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(3x - \frac{3x^2}{2}\right) dx = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{2}\right]_{x=0}^{x=1} = 1.$$

Cuando se invierte el orden de integración (figura 15.12*c*), la integral del volumen es

$$V = \int_0^1 \int_y^1 (3 - x - y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[3x - \frac{x^2}{2} - xy\right]_{x=y}^{x=1} dy$$

$$= \int_0^1 \left(3 - \frac{1}{2} - y - 3y + \frac{y^2}{2} + y^2\right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{5}{2} - 4y + \frac{3}{2}y^2\right) dy = \left[\frac{5}{2}y - 2y^2 + \frac{y^3}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = 1.$$

Las dos integrales son iguales, como debe ser. ■

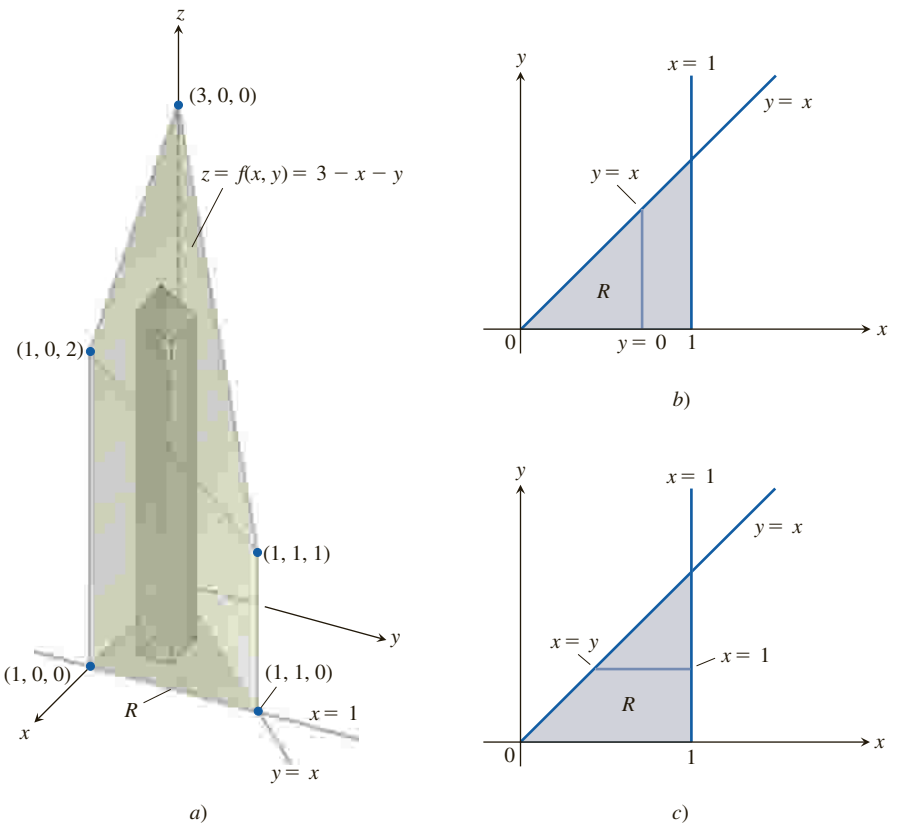


FIGURA 15.12 *a*) Prisma con una base triangular en el plano xy. El volumen de este prisma se define como una integral doble sobre R. Para evaluarla como una integral iterada, integramos primero con respecto a y y luego con respecto a x, o bien, en el orden inverso (ejemplo 1). *b*) Límites de integración de

$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} f(x, y)\, dy\, dx.$$

Si integramos primero con respecto a y, integramos a lo largo de una recta vertical que pasa por R y, luego, integramos de izquierda a derecha para incluir todas las rectas verticales en R. *c*) Límites de integración de

$$\int_{y=0}^{y=1} \int_{x=y}^{x=1} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Si integramos primero con respecto a x, integramos a lo largo de una recta horizontal que pasa por R y, luego, integramos de abajo hacia arriba para incluir todas las rectas horizontales en R.

Si bien el teorema de Fubini nos garantiza que una integral doble se calcula como una integral iterada en cualquier orden, tal vez sea más fácil calcular el valor de una de las integrales que de la otra. El siguiente ejemplo ilustra cómo esto puede suceder.

EJEMPLO 2 Calcule

$$\iint_R \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dA,$$

donde R es el triángulo en el plano xy acotado por el eje x, la recta $y = x$ y la recta $x = 1$.

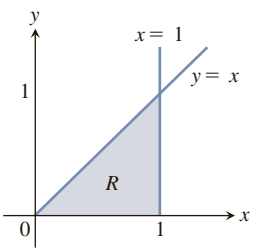


FIGURA 15.13 La región de integración del ejemplo 2.

Solución La región de integración se aprecia en la figura 15.13. Si primero integramos con respecto a y y luego con respecto a x, tenemos

$$\int_0^1 \left(\int_0^x \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(y \frac{\operatorname{sen} x}{x} \Big]_{y=0}^{y=x} \right) dx = \int_0^1 \operatorname{sen} x\, dx$$

$$= -\cos(1) + 1 \approx 0.46.$$

Si invertimos el orden de integración e intentamos calcular

$$\int_0^1 \int_y^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx\, dy,$$

se genera un problema porque $\int ((\operatorname{sen} x)/x)\, dx$ no se puede expresar en términos de funciones elementales (no existe una antiderivada sencilla).

En circunstancias como ésta, no hay una regla general para predecir el orden de integración más adecuado. Si el orden elegido no funciona, intente el otro. Algunas veces ninguno funciona, y entonces necesitamos usar aproximaciones numéricas. ■

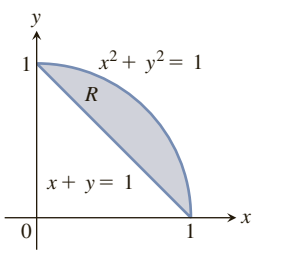
Determinación de los límites de integración

Ahora veremos un procedimiento para determinar los límites de integración que se aplica para muchas regiones en el plano. En las regiones más complicadas, para las cuales no funciona este procedimiento, conviene dividirlas en partes para que el procedimiento funcione.

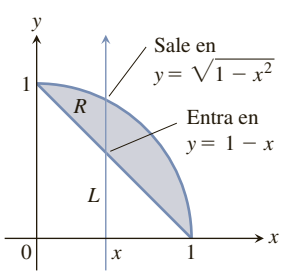
Uso de secciones transversales verticales Cuando tenga que evaluar $\iint_R f(x, y)\, dA$, integrando primero con respecto a y y luego con respecto a x, realice los siguientes pasos:

1. *Elabore un bosquejo*. Trace la región de integración y marque cada curva que determina la frontera (figura 15.14*a*).
2. *Determine los límites de integración en y*. Imagine una recta vertical L que atraviese R en la dirección creciente de y. Identifique los valores de y donde L entra y sale. Éstos son los límites de integración en y y, por lo general, son funciones de x (en vez de constantes) (figura 15.14*b*).
3. *Determine los límites de integración en x*. Elija los límites de x que incluyan todas las rectas verticales que atraviesen R. La integral que se muestra aquí es (vea la figura 15.14*c*)

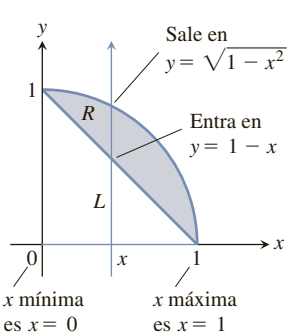
$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\, dy\, dx.$$



a)



b)



c)

FIGURA 15.14 Determinación de los límites de integración cuando se integra primero con respecto a y y luego con respecto a x.

Uso de secciones transversales horizontales Para evaluar la misma integral doble como una integral iterada con el orden de integración inverso, usamos rectas horizontales en vez de verticales en los pasos 2 y 3 (vea la figura 15.15). La integral es

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, dx\, dy.$$

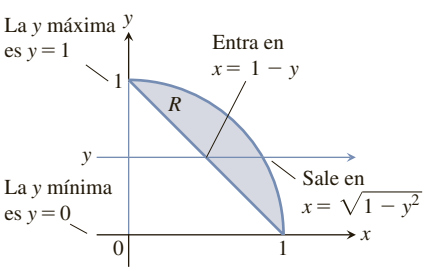


FIGURA 15.15 Determinación de los límites de integración cuando se integra primero con respecto a x y luego con respecto a y.

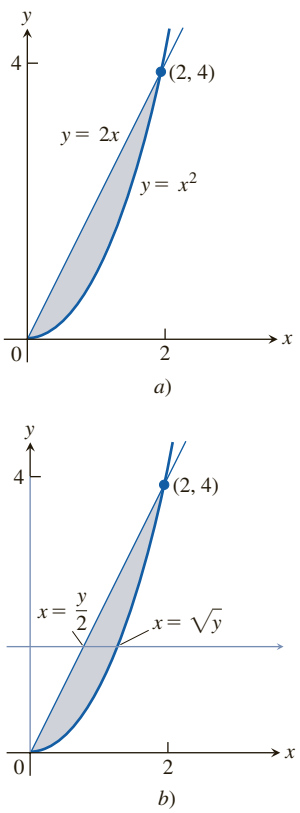


FIGURA 15.16 Región de integración para el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Trace la región de integración para la integral

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x + 2)\, dy\, dx$$

y escriba una integral equivalente con el orden de integración inverso.

Solución La región de integración está dada por las desigualdades $x^2 \le y \le 2x$ y $0 \le x \le 2$. Por lo tanto, es la región acotada por las curvas $y = x^2$ y $y = 2x$ entre $x = 0$ y $x = 2$ (figura 15.16*a*).

Para obtener los límites de integración en orden inverso, imaginamos una recta horizontal que pase de izquierda a derecha por la región. Entra en $x = y/2$ y sale en $x = \sqrt{y}$. Para incluir todas estas rectas, hacemos que y varíe de $y = 0$ a $y = 4$ (figura 15.16*b*). La integral es

$$\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (4x + 2)\, dx\, dy.$$

El valor común de estas integrales es 8. ■

Propiedades de las integrales dobles

Al igual que las integrales simples, las integrales dobles de funciones continuas tienen propiedades algebraicas que resultan útiles en cálculos y aplicaciones.

Si $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son continuas en la región acotada R, entonces, tienen las siguientes propiedades.

1. *Múltiplo constante:* $\iint_R cf(x, y)\, dA = c \iint_R f(x, y)\, dA$ (cualquier número c)

2. *Suma y diferencia:*

$$\iint_R (f(x, y) \pm g(x, y))\, dA = \iint_R f(x, y)\, dA \pm \iint_R g(x, y)\, dA$$

3. *Dominación:*

a) $\iint_R f(x, y)\, dA \ge 0$ si $f(x, y) \ge 0$ en R

b) $\iint_R f(x, y)\, dA \ge \iint_R g(x, y)\, dA$ si $f(x, y) \ge g(x, y)$ en R

4. *Aditividad:* $\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_{R_1} f(x, y)\, dA + \iint_{R_2} f(x, y)\, dA$

si R es la unión de dos regiones R_1 y R_2 que no se traslapan.

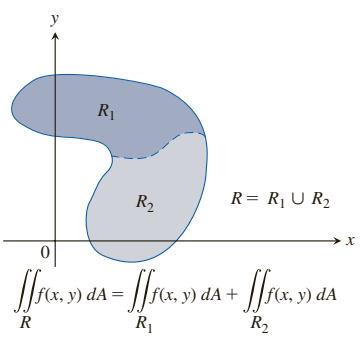


FIGURA 15.17 La propiedad de aditividad para regiones rectangulares se aplica también a regiones acotadas por curvas suaves.

La propiedad 4 supone que la región de integración R se descompone en regiones R_1 y R_2 que no se traslapan, con fronteras consistentes en un número finito de segmentos de recta o curvas suaves. La figura 15.17 ilustra un ejemplo de esta propiedad.

La idea detrás de estas propiedades es que las integrales se comportan como sumas. Si la función $f(x, y)$ se sustituye por su múltiplo constante $cf(x, y)$, entonces, una suma de Riemann para f

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k$$

se sustituye por una suma de Riemann para cf

$$\sum_{k=1}^{n} cf(x_k, y_k)\,\Delta A_k = c\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k = cS_n.$$

Al considerar los límites cuando $n \to \infty$, se sabe que $c \lim_{n\to\infty} S_n = c\iint_R f\,dA$ y $\lim_{n\to\infty} cS_n = \iint_R cf\,dA$ son iguales. Esto implica que la propiedad del múltiplo constante se traslada de las sumas a las integrales dobles.

Las demás propiedades también son fáciles de verificar para las sumas de Riemann, y son válidas para las integrales dobles por la misma razón. Aunque esta discusión da una idea, una demostración de la validez de estas propiedades requiere un análisis más detallado sobre la convergencia de las sumas de Riemann.

EJEMPLO 4 Determine el volumen de la cuña sólida que se encuentra bajo la superficie $z = 16 - x^2 - y^2$ y arriba de la región R acotada por la curva $y = 2\sqrt{x}$, la recta $y = 4x - 2$ y el eje x.

Solución La figura 15.18*a*) muestra la superficie y la "cuña" sólida cuyo volumen queremos calcular. En la figura 15.18*b*) se observa la región de integración en el plano xy. Si integramos en el orden $dy\,dx$ (primero con respecto a y y luego con respecto a x), se requerirán dos integraciones porque y varía de $y = 0$ a $y = 2\sqrt{x}$ para $0 \le x \le 0.5$, y luego varía de $y = 4x - 2$ a $y = 2\sqrt{x}$ para $0.5 \le x \le 1$. Entonces elegimos integrar en el orden $dx\,dy$, lo cual requiere sólo una integral doble, cuyos límites de integración están indicados en la figura 15.18*b*). Luego, el volumen se calcula como la integral iterada:

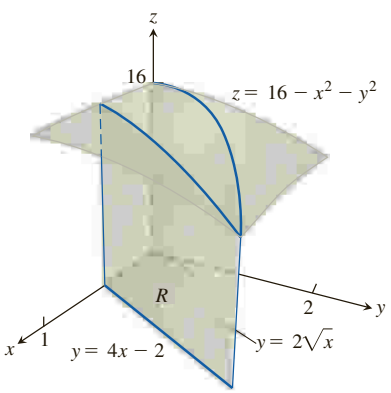
$$\iint_R (16 - x^2 - y^2)\,dA$$

$$= \int_0^2 \int_{y^2/4}^{(y+2)/4} (16 - x^2 - y^2)\,dx\,dy$$

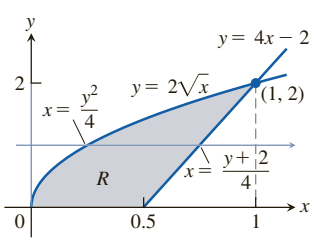
$$= \int_0^2 \left[16x - \frac{x^3}{3} - xy^2\right]_{x=y^2/4}^{x=(y+2)/4} dx$$

$$= \int_0^2 \left[4(y+2) - \frac{(y+2)^3}{3\cdot 64} - \frac{(y+2)y^2}{4} - 4y^2 + \frac{y^6}{3\cdot 64} + \frac{y^4}{4}\right] dy$$

$$= \left[\frac{191y}{24} + \frac{63y^2}{32} - \frac{145y^3}{96} - \frac{49y^4}{768} + \frac{y^5}{20} + \frac{y^7}{1344}\right]_0^2 = \frac{20803}{1680} \approx 12.4. \quad \blacksquare$$



a)



b)

FIGURA 15.18 *a*) La región sólida "como cuña", cuyo volumen se obtuvo en el ejemplo 4. *b*) La región de integración R que muestra el orden $dx\,dy$.

Nuestro desarrollo de la integral doble se ha enfocado en su representación del volumen de la región sólida entre R y la superficie $z = f(x, y)$ de una función continua positiva. De igual manera que sucedió con el área con signo en el caso de las integrales solas, cuando $f(x_k, y_k)$ es negativa, entonces, el producto $f(x_k, y_k)\Delta A_k$ es el negativo del volumen de la caja rectangular que se muestra en la figura 15.9, la cual se utilizó para formar la aproximación de la suma de Riemann. Por lo tanto, para una función continua arbitraria f definida sobre R, el límite de cualquier suma de Riemann representa el volumen con *signo* (no el volumen total) de la región sólida entre R y la superficie. La integral doble tiene también otras interpretaciones, y en la siguiente sección veremos cómo se utiliza para calcular el área de una región general en el plano.

Ejercicios 15.2

Determinación de regiones de integración

En los ejercicios 1 a 8, trace las regiones de integración descritas.

1. $0 \le x \le 3, \quad 0 \le y \le 2x$

2. $-1 \le x \le 2, \quad x - 1 \le y \le x^2$

3. $-2 \le y \le 2, \quad y^2 \le x \le 4$

4. $0 \le y \le 1, \quad y \le x \le 2y$

5. $0 \le x \le 1, \quad e^x \le y \le e$

6. $1 \le x \le e^2, \quad 0 \le y \le \ln x$

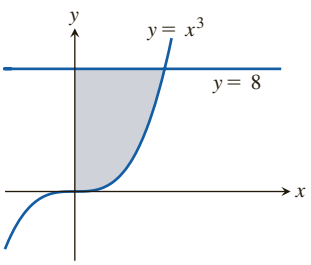
7. $0 \le y \le 1, \quad 0 \le x \le \operatorname{sen}^{-1} y$

8. $0 \le y \le 8, \quad \frac{1}{4}y \le x \le y^{1/3}$

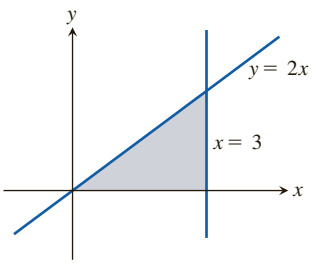
Obtención de los límites de integración

En los ejercicios 9 a 18, escriba la integral iterada para $\iint_R dA$ sobre la región descrita empleando ***a)*** secciones transversales verticales y ***b)*** secciones transversales horizontales.

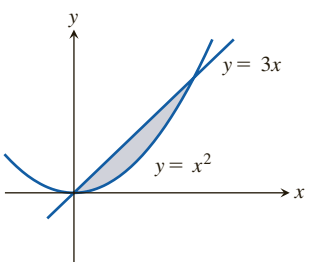
9.



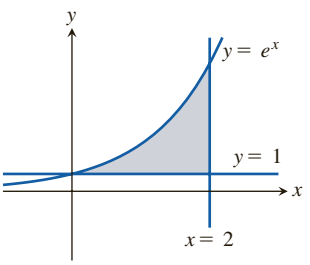
10.



11.



12.



13. Acotada por $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ y $x = 9$

14. Acotada por $y = \tan x$, $x = 0$ y $y = 1$

15. Acotada por $y = e^{-x}$, $y = 1$ y $x = \ln 3$

16. Acotada por $y = 0$, $x = 0$, $y = 1$ y $y = \ln x$

17. Acotada por $y = 3 - 2x$, $y = x$ y $x = 0$

18. Acotada por $y = x^2$ y $y = x + 2$

Determinación de regiones de integración e integrales dobles

En los ejercicios 19 a 24, trace la región de integración y evalúe la integral.

19. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{x} x \operatorname{sen} y \, dy \, dx$

20. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\operatorname{sen} x} y \, dy \, dx$

21. $\displaystyle\int_1^{\ln 8}\int_0^{\ln y} e^{x+y} \, dx \, dy$

22. $\displaystyle\int_1^{2}\int_y^{y^2} dx \, dy$

23. $\displaystyle\int_0^{1}\int_0^{y^2} 3y^3 e^{xy} \, dx \, dy$

24. $\displaystyle\int_1^{4}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{3}{2} e^{y/\sqrt{x}} \, dy \, dx$

En los ejercicios 25 a 28, integre f sobre la región dada.

25. Cuadrilátero $f(x, y) = x/y$ sobre la región del primer cuadrante acotada por las rectas $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$ y $x = 2$.

26. Triángulo $f(x, y) = x^2 + y^2$ sobre la región triangular con vértices en (0, 0), (1, 0) y (0, 1).

27. Triángulo $f(x, v) = v - \sqrt{u}$ sobre la región triangular cortada en el primer cuadrante del plano uv por la recta $u + v = 1$.

28. Región curvada $f(s, t) = e^s \ln t$ sobre la región del primer cuadrante del plano st que está arriba de la curva $s = \ln t$ desde $t = 1$ hasta $t = 2$.

En cada uno de los ejercicios 29 a 32 se presenta una integral sobre una región en un plano con coordenadas cartesianas. Trace la región y evalúe la integral.

29. $\displaystyle\int_{-2}^{0}\int_{v}^{-v} 2 \, dp \, dv$ (el plano pv)

30. $\displaystyle\int_0^{1}\int_0^{\sqrt{1-s^2}} 8t \, dt \, ds$ (el plano st)

31. $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\int_0^{\sec t} 3\cos t \, du \, dt$ (el plano tu)

32. $\displaystyle\int_0^{3/2}\int_1^{4-2u} \frac{4 - 2u}{v^2} \, dv \, du$ (el plano uv)

Inversión en el orden de integración

En los ejercicios 33 a 46, trace la región de integración y escriba una integral doble equivalente, con el orden de integración inverso.

33. $\displaystyle\int_0^{1}\int_2^{4-2x} dy \, dx$

34. $\displaystyle\int_0^{2}\int_{y-2}^{0} dx \, dy$

35. $\displaystyle\int_0^{1}\int_y^{\sqrt{y}} dx \, dy$

36. $\displaystyle\int_0^{1}\int_{1-x}^{1-x^2} dy \, dx$

37. $\displaystyle\int_0^{1}\int_1^{e^x} dy \, dx$

38. $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\int_{e^y}^{2} dx \, dy$

39. $\displaystyle\int_0^{3/2}\int_0^{9-4x^2} 16x \, dy \, dx$

40. $\displaystyle\int_0^{2}\int_0^{4-y^2} y \, dx \, dy$

41. $\displaystyle\int_0^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 3y \, dx \, dy$

42. $\displaystyle\int_0^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 6x \, dy \, dx$

43. $\displaystyle\int_1^{e}\int_0^{\ln x} xy \, dy \, dx$

44. $\displaystyle\int_0^{\pi/6}\int_{\operatorname{sen} x}^{1} 2xy^2 \, dy \, dx$

45. $\displaystyle\int_0^{3}\int_1^{e^y} (x + y) \, dx \, dy$

46. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{\tan^{-1} y} \sqrt{xy} \, dx \, dy$

En los ejercicios 47 a 56, trace la región de integración, invierta el orden de integración y evalúe la integral.

47. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_x^{\pi}\frac{\operatorname{sen} y}{y}\,dy\,dx$

48. $\displaystyle\int_0^{2}\int_x^{2}2y^2\operatorname{sen} xy\,dy\,dx$

49. $\displaystyle\int_0^{1}\int_y^{1}x^2e^{xy}\,dx\,dy$

50. $\displaystyle\int_0^{2}\int_0^{4-x^2}\frac{xe^{2y}}{4-y}\,dy\,dx$

51. $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{\ln 3}}\int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}}e^{x^2}\,dx\,dy$

52. $\displaystyle\int_0^{3}\int_{\sqrt{x/3}}^{1}e^{y^3}\,dy\,dx$

53. $\displaystyle\int_0^{1/16}\int_{y^{1/4}}^{1/2}\cos\left(16\pi x^5\right)\,dx\,dy$

54. $\displaystyle\int_0^{8}\int_{\sqrt[3]{x}}^{2}\frac{dy\,dx}{y^4+1}$

55. Región cuadrada $\iint_R(y-2x^2)\,dA$ donde R es la región acotada por el cuadrado $|x|+|y|=1$.

56. Región triangular $\iint_R xy\,dA$ donde R es la región acotada por las rectas $y=x$, $y=2x$ y $x+y=2$.

Volumen debajo de una superficie $z = f(x, y)$

57. Determine el volumen de la región acotada arriba por el paraboloide $z=x^2+y^2$ y abajo por el triángulo encerrado por las rectas $y=x$, $x=0$ y $x+y=2$ en el plano xy.

58. Determine el volumen del sólido acotado arriba por el cilindro $z=x^2$ y abajo por la región encerrada por la parábola $y=2-x^2$ y la recta $y=x$ en el plano xy.

59. Obtenga el volumen del sólido cuya base es la región del plano xy acotada por la parábola $y=4-x^2$ y la recta $y=3x$, mientras que la parte superior del sólido está acotada por el plano $z=x+4$.

60. Determine el volumen del sólido en el primer octante acotado por los planos coordenados, el cilindro $x^2+y^2=4$ y el plano $z+y=3$.

61. Determine el volumen del sólido en el primer octante acotado por los planos coordenados, el plano $x=3$ y el cilindro parabólico $z=4-y^2$.

62. Calcule el volumen del sólido cortado en el primer octante por la superficie $z=4-x^2-y$.

63. Calcule el volumen de la cuña cortada en el primer octante por el cilindro $z=12-3y^2$ y el plano $x+y=2$.

64. Calcule el volumen del sólido cortado de la columna cuadrada $|x|+|y|\le 1$ por los planos $z=0$ y $3x+z=3$.

65. Determine el volumen del sólido acotado adelante y atrás por los planos $x=2$ y $x=1$, a los lados por los cilindros $y=\pm 1/x$, y arriba y abajo por los planos $z=x+1$ y $z=0$.

66. Determine el volumen del sólido acotado adelante y atrás por los planos $x=\pm\pi/3$, a los lados de los cilindros $y=\pm\sec x$, arriba por el cilindro $z=1+y^2$, y abajo por el plano xy.

En los ejercicios 67 y 68, trace la región de integración y el sólido cuyo volumen está dado por la integral doble.

67. $\displaystyle\int_0^{3}\int_0^{2-2x/3}\left(1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y\right)\,dy\,dx$

68. $\displaystyle\int_0^{4}\int_{-\sqrt{16-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}}\sqrt{25-x^2-y^2}\,dx\,dy$

Integrales sobre regiones no acotadas

Las integrales dobles impropias a menudo se calculan de manera similar a las integrales impropias de una variable. La primera iteración de las siguientes integrales impropias se realiza como si fueran integrales propias. Luego, se evalúa una integral impropia de una sola variable tomando los límites adecuados, como en la sección 8.8. Evalúe las integrales impropias de los ejercicios 69 a 72 como integrales iteradas.

69. $\displaystyle\int_1^{\infty}\int_{e^{-x}}^{1}\frac{1}{x^3y}\,dy\,dx$

70. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-1/\sqrt{1-x^2}}^{1/\sqrt{1-x^2}}(2y+1)\,dy\,dx$

71. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}\,dx\,dy$

72. $\displaystyle\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}xe^{-(x+2y)}\,dx\,dy$

Aproximación de integrales con sumas finitas

En los ejercicios 73 y 74, aproxime la integral doble de $f(x, y)$ sobre la región R dividida por las rectas verticales $x=a$ y las rectas horizontales $y=c$. En cada subrectángulo, use (x_k, y_k) como se indica en su aproximación.

$$\iint_R f(x,y)\,dA \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta A_k$$

73. $f(x, y)=x+y$ sobre la región R acotada arriba por la semicircunferencia $y=\sqrt{1-x^2}$ y abajo por el eje x, usando la partición $x=-1, -1/2, 0, 1/4, 1/2, 1$ y $y=0, 1/2, 1$ con (x_k, y_k) como la esquina inferior izquierda en el k-ésimo subrectángulo (siempre que el subrectángulo se encuentre dentro de R).

74. $f(x, y)=x+2y$ sobre la región R dentro de la circunferencia $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ usando la partición $x=1, 3/2, 2, 5/2, 3$ y $y=2, 5/2, 3, 7/2, 4$ con (x_k, y_k) como el centro (centroide) en el k-ésimo subrectángulo (siempre que el subrectángulo se encuentre dentro de R).

Teoría y ejemplos

75. Sector circular Integre $f(x, y)=\sqrt{4-x^2}$ sobre el pequeño sector cortado del disco $x^2+y^2\le 4$ por los rayos $\theta=\pi/6$ y $\theta=\pi/2$.

76. Región no acotada Integre $f(x, y)=1/[(x^2-x)(y-1)^{2/3}]$ sobre el rectángulo infinito $2\le x<\infty$, $0\le y\le 2$.

77. Cilindro no circular Un cilindro sólido recto (no circular) tiene su base R sobre el plano xy y está acotado arriba por el paraboloide $z=x^2+y^2$. El volumen del cilindro es

$$V=\int_0^{1}\int_0^{y}(x^2+y^2)\,dx\,dy+\int_1^{2}\int_0^{2-y}(x^2+y^2)\,dx\,dy.$$

Grafique la región base R y exprese el volumen del cilindro como una integral iterada simple con el orden de integración invertido. Luego, evalúe la integral para determinar el volumen.

78. Conversión a una integral doble Evalúe la integral

$$\int_0^2 (\tan^{-1} \pi x - \tan^{-1} x)\, dx.$$

(*Sugerencia:* Escriba el integrando como una integral).

79. Maximizar una integral doble ¿Qué región R en el plano xy maximiza el valor de

$$\iint_R (4 - x^2 - 2y^2)\, dA?$$

Justifique su respuesta.

80. Minimizar una integral doble ¿Qué región R en el plano xy minimiza el valor de

$$\iint_R (x^2 + y^2 - 9)\, dA?$$

Justifique su respuesta.

81. ¿Es posible evaluar la integral de una función continua $f(x, y)$ sobre una región rectangular en el plano xy y obtener respuestas diferentes dependiendo del orden de integración? Justifique su respuesta.

82. ¿Cómo evaluaría la integral doble de una función continua $f(x, y)$ sobre la región R en el plano xy encerrada por el triángulo con vértices (0, 1), (2, 0) y (1, 2)? Justifique su respuesta.

83. Región no acotada Demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b}\int_{-b}^{b} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy$$
$$= 4\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx\right)^2.$$

84. Integral doble impropia Evalúe la integral impropia

$$\int_0^1 \int_0^3 \frac{x^2}{(y-1)^{2/3}} dy\, dx.$$

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

Use el evaluador de integrales de un software matemático para calcular los valores de las integrales de los ejercicios 85 a 88.

85. $\displaystyle\int_1^3 \int_1^x \frac{1}{xy}\, dy\, dx$

86. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 e^{-(x^2+y^2)}\, dy\, dx$

87. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \tan^{-1} xy\, dy\, dx$

88. $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3\sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dy\, dx$

Use el evaluador de integrales de un software matemático para calcular los valores de las integrales de los ejercicios 89 a 94. Luego, invierta el orden de integración y evalúe otra vez.

89. $\displaystyle\int_0^1 \int_{2y}^4 e^{x^2}\, dx\, dy$

90. $\displaystyle\int_0^3 \int_{x^2}^9 x \cos(y^2)\, dy\, dx$

91. $\displaystyle\int_0^2 \int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} (x^2y - xy^2)\, dx\, dy$

92. $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{4-y^2} e^{xy}\, dx\, dy$

93. $\displaystyle\int_1^2 \int_0^{x^2} \frac{1}{x+y}\, dy\, dx$

94. $\displaystyle\int_1^2 \int_{y^3}^8 \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$

15.3 Áreas por integración doble

En esta sección explicaremos cómo usar las integrales dobles para calcular el área de regiones acotadas en el plano y para determinar el valor promedio de una función de dos variables.

Área de regiones acotadas en el plano

Si consideramos la función $f(x, y) = 1$ en la definición de la integral doble sobre una región R de la sección precedente, las sumas de Riemann se reducen a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\, \Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k. \tag{1}$$

Esto es simplemente la suma de las áreas de los pequeños rectángulos de la partición de R, y aproxima lo que llamaríamos el área de R. Cuando la norma de una partición de R tiende a cero, la altura y el ancho de todos los rectángulos de la partición tienden a cero y la cobertura de R es cada vez más fina (figura 15.8). Definimos el área de R como el límite

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \iint_R dA. \tag{2}$$

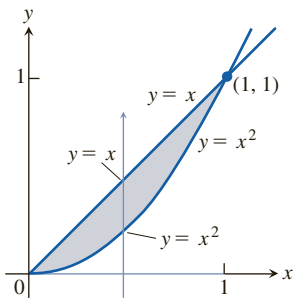


FIGURA 15.19 La región del ejemplo 1.

DEFINICIÓN El **área** de una región plana cerrada y acotada R es

$$A = \iint_R dA.$$

Como sucede con las demás definiciones de este capítulo, ésta se aplica a una mayor variedad de regiones que la definición anterior de área con una variable, pero coincide con ella en regiones en las cuales ambas se aplican. Para evaluar la integral en la definición de área, integramos la función constante $f(x, y) = 1$ sobre R.

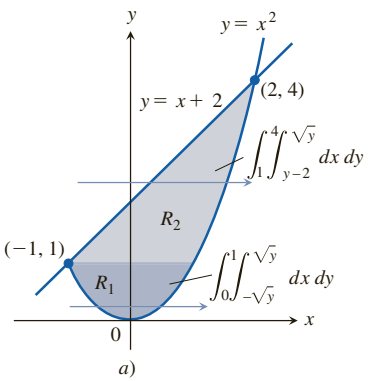
EJEMPLO 1 Calcule el área de la región R acotada por $y = x$ y $y = x^2$ en el primer cuadrante.

Solución Trazamos la región (figura 15.19), tomando en cuenta las intersecciones de las curvas en el origen y en (1, 1), y calculamos el área como

$$A = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} dy\, dx = \int_0^1 \Big[y \Big]_{x^2}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 (x - x^2)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Observe que la integral simple $\int_0^1 (x - x^2)\, dx$, obtenida al evaluar la integral iterada interior, es la integral del área entre estas dos curvas utilizando el método de la sección 5.6. ■



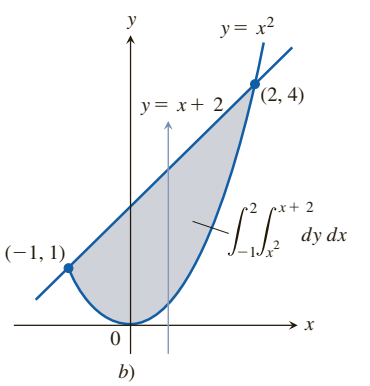


FIGURA 15.20 Esta área se calcula mediante *a*) dos integrales dobles si la primera integración se realiza con respecto a x, pero *b*) sólo con una si la primera integración se efectúa con respecto a y (ejemplo 2).

EJEMPLO 2 Calcule el área de la región R encerrada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x + 2$.

Solución Si dividimos R en las regiones R_1 y R_2, como se ilustra en la figura 15.20*a*), calculamos el área como

$$A = \iint_{R_1} dA + \iint_{R_2} dA = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\, dy + \int_1^4 \int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx\, dy.$$

Por otro lado, al invertir el orden de integración (figura 15.20*b*), tenemos

$$A = \int_{-1}^{2} \int_{x^2}^{x+2} dy\, dx.$$

Este segundo resultado, el cual requiere sólo una integral, es más sencillo y es el que más aplicamos en la práctica. El área es

$$A = \int_{-1}^{2} \Big[y \Big]_{x^2}^{x+2} dx = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}.$$

■

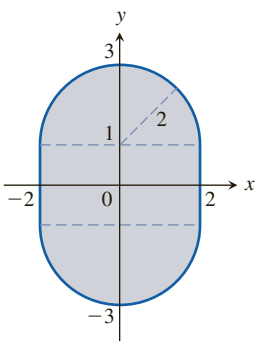


FIGURA 15.21 El campo de juego descrito por la región R en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Determine el área del campo de juego descrito por

$$R\colon -2 \le x \le 2,\ -1 - \sqrt{4 - x^2} \le y \le 1 + \sqrt{4 - x^2}$$ mediante

a) el teorema de Fubini. ***b)*** geometría simple.

Solución En la figura 15.21 se muestra la región R.

a) De las simetrías observadas en la figura, vemos que el área de R es 4 veces su área en el primer cuadrante. Con el teorema de Fubini, tenemos

$$A = \iint_R dA = 4\int_0^2 \int_0^{1+\sqrt{4-x^2}} dy\ dx$$

$$= 4\int_0^2 \left(1 + \sqrt{4 - x^2}\right) dx$$

$$= 4\left[x + \frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + \frac{4}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2$$ Fórmula 45 de la tabla de integrales

$$= 4\left(2 + 0 + 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 0\right) = 8 + 4\pi.$$

b) La región R consta de un rectángulo montado en dos lados por medios discos de radio 2. Es posible calcular el área sumando el área del rectángulo de 4×2 y el área del círculo de radio 2, de manera que

$$A = 8 + \pi 2^2 = 8 + 4\pi.$$ ■

Valor promedio

El valor promedio de una función integrable de una variable en un intervalo cerrado es la integral de la función en el intervalo, dividida entre la longitud del intervalo. Para una función integrable de dos variables, definida en una región acotada en el plano, el valor promedio es la integral sobre la región dividida entre el área de la región. Esto se visualiza al pensar que la función permite conocer la altura en un instante determinado del agua que se mueve en un tanque, cuyas paredes verticales se encuentran en la frontera de la región. La altura promedio del agua en el tanque se determina al dejar que el agua se asiente en una altura constante. Así, la altura es igual al volumen de agua en el tanque dividido entre el área de R. Ahora estamos listos para definir el valor promedio de una función integrable f sobre una región R como sigue:

$$\textbf{Valor promedio de } f \text{ sobre } R = \frac{1}{\text{área de } R}\iint_R f\,dA. \tag{3}$$

Si f es la temperatura de una placa delgada que cubre a R, entonces, la integral doble de f sobre R dividida entre el área de R es la temperatura promedio de la placa. Si $f(x, y)$ es la distancia del punto (x, y) a un punto fijo P, entonces, el valor promedio de f sobre R es la distancia promedio de los puntos de R a P.

EJEMPLO 4 Calcule el valor promedio de $f(x, y) = x \cos xy$ sobre el rectángulo R: $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le 1$.

Solución El valor de la integral de f sobre R es

$$\int_0^{\pi}\int_0^{1} x\cos xy\,dy\,dx = \int_0^{\pi}\Big[\operatorname{sen} xy\Big]_{y=0}^{y=1} dx \qquad \int x\cos xy\,dy = \operatorname{sen} xy + C$$

$$= \int_0^{\pi} (\operatorname{sen} x - 0)\,dx = -\cos x\Big]_0^{\pi} = 1 + 1 = 2.$$

El área de R es π. El valor promedio de f sobre R es $2/\pi$. ■

Ejercicios 15.3

Área mediante la integración doble

En los ejercicios 1 a 12, trace la región acotada por las rectas y las curvas dadas. Luego, exprese el área de la región como una integral doble iterada y evalúe la integral.

1. Los ejes de coordenadas y la recta $x + y = 2$.
2. Las rectas $x = 0$, $y = 2x$ y $y = 4$.
3. La parábola $x = -y^2$ y la recta $y = x + 2$.
4. La parábola $x = y - y^2$ y la recta $y = -x$.
5. La curva $y = e^x$ y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = \ln 2$.
6. Las curvas $y = \ln x$ y $y = 2 \ln x$ y la recta $x = e$, en el primer cuadrante.
7. Las parábolas $x = y^2$ y $x = 2y - y^2$.
8. Las parábolas $x = y^2 - 1$ y $x = 2y^2 - 2$.
9. Las rectas $y = x$, $y = x/3$ y $y = 2$.
10. Las rectas $y = 1 - x$, $y = 2$ y la curva $y = e^x$.
11. Las rectas $y = 2x$, $y = x/2$ y $y = 3 - x$.
12. Las rectas $y = x - 2$ y $y = -x$ y la curva $y = \sqrt{x}$.

Identificación de la región de integración

Las integrales y las sumas de integrales de los ejercicios 13 a 18 nos dan las áreas de regiones en el plano xy. Trace cada región, identifique cada curva de la frontera con su ecuación y obtenga las coordenadas de los puntos donde se intersecan las curvas; luego, calcule el área de la región

13. $\displaystyle\int_0^{6}\int_{y^2/3}^{2y} dx\,dy$

14. $\displaystyle\int_0^{3}\int_{-x}^{x(2-x)} dy\,dx$

15. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} dy\,dx$

16. $\displaystyle\int_{-1}^{2}\int_{y^2}^{y+2} dx\,dy$

17. $\displaystyle\int_{-1}^{0}\int_{-2x}^{1-x} dy\,dx + \int_0^{2}\int_{-x/2}^{1-x} dy\,dx$

18. $\displaystyle\int_0^{2}\int_{x^2-4}^{0} dy\,dx + \int_0^{4}\int_0^{\sqrt{x}} dy\,dx$

Determinación de valores promedio

19. Calcule el valor promedio de $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + y)$ sobre
    a) el rectángulo $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$.
    b) el rectángulo $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi/2$.
20. ¿Qué piensa que será mayor, el valor promedio de $f(x, y) = xy$ sobre el cuadrado $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, o el valor promedio de f sobre el cuarto de circunferencia $x^2 + y^2 \le 1$ en el primer cuadrante? Efectúe los cálculos para responder.
21. Encuentre la altura promedio del paraboloide $z = x^2 + y^2$ sobre el cuadrado $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$.
22. Determine el valor promedio de $f(x, y) = 1/(xy)$ sobre el cuadrado $\ln 2 \le x \le 2 \ln 2$, $\ln 2 \le y \le 2 \ln 2$.

Teoría y ejemplos

23. **Área geométrica** Encuentre el área de la región
$$R\colon\ 0 \le x \le 2,\ 2 - x \le y \le \sqrt{4 - x^2},$$
mediante ***a)*** el teorema de Fubini y ***b)*** geometría simple.
24. **Área geométrica** Encuentre el área de un anillo circular con radio exterior 2 y radio interior 1, mediante ***a)*** el teorema de Fubini, ***b)*** geometría simple.
25. **Población de bacterias** Si $f(x, y) = (10\,000e^y)/(1 + |x|/2)$ representa la "densidad de población" de cierta bacteria en el plano xy, donde x y y se miden en centímetros, calcule la población total de bacterias dentro del rectángulo $-5 \le x \le 5$, $-2 \le y \le 0$.
26. **Población de una región** Si $f(x, y) = 100(y + 1)$ representa la densidad de población de una región plana de la Tierra, donde x y y se miden en millas, determine el número de personas en la región acotada por las curvas $x = y^2$ y $x = 2y - y^2$.
27. **Temperatura promedio en Texas** De acuerdo con el *Almanaque de Texas*, ese estado tiene 254 condados y una estación del Servicio Meteorológico Nacional en cada uno. Suponga que en el tiempo t_0, cada una de las 254 estaciones registró la temperatura local. Determine una fórmula que nos dé una aproximación razonable de la temperatura promedio en Texas en el instante t_0. En su respuesta, incluya información que debería estar disponible en el *Almanaque de Texas*.
28. Si $y = f(x)$ es una función continua no negativa sobre el intervalo cerrado $a \le x \le b$, demuestre que la definición de la integral doble del área en la región plana cerrada, acotada por la gráfica de f, las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ y el eje x, concuerda con la definición del área debajo de la curva de la sección 5.3.
29. Suponga $f(x, y)$ es continua sobre una región R en el plano y que está definida el área de la región $A(R)$. Si hay constantes m y M tales que $m \le f(x, y) \le M$ para toda $(x, y) \in R$, demuestre que
$$mA(R) \le \iint_R f(x, y)\,dA \le MA(R).$$
30. Suponga que $f(x, y)$ es continua y no negativa sobre una región R en el plano con un área definida $A(R)$. Si $\iint_R f(x, y)\,dA = 0$, demuestre que $f(x, y) = 0$ en cada punto $(x, y) \in R$.

15.4 Integrales dobles en forma polar

Algunas veces, las integrales son más fáciles de evaluar si cambiamos a coordenadas polares. Esta sección describe cómo realizar la transformación y cómo evaluar integrales sobre regiones cuyas fronteras están dadas por ecuaciones polares.

Integrales en coordenadas polares

Cuando tuvimos que definir la integral doble de una función sobre una región R en el plano xy, comenzamos por dividir R en rectángulos cuyos lados fueran paralelos a los ejes de coordenadas. Usar estas formas era natural porque sus lados tenían valores constantes, ya sea de y o de x. En coordenadas polares, la forma natural es un "rectángulo polar", cuyos lados tienen valores constantes de r y θ. Para evitar ambigüedades cuando se describe la región de integración con coordenadas polares, usamos puntos en coordenadas polares (r, θ) donde $r \geq 0$.

Suponga que una función $f(r, \theta)$ está definida sobre una región R acotada por los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ y por las curvas continuas $r = g_1(\theta)$ y $r = g_2(\theta)$. Suponga también que $0 \leq g_1(\theta) \leq g_2(\theta) \leq a$ para cualquier valor de θ entre α y β. Entonces, R está dentro de una región con forma de abanico Q, definida por las desigualdades $0 \leq r \leq a$ y $\alpha \leq \theta \leq \beta$, donde $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$. Vea la figura 15.22.

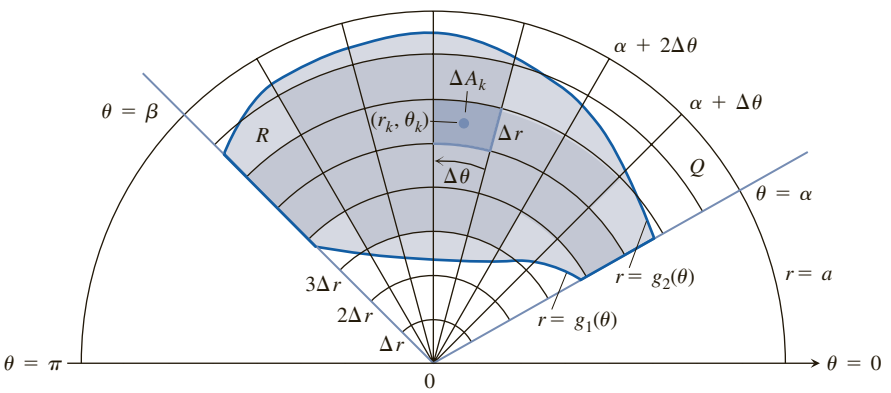


FIGURA 15.22 La región R: $g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, está contenida en la región con forma de abanico Q: $0 \leq r \leq a$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, donde $0 \leq \beta - a \leq 2\pi$. La partición de Q mediante arcos de circunferencia y rayos induce una partición de R.

Cubrimos Q con una rejilla de arcos y rayos. Los arcos se obtienen de circunferencias con centro en el origen, con radios Δr, $2\Delta r, \ldots,$ $m\Delta r$, donde $\Delta r = a/m$. Los rayos están dados por

$$\theta = \alpha, \qquad \theta = \alpha + \Delta\theta, \qquad \theta = \alpha + 2\Delta\theta, \qquad \ldots, \qquad \theta = \alpha + m'\Delta\theta = \beta,$$

donde $\Delta\theta = (\beta - \alpha)/m'$. Los arcos y rayos dividen a Q en pequeños parches llamados "rectángulos polares".

Numeramos los rectángulos polares que están dentro de R (sin importar el orden), llamando a sus áreas ΔA_1, $\Delta A_2, \ldots,$ ΔA_n. Sea (r_k, θ_k) cualquier punto en el rectángulo polar cuya área es ΔA_k. Luego, formamos la suma

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(r_k, \theta_k)\, \Delta A_k.$$

Si f es continua en R, esta suma tiende a un límite cuando refinamos la rejilla para hacer que Δr y $\Delta\theta$ tiendan a cero. El límite se conoce como la integral doble de f sobre R. En símbolos, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iint_R f(r, \theta)\, dA.$$

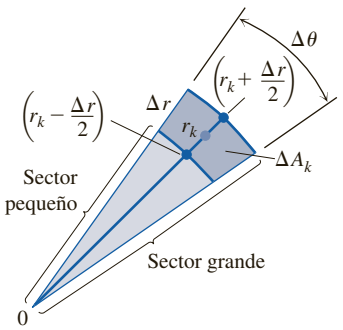


FIGURA 15.23 La observación de que

$$\Delta A_k = \begin{pmatrix}\text{área del}\\ \text{sector grande}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{área del}\\ \text{sector pequeño}\end{pmatrix}$$

nos conduce a la fórmula $\Delta A_k = r_k\,\Delta r \Delta\theta$.

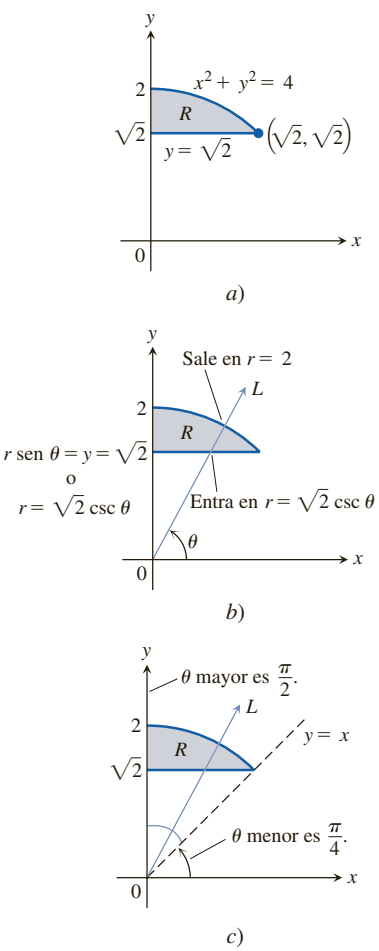


FIGURA 15.24 Determinación de los límites de integración en coordenadas polares.

Para evaluar este límite, primero tenemos que escribir la suma S_n de forma que exprese ΔA_k en términos de Δr y $\Delta\theta$. Por conveniencia, elegimos r_k como el promedio de los radios de los arcos interno y externo que acotan al k-ésimo rectángulo polar ΔA_k. Así, el radio del arco interno que acota a ΔA_k es $r_k - (\Delta r/2)$ (figura 15.23), y el radio del arco externo es $rk + (\Delta r/2)$.

El área de un sector en forma de cuña en un círculo que tiene radio r y ángulo θ es

$$A = \frac{1}{2}\theta \cdot r^2,$$

como se aprecia si se multiplica el área del círculo, πr^2, por $\theta/2\pi$, es decir, la fracción del área del círculo contenido en la cuña. De esta forma, las áreas de los sectores circulares subtendidos por estos arcos en el origen son

$$\text{Radio interior:}\quad \frac{1}{2}\left(r_k - \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta$$

$$\text{Radio exterior:}\quad \frac{1}{2}\left(r_k + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta.$$

Por lo tanto,

$$\Delta A_k = \text{área del sector grande} - \text{área del sector pequeño}$$
$$= \frac{\Delta\theta}{2}\left[\left(r_k + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 - \left(r_k - \frac{\Delta r}{2}\right)^2\right] = \frac{\Delta\theta}{2}(2r_k\,\Delta r) = r_k\,\Delta r\,\Delta\theta.$$

Al combinar este resultado con la suma que define a S_n, se obtiene

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(r_k, \theta_k)\, r_k\,\Delta r\,\Delta\theta.$$

Cuando $n \to \infty$ y los valores de Δr y $\Delta\theta$ tienden a cero, estas sumas convergen a la integral doble

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iint_R f(r, \theta)\, r\, dr\, d\theta.$$

Una versión del teorema de Fubini afirma que el límite aproximado por estas sumas puede evaluarse por integraciones sencillas repetidas con respecto a r y θ como

$$\iint_R f(r, \theta)\, dA = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta}\int_{r=g_1(\theta)}^{r=g_2(\theta)} f(r, \theta)\, r\, dr\, d\theta.$$

Determinación de los límites de integración

El procedimiento para calcular los límites de integración en coordenadas rectangulares funciona también para las coordenadas polares. Para evaluar $\iint_R f(r, \theta)\, dA$ sobre una región R en coordenadas polares integrando primero con respecto a r y luego con respecto a θ, se realizan los siguientes pasos.

1. *Elabore un bosquejo*. Elabore un bosquejo de la región y marque las curvas de la frontera (figura 15.24*a*).
2. *Determine los límites de integración en r*. Imagine un rayo L que parte del origen y que corta a R en la dirección creciente de r. Identifique los valores de r donde L entra y sale de R. Éstos son los límites de integración en r. Tales límites, por lo general, dependen del ángulo θ que forma L con el semieje positivo x (figura 15.24*b*).
3. *Determine los límites de integración en θ*. Obtenga los valores mínimo y máximo de θ que acotan a R. Éstos son los límites de integración en θ (figura 15.24*c*). La integral iterada polar es

$$\iint_R f(r, \theta)\, dA = \int_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2}\int_{r=\sqrt{2}\csc\theta}^{r=2} f(r, \theta)\, r\, dr\, d\theta.$$

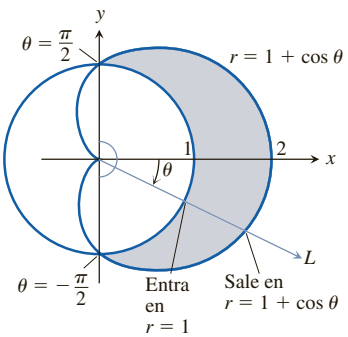


FIGURA 15.25 Determinación de los límites de integración en coordenadas polares para la región del ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Determine los límites de integración para integrar $f(r, \theta)$ sobre la región R que está dentro de la cardioide $r = 1 + \cos\theta$ y fuera de la circunferencia $r = 1$.

Solución

1. Primero trazamos la región y marcamos las curvas de la frontera (figura 15.25).
2. En seguida obtenemos los *límites de integración en r*. Un rayo típico que sale del origen entra a R cuando $r = 1$, y sale cuando $r = 1 + \cos\theta$.
3. Al final, encontramos los *límites de integración en* θ. Los rayos desde el origen que cortan a R varían de $\theta = -\pi/2$ a $\theta = \pi/2$. La integral es

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{1}^{1+\cos\theta} f(r, \theta)\, r\, dr\, d\theta. \quad \blacksquare$$

Si $f(r, \theta)$ es una función constante cuyo valor es 1, entonces, la integral de f sobre R es el área de R.

Área en coordenadas polares

El área de una región R cerrada y acotada en el plano de coordenadas polares es

$$A = \iint_R r\, dr\, d\theta.$$

Área diferencial en coordenadas polares

$$dA = r\, dr\, d\theta$$

Esta fórmula del área es congruente con todas las fórmulas anteriores; no obstante, no lo demostraremos.

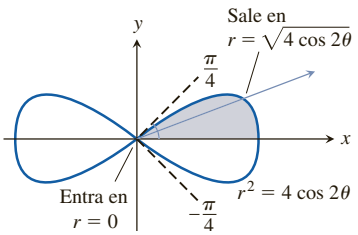


FIGURA 15.26 Para integrar sobre la región sombreada, variamos r de 0 a $\sqrt{4\cos 2\theta}$, y θ de 0 a $\pi/4$ (ejemplo 2).

EJEMPLO 2 Obtenga el área encerrada en la lemniscata $r^2 = 4\cos 2\theta$.

Solución Graficamos la lemniscata para determinar los límites de integración (figura 15.26) y vemos, a partir de la simetría de la región, que el área total es cuatro veces la porción del primer cuadrante.

$$A = 4\int_0^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{4\cos 2\theta}} r\, dr\, d\theta = 4\int_0^{\pi/4} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=\sqrt{4\cos 2\theta}} d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/4} 2\cos 2\theta\, d\theta = 4\,\text{sen}\, 2\theta \Big]_0^{\pi/4} = 4. \quad \blacksquare$$

Cambio de integrales cartesianas a integrales polares

El procedimiento para cambiar una integral cartesiana $\iint_R f(x, y)\, dx\, dy$ a una integral polar implica dos pasos. Primero, en la integral cartesiana se sustituye $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$, y se reemplaza $dx\, dy$ por $r\, dr\, d\theta$. Luego, obtenemos los límites polares de integración para la frontera de R. La integral cartesiana se convierte entonces en

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \iint_G f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta,$$

donde G representa la misma región de integración descrita ahora en coordenadas polares. Esto es como el método de sustitución del capítulo 5, excepto que ahora se sustituyen dos variables en vez de una. Observe que el área diferencial $dx\, dy$ no se sustituye por $dr\, d\theta$, sino por $r\, dr\, d\theta$. En la sección 15.8 estudiaremos de manera más general los cambios (o las sustituciones) de variables en integrales múltiples.

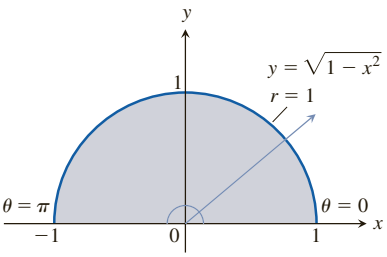


FIGURA 15.27 La región semicircular del ejemplo 3 es la región

$$0 \le r \le 1, \qquad 0 \le \theta \le \pi.$$

EJEMPLO 3 Evalúe

$$\iint_R e^{x^2+y^2}\, dy\, dx,$$

donde R es la región semicircular acotada por el eje x y la curva $y = \sqrt{1 - x^2}$ (figura 15.27).

Solución En coordenadas cartesianas, la integral en cuestión es una integral no elemental y no existe un modo directo para integrar $e^{x^2+y^2}$ con respecto a x o a y. Sin embargo, esta integral y otras similares son importantes en matemáticas (en estadística, por ejemplo), así que necesitamos encontrar una manera de evaluarlas. Las coordenadas polares nos ayudan en este caso. Al sustituir $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, y reemplazar $dy\,dx$ por $r\,dr\,d\theta$, estamos en condiciones de evaluar la integral de la siguiente manera:

$$\iint_R e^{x^2+y^2}\, dy\, dx = \int_0^{\pi}\int_0^1 e^{r^2} r\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi}\left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_0^1 d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\frac{1}{2}(e - 1)\, d\theta = \frac{\pi}{2}(e - 1).$$

La r en $r\,dr\,d\theta$ era justo lo que necesitábamos para integrar e^{r^2}. Sin esto, no hubiéramos podido obtener con facilidad la antiderivada para la primera integral iterada (la más interna). ■

EJEMPLO 4 Evalúe la integral

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)\, dy\, dx.$$

Solución La integración con respecto a y nos da

$$\int_0^1 \left(x^2\sqrt{1 - x^2} + \frac{(1 - x^2)^{3/2}}{3}\right) dx,$$

una integral difícil de evaluar sin tablas.

La situación mejora si cambiamos la integral original a coordenadas polares. La región de integración en coordenadas cartesianas está dada por las desigualdades $0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$ y $0 \le x \le 1$, lo que corresponde al interior de un cuarto de la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ en el primer cuadrante. (Observe el primer cuadrante de la figura 15.27). Al sustituir las coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $0 \le \theta \le \pi/2$ y $0 \le r \le 1$, y remplazar $dx\,dy$ por $r\,dr\,d\theta$ en la integral doble, obtenemos

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)\, dy\, dx = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 (r^2)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{4}\, d\theta = \frac{\pi}{8}.$$

¿Por qué la transformación a coordenadas polares es tan efectiva aquí? Una razón es que $x^2 + y^2$ se simplifica a r^2; otra es que los límites de integración se vuelven constantes. ■

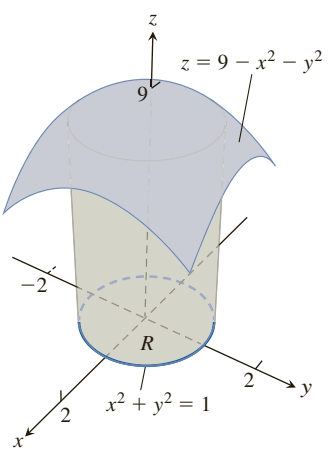


FIGURA 15.28 La región sólida del ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Determine el volumen de la región sólida limitada arriba por el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ y abajo por la circunferencia unitaria en el plano xy.

Solución La región de integración R es la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$, la cual se describe en coordenadas polares por $r = 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$. La región sólida se representa en la figura 15.28. El volumen está dado por la integral doble

$$\iint_R (9 - x^2 - y^2)\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (9 - r^2)\, r\, dr\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (9r - r^3)\, dr\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{9}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_{r=0}^{r=1} d\theta$$
$$= \frac{17}{4}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{17\pi}{2}.$$

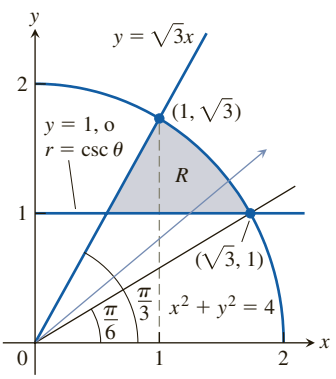


FIGURA 15.29 La región R en el ejemplo 6.

EJEMPLO 6 Usando integración polar, calcule el área de la región R en el plano xy encerrada en la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, arriba de la recta $y = 1$, y abajo de la recta $y = \sqrt{3}x$.

Solución En la figura 15.29 se presenta una gráfica de la región R. Observe primero que la recta $y = \sqrt{3}x$ tiene una pendiente $\sqrt{3} = \tan\theta$, de manera que $\theta = \pi/3$. En seguida, observe que la recta $y = 1$ interseca a la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ cuando $x^2 + 1 = 4$, o $x = \sqrt{3}$. Aún más, la recta radial desde el origen que pasa por el punto $(\sqrt{3}, 1)$ tiene una pendiente $1/\sqrt{3} = \tan\theta$ con un ángulo de inclinación $\theta = \pi/6$. Esta información se muestra en la figura 15.29.

Ahora, para la región R, cuando θ varía de $\pi/6$ a $\pi/3$, la coordenada polar r varía desde la recta horizontal $y = 1$ hasta la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. Al sustituir y por $r\,\text{sen}\,\theta$ en la ecuación de la recta horizontal, tenemos que $r\,\text{sen}\,\theta = 1$, o $r = \csc\theta$, la cual es la ecuación polar de la recta. La ecuación polar de la circunferencia es $r = 2$. De esta forma, en coordenadas polares, para $\pi/6 \le \theta \le \pi/3$, r varía de $r = \csc\theta$ a $r = 2$. Se deduce que la integral iterada del área nos da

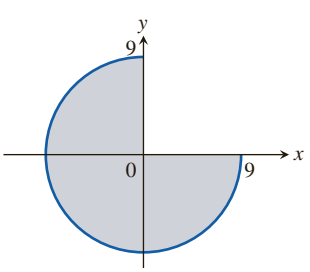
$$\iint_R dA = \int_{\pi/6}^{\pi/3}\int_{\csc\theta}^{2} r\, dr\, d\theta$$
$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_{r=\csc\theta}^{r=2} d\theta$$
$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{1}{2}[\,4 - \csc^2\theta\,]\, d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\,4\theta + \cot\theta\,\Big]_{\pi/6}^{\pi/3}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{6} + \sqrt{3}\right) = \frac{\pi - \sqrt{3}}{3}.$$

Ejercicios 15.4

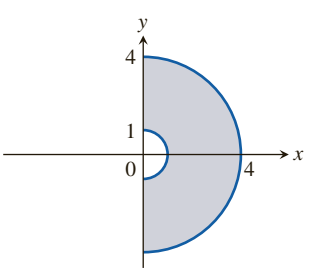
Regiones en coordenadas polares

En los ejercicios 1 a 8, describa, en coordenadas polares, la región dada

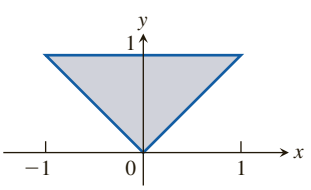
1.



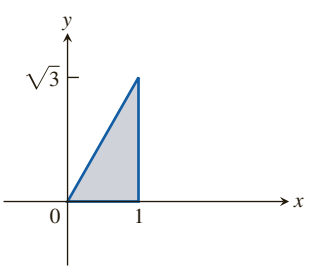
2.



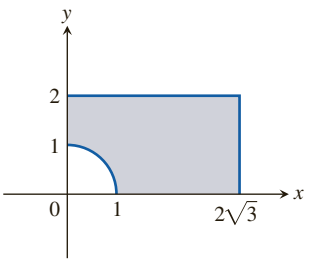
3.



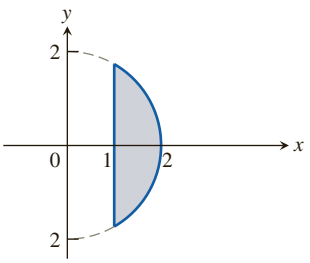
4.



5.



6.



7. La región encerrada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 2x$.

8. La región encerrada por la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 2y$, $y \geq 0$.

Evaluación de integrales polares

En los ejercicios 9 a 22, transforme la integral cartesiana en una integral polar equivalente. Luego, evalúe la integral polar,

9. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx$

10. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2)\,dx\,dy$

11. $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2)\,dx\,dy$

12. $\displaystyle\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\,dx$

13. $\displaystyle\int_{0}^{6}\int_{0}^{y} x\,dx\,dy$

14. $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{0}^{x} y\,dy\,dx$

15. $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{3}}\int_{1}^{x} dy\,dx$

16. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2}\int_{\sqrt{4-y^2}}^{y} dx\,dy$

17. $\displaystyle\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \frac{2}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}\,dy\,dx$

18. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1 + x^2 + y^2)^2}\,dy\,dx$

19. $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2}\int_{0}^{\sqrt{(\ln 2)^2-y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$

20. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2 + y^2 + 1)\,dx\,dy$

21. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{x}^{\sqrt{2-x^2}} (x + 2y)\,dy\,dx$

22. $\displaystyle\int_{1}^{2}\int_{0}^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}\,dy\,dx$

En los ejercicios 23 a 26, grafique la región de integración y transforme cada integral o suma de integrales a una integral o suma de integrales cartesianas. No evalúe las integrales.

23. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{1} r^3 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,dr\,d\theta$

24. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_{1}^{\csc\theta} r^2\cos\theta\,dr\,d\theta$

25. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4}\int_{0}^{2\sec\theta} r^5 \operatorname{sen}^2\theta\,dr\,d\theta$

26. $\displaystyle\int_{0}^{\tan^{-1}\frac{4}{3}}\int_{0}^{3\sec\theta} r^7\,dr\,d\theta + \int_{\tan^{-1}\frac{4}{3}}^{\pi/2}\int_{0}^{4\csc\theta} r^7\,dr\,d\theta$

Cálculo de áreas en coordenadas polares

27. Calcule el área de la región determinada en el primer cuadrante por la curva $r = 2(2 - \operatorname{sen} 2\theta)^{1/2}$.

28. Cardioide traslapada con una circunferencia Obtenga el área de la región que se encuentra dentro de la cardioide $r = 1 + \cos\theta$ y fuera de la circunferencia $r = 1$.

29. El pétalo de una rosa Obtenga el área encerrada en el pétalo de una rosa $r = 12\cos 3\theta$.

30. Concha de caracol Obtenga el área de la región encerrada por el eje positivo x y la espiral $r = 4\theta/3$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. La región parece una concha de caracol.

31. Cardioide en el primer cuadrante Encuentre el área de la región cortada en el primer cuadrante por la cardioide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$.

32. Cardioides traslapadas Obtenga el área de la región común a los interiores de las cardioides $r = 1 + \cos\theta$ y $r = 1 - \cos\theta$.

Valores promedio

En coordenadas polares, el **valor promedio** de una función sobre una región R (sección 15.3) está dado por

$$\frac{1}{\text{Área}(R)}\iint_R f(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

33. Altura promedio de un hemisferio Determine la altura promedio de la superficie hemisférica $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ arriba del disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ en el plano xy.

34. Altura promedio de un cono Encuentre la altura promedio del cono (sencillo) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ arriba del disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ en el plano xy.

35. Distancia promedio del interior de un disco al centro Obtenga la distancia promedio desde un punto $P(x, y)$ en el disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ hasta el origen.

36. Cuadrado de la distancia promedio de un punto en un disco a un punto en su frontera Obtenga el valor promedio del *cuadrado* de la distancia desde un punto $P(x, y)$ en el disco $x^2 + y^2 \leq 1$ hasta el punto frontera $A(1, 0)$.

Teoría y ejemplos

37. Transformación a una integral polar Integre $f(x, y) = [\ln(x^2 + y^2)]/\sqrt{x^2 + y^2}$ sobre la región $1 \leq x^2 + y^2 \leq e$.

38. Transformación a una integral polar Integre $f(x, y) = [\ln(x^2 + y^2)]/(x^2 + y^2)$ sobre la región $1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2$.

39. Volumen de un cilindro recto no circular La región que se encuentra dentro de la cardioide $r = 1 + \cos\theta$ y fuera de la circunferencia $r = 1$ es la base de un cilindro recto sólido. La parte superior del cilindro está en el plano $z = x$. Determine el volumen del cilindro.

40. Volumen de un cilindro recto no circular La región encerrada por la lemniscata $r^2 = 2\cos 2\theta$ es la base de un cilindro recto sólido, cuya parte superior está acotada por la esfera $z = \sqrt{2 - r^2}$. Obtenga el volumen del cilindro.

41. Transformación a integrales polares

a) La manera usual de evaluar la integral impropia $I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ es calcular primero su cuadrado

$$I^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy\right) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

Evalúe la última integral usando coordenadas polares y despeje I de la ecuación resultante.

b) Evalúe

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{erf}(x) = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\,dt.$$

42. Transformación a una integral polar Evalúe la integral

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2}\,dx\,dy.$$

43. Existencia Integre la función $f(x, y) = 1/(1 - x^2 - y^2)$ sobre el disco $x^2 + y^2 \le 3/4$. ¿Existe la integral de $f(x, y)$ sobre el disco $x^2 + y^2 \le 1$? Justifique su respuesta.

44. Fórmula del área en coordenadas polares Use la integral doble en coordenadas polares para deducir la fórmula

$$A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2\,d\theta$$

para el área de la región en forma de abanico entre el origen y la curva polar $r = f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$.

45. Distancia promedio a un punto dado dentro de un disco Sea P_0 un punto dentro de una circunferencia de radio a, y sea h la distancia desde P_0 hasta el centro de la circunferencia. Sea d la distancia desde un punto cualquiera P hasta P_0. Obtenga el valor promedio de d^2 sobre la región encerrada en la circunferencia. (*Sugerencia:* Simplifique su trabajo colocando el centro de la circunferencia en el origen y P_0 sobre el eje x).

46. Area Suponga que el área de una región en el plano con coordenadas polares es

$$A = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_{\csc\theta}^{2\operatorname{sen}\theta} r\,dr\,d\theta.$$

Dibuje la región y determine su área.

47. Evalúe la integral $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2}\,dA$, donde R es la región dentro de la semicircunferencia superior de radio 2 centrada en el origen, pero fuera de la circunferencia $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

48. Evalúe la integral $\iint_R (x^2 + y^2)^{-2}\,dA$, donde R es la región dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$ para $x \le -1$.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 49 a 52, emplee un software matemático para transformar las integrales cartesianas en integrales polares equivalentes y evalúe estas últimas. Ejecute los siguientes pasos en cada ejercicio.

a) Trace la región cartesiana de integración en el plano xy.

b) Cambie cada curva de la frontera de la región cartesiana del inciso *a)* por su representación polar, determinando r y θ a partir de la ecuación cartesiana.

c) Use los resultados del inciso *b)* para trazar la región polar de integración en el plano $r\theta$.

d) Cambie el integrando de coordenadas cartesianas a polares. Determine los límites de integración a partir de su gráfica del inciso *c)* y evalúe la integral polar usando la herramienta de integración del software matemático.

49. $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 \frac{y}{x^2 + y^2}\,dy\,dx$ **50.** $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x/2} \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy\,dx$

51. $\displaystyle\int_0^1 \int_{-y/3}^{y/3} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dx\,dy$ **52.** $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{2-y} \sqrt{x + y}\,dx\,dy$

15.5 Integrales triples en coordenadas rectangulares

Así como las integrales dobles nos permiten tratar con situaciones más generales que las integrales simples, las integrales triples nos permiten resolver problemas aún más generales. Usamos las integrales triples para calcular los volúmenes de formas tridimensionales y el valor promedio de una función sobre una región tridimensional. Las integrales triples también se aplican en el estudio de campos vectoriales y el flujo de fluidos en tres dimensiones, como veremos en el capítulo 16.

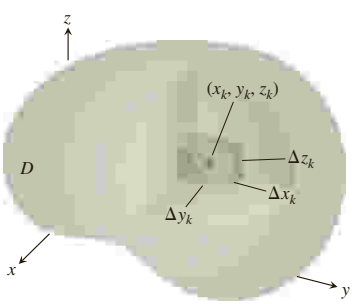


FIGURA 15.30 Partición de un sólido con celdas rectangulares de volumen ΔV_k.

Integrales triples

Si $F(x, y, z)$ es una función definida en una región cerrada D y acotada en el espacio, como la región ocupada por una bola sólida o un montón de arcilla, entonces, la integral de F sobre D se define de la siguiente manera. Dividimos una región en forma de caja rectangular que contiene a D, en celdas rectangulares mediante planos paralelos a los ejes de coordenadas (figura 15.30). Numeramos las celdas que están completamente dentro de D desde 1 hasta n en algún orden, donde la k-ésima celda tiene las dimensiones Δx_k por Δy_k por Δz_k, y un volumen $\Delta V_k = \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$. Seleccionamos un punto (x_k, y_k, z_k) en cada celda y formamos la suma

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} F(x_k, y_k, z_k)\,\Delta V_k. \tag{1}$$

Estamos interesados en lo que sucede cuando D se divide en celdas cada vez más pequeñas, de manera que Δx_k, Δy_k, Δz_k y la norma de la partición $\|P\|$, el valor máximo entre Δx_k, Δy_k, Δz_k, tienden a cero. Cuando se obtiene un único valor límite, sin importar la forma de elegir las particiones y los puntos (x_k, y_k, z_k), decimos que F es **integrable** sobre D. Como antes, se demuestra que cuando F es continua y la superficie que acota la región D está formada por un número finito de superficies suaves unidas a lo largo de un número finito de curvas suaves, entonces, F es integrable. Cuando $\|P\| \to 0$ y el número de celdas n tiende a ∞, las sumas S_n tienden a un límite. Llamamos a este límite la **integral triple de F sobre D** y lo representamos como

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iiint_D F(x, y, z)\, dV \qquad \text{o} \qquad \lim_{\|P\|\to 0} S_n = \iiint_D F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Las regiones D sobre las que las funciones continuas son integrables son aquéllas que tienen fronteras "razonablemente suaves".

Volumen de una región en el espacio

Si F es una función constante cuyo valor es 1, entonces, las sumas de la ecuación (1) se reducen a

$$S_n = \sum F(x_k, y_k, z_k)\, \Delta V_k = \sum 1 \cdot \Delta V_k = \sum \Delta V_k.$$

Cuando Δx_k, Δy_k y Δz_k tienden a cero, las celdas ΔV_k se hacen cada vez más pequeñas y más numerosas, y cubren una parte cada vez mayor de D. Por lo tanto, definimos el volumen de la región D como la integral triple

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \iiint_D dV.$$

DEFINICIÓN El **volumen** de una región cerrada D y acotada en el espacio es

$$V = \iiint_D dV.$$

Esta definición concuerda con nuestras definiciones anteriores de volumen; no obstante, omitiremos la verificación de este hecho. Como veremos en un momento, esta integral nos facilita el cálculo de volúmenes de sólidos encerrados por superficies curvas. Éstos son sólidos más generales que los que hemos encontrado hasta el momento (capítulo 6 y sección 15.2).

Cálculo de límites de integración en el orden *dz dy dx*

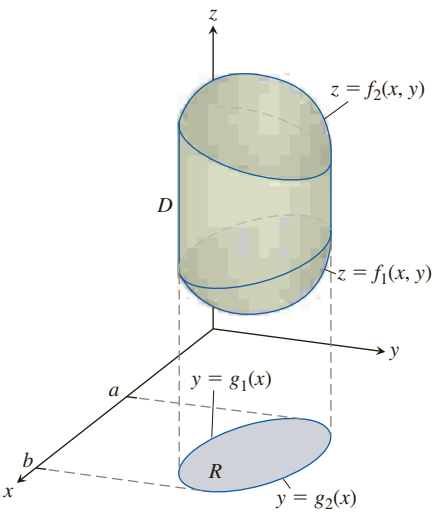
Cuando deseamos evaluar una integral triple, aplicamos una versión tridimensional del teorema de Fubini (sección 15.2) para obtenerla por medio de tres iteraciones simples. Al igual que ocurre con las integrales dobles, existe un procedimiento geométrico para calcular los límites de integración de estas integrales simples.

Para evaluar

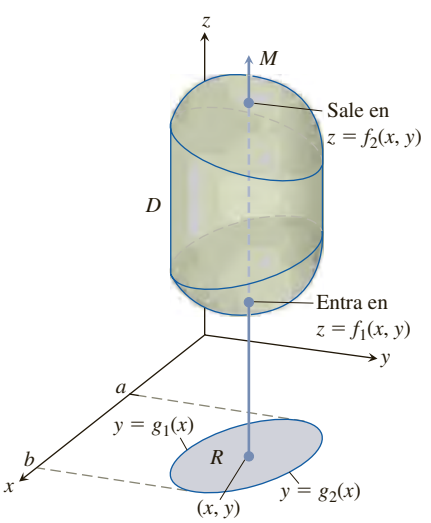
$$\iiint_D F(x, y, z)\, dV$$

sobre una región D, integramos primero con respecto a z, luego con respecto a y, y al final con respecto a x. (Se podría elegir un orden diferente de integración, pero el procedimiento es similar, como se ilustra en el ejemplo 2).

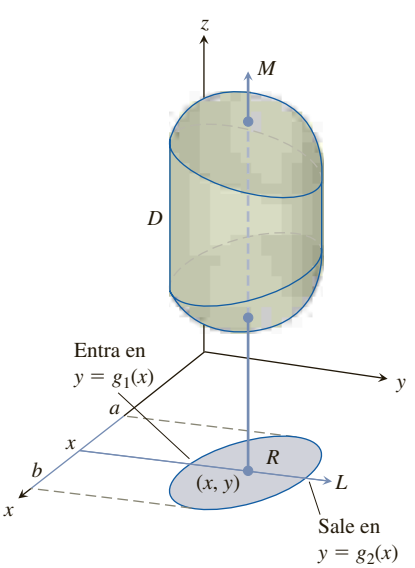
1. *Elabore un dibujo*. Trace la región D junto con su "sombra" R (proyección vertical) sobre el plano xy. Marque las superficies de las fronteras superior e inferior de la región D y las curvas de las fronteras superior e inferior de R.



2. *Determine los límites de integración en z.* Trace una recta M, paralela al eje z, que pase por un punto típico (x, y) en R. Cuando z crece, M entra a D en $z = f_1(x, y)$ y sale en $z = f_2(x, y)$. Éstos son los límites de integración en z.



3. *Determine los límites de integración en y.* Dibuje una recta L paralela al eje y que pase por (x, y). Cuando y crece, L entra a R en $y = g_1(x)$ y sale en $y = g_2(x)$. Éstos son los límites de integración en y.



4. *Determine los límites de integración en x.* Seleccione los límites en x que incluyan todas las rectas paralelas al eje y que pasen por R ($x = a$ y $x = b$ en la figura anterior). Éstos son los límites de integración en x. La integral es

$$\int_{x=a}^{x=b} \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} \int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} F(x, y, z)\, dz\, dy\, dx.$$

Siga procedimientos similares si modifica el orden de integración. La "sombra" de la región D se encuentra en el plano de las dos últimas variables con respecto a las que se realiza la integración iterada.

El procedimiento anterior se aplica siempre que una región sólida D esté acotada arriba y abajo por una superficie, y cuando la "sombra" de la región R esté acotada por una curva superior y una inferior. No se aplica para regiones con orificios complicados que las atraviesan, si bien algunas veces estas regiones se subdividen en regiones más simples para las cuales sí se aplica el procedimiento.

EJEMPLO 1 Calcule el volumen de la región D encerrada entre las superficies $z = x^2 + 3y^2$ y $z = 8 - x^2 - y^2$.

Solución El volumen es

$$V = \iiint_D dz\, dy\, dx,$$

la integral de $F(x, y, z) = 1$ sobre D. Para obtener los límites de integración y evaluar la integral, primero graficamos la región. Las superficies (figura 15.31) se cortan en el cilindro elíptico $x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2$ o $x^2 + 2y^2 = 4$, $z > 0$. La frontera de la región R, la proyección de D sobre el plano xy, es una elipse con la misma ecuación: $x^2 + 2y^2 = 4$. La frontera "superior" de R es la curva $y = \sqrt{(4 - x^2)/2}$. La frontera inferior es la curva $y = -\sqrt{(4 - x^2)/2}$.

Ahora determinamos los límites de integración en z. La recta M, paralela al eje z, que pasa por un punto típico (x, y) en R, entra a D en $z = x^2 + 3y^2$ y sale en $z = 8 - x^2 - y^2$.

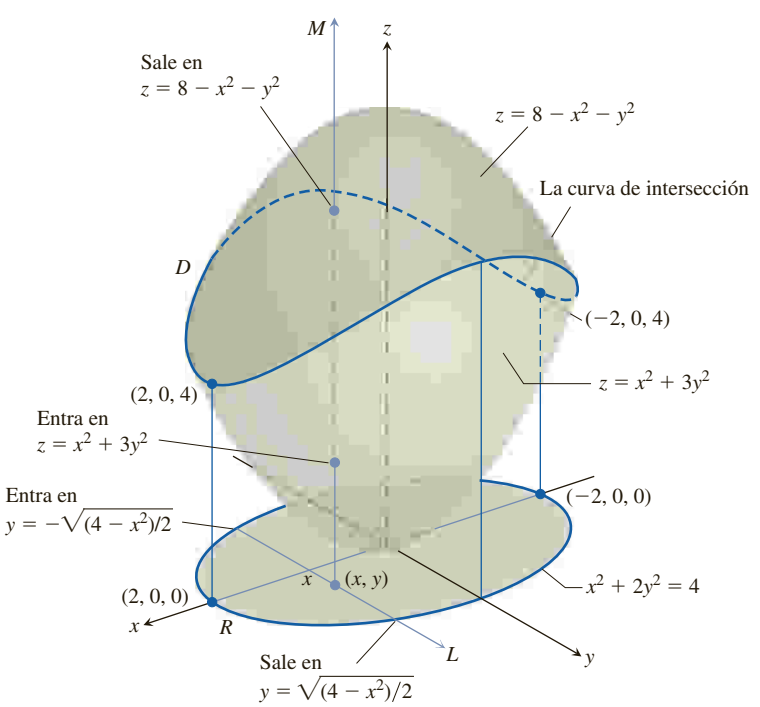


FIGURA 15.31 El volumen de la región encerrada por dos paraboloides, calculado en el ejemplo 1.

En seguida obtenemos los límites de integración en y. La recta L, paralela al eje y que pasa por (x, y), entra a R en $y = -\sqrt{(4 - x^2)}/2$ y sale en $y = \sqrt{(4 - x^2)}/2$.

Por último, hallamos los límites de integración en x. Cuando L barre R, el valor de x varía desde $x = -2$ en $(-2, 0, 0)$ hasta $x = 2$ en $(2, 0, 0)$. El volumen de la región D es

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_D dz\, dy\, dx \\
&= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\, dy\, dx \\
&= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} (8 - 2x^2 - 4y^2)\, dy\, dx \\
&= \int_{-2}^{2} \left[(8 - 2x^2)y - \frac{4}{3}y^3 \right]_{y=-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{y=\sqrt{(4-x^2)/2}} dx \\
&= \int_{-2}^{2} \left(2(8 - 2x^2)\sqrt{\frac{4 - x^2}{2}} - \frac{8}{3}\left(\frac{4 - x^2}{2}\right)^{3/2} \right) dx \\
&= \int_{-2}^{2} \left[8\left(\frac{4 - x^2}{2}\right)^{3/2} - \frac{8}{3}\left(\frac{4 - x^2}{2}\right)^{3/2} \right] dx = \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_{-2}^{2} (4 - x^2)^{3/2}\, dx \\
&= 8\pi\sqrt{2}. \qquad \text{Después de integrar sustituyendo } x = 2 \text{ sen } u
\end{aligned}$$

■

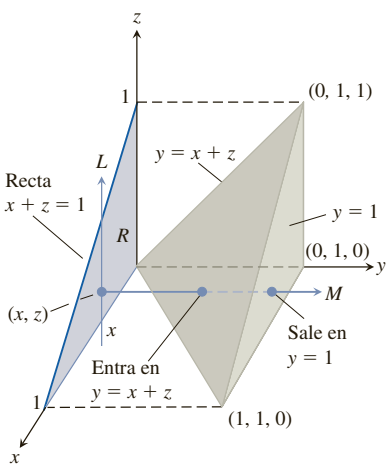


FIGURA 15.32 Determinación de los límites de integración para evaluar la integral triple de una función definida sobre el tetraedro D (ejemplos 2 y 3).

En el siguiente ejemplo proyectamos D sobre el plano xz, en vez de hacerlo sobre el plano xy, para mostrar cómo usar un orden distinto de integración.

EJEMPLO 2 Establezca los límites de integración para evaluar la integral triple de la función $F(x, y, z)$ sobre el tetraedro D con vértices en $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 1, 1)$. Aplique el orden de integración $dy\, dz\, dx$.

Solución Trazamos D junto con su "sombra" R en el plano xz (figura 15.32). La frontera superior (a la derecha) de D se encuentra en el plano $y = 1$. La frontera inferior (a la izquierda) se encuentra en el plano $y = x + z$. La frontera superior de R es la recta $z = 1 - x$, y la frontera inferior es la recta $z = 0$.

Primero obtenemos los límites de integración en y. La recta paralela al eje y que pasa por un punto típico (x, z) en R entra a D en $y = x + z$ y sale en $y = 1$.

Luego, obtenemos los límites de integración en z. La recta L paralela al eje z que pasa por (x, z) entra a R en $z = 0$ y sale en $z = 1 - x$.

Finalmente, encontramos los límites de integración en x. Cuando L barre R, el valor de x varía de $x = 0$ a $x = 1$. La integral es

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{x+z}^{1} F(x, y, z)\, dy\, dz\, dx.$$

■

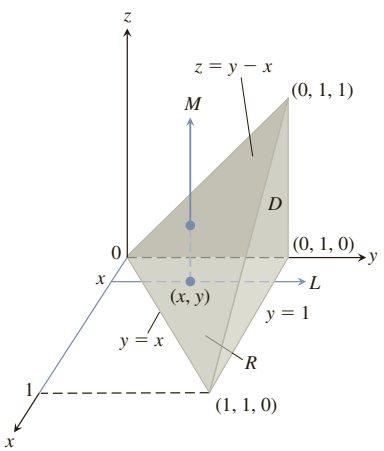


FIGURA 15.33 El tetraedro del ejemplo 3 muestra cómo se obtienen los límites de integración en el orden $dz\, dy\, dx$.

EJEMPLO 3 Integre $F(x, y, z) = 1$ sobre el tetraedro D del ejemplo 2 en el orden $dz\, dy\, dx$, y luego integre en el orden $dy\, dz\, dx$.

Solución Primero hallamos los límites de integración en z. Una recta M paralela al eje z que pasa por un punto típico (x, y) en la "sombra" del plano xy entra al tetraedro en $z = 0$ y sale por el plano superior donde $z = y - x$ (figura 15.33).

Después, obtenemos los límites de integración en y. En el plano xy, donde $z = 0$, el lado inclinado del tetraedro cruza el plano a lo largo de la recta $y = x$. Una recta L paralela al eje y que pasa por (x, y) entra a la sombra en el plano xy en $y = x$ y sale en $y = 1$ (figura 15.33).

Por último, determinamos los límites de integración en x. Cuando la recta L paralela al eje y del paso anterior barre la sombra, el valor de x varía de $x = 0$ a $x = 1$ en el punto $(1, 1, 0)$. (Vea la figura 15.33). La integral es

$$\int_0^1 \int_x^1 \int_0^{y-x} F(x, y, z)\, dz\, dy\, dx.$$

Por ejemplo, si $F(x, y, z) = 1$, encontraríamos que el volumen del tetraedro es

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_x^1 \int_0^{y-x} dz\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \int_x^1 (y - x)\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2 - xy\right]_{y=x}^{y=1} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}x^2\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Obtenemos el mismo resultado integrando en el orden $dy\, dz\, dx$. A partir del ejemplo 2,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{x+z}^1 dy\, dz\, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - z)\, dz\, dx \\ &= \int_0^1 \left[(1 - x)z - \frac{1}{2}z^2\right]_{z=0}^{z=1-x} dx \\ &= \int_0^1 \left[(1 - x)^2 - \frac{1}{2}(1 - x)^2\right] dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 (1 - x)^2\, dx \\ &= -\frac{1}{6}(1 - x)^3\Big]_0^1 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

■

Valor promedio de una función en el espacio

El valor promedio de una función F sobre una región D en el espacio se define con la fórmula

$$\textbf{Valor promedio de } F \text{ sobre } D = \frac{1}{\text{Volumen de } D} \iiint_D F\, dV. \tag{2}$$

Por ejemplo, si $F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, entonces, el valor promedio de F sobre D es la distancia promedio de los puntos en D desde el origen. Si $F(x, y, z)$ es la temperatura en (x, y, z) de un sólido que ocupa una región D en el espacio, entonces, el valor promedio de F sobre D es la temperatura promedio del sólido.

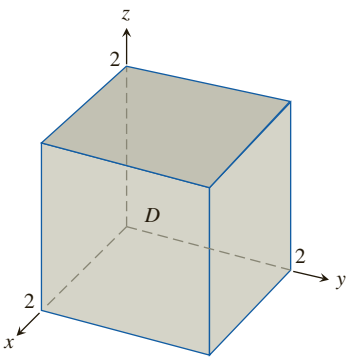


FIGURA 15.34 La región de integración del ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Determine el valor promedio de $F(x, y, z) = xyz$ sobre la región cúbica D acotada por los planos coordenados y los planos $x = 2$, $y = 2$ y $z = 2$ en el primer octante.

Solución Trazamos el cubo con suficiente detalle para mostrar los límites de integración (figura 15.34). Luego, usamos la ecuación 2 para calcular el valor promedio de F sobre el cubo.

El volumen de la región D es $(2)(2)(2) = 8$. El valor de la integral de F sobre el cubo es

$$\int_0^2\int_0^2\int_0^2 xyz\,dx\,dy\,dz = \int_0^2\int_0^2\left[\frac{x^2}{2}yz\right]_{x=0}^{x=2} dy\,dz = \int_0^2\int_0^2 2yz\,dy\,dz$$

$$= \int_0^2\left[y^2z\right]_{y=0}^{y=2} dz = \int_0^2 4z\,dz = \left[2z^2\right]_0^2 = 8.$$

Con estos valores, la ecuación (2) nos da

$$\text{Valor promedio de } xyz \text{ sobre el cubo} = \frac{1}{\text{volumen}}\iiint_{\text{cubo}} xyz\,dV = \left(\frac{1}{8}\right)(8) = 1.$$

En la evaluación de la integral, seleccionamos el orden $dx\,dy\,dz$, pero cualquiera de los otros cinco órdenes posibles servirían también. ■

Propiedades de las integrales triples

Las integrales triples tienen las mismas propiedades algebraicas que las integrales dobles y simples. Sólo se sustituyen las integrales dobles de las cuatro propiedades descritas en la sección 15.2, página 880, por las integrales triples.

Ejercicios 15.5

Evaluación de integrales triples con diferentes órdenes de iteración

1. Evalúe la integral del ejemplo 2 tomando $F(x, y, z) = 1$ para calcular el volumen del tetraedro en el orden $dz\,dx\,dy$.
2. **Volumen de un sólido rectangular** Escriba seis diferentes integrales triples iteradas para el volumen del sólido rectangular en el primer octante acotado por los planos coordenados y los planos $x = 1$, $y = 2$ y $z = 3$. Evalúe una de las integrales.
3. **Volumen de un tetraedro** Escriba seis diferentes integrales triples iteradas para el volumen del tetraedro determinado en el primer octante por el plano $6x + 3y + 2z = 6$. Evalúe una de las integrales.
4. **Volumen de un sólido** Escriba seis diferentes integrales triples iteradas para el volumen de la región en el primer octante acotada por el cilindro $x^2 + z^2 = 4$ y el plano $y = 3$. Evalúe una de las integrales.
5. **Volumen encerrado por paraboloides** Sea D la región acotada por los paraboloides $z = 8 - x^2 - y^2$ y $z = x^2 + y^2$. Escriba seis diferentes integrales triples iteradas para el volumen de D. Evalúe una de las integrales.
6. **Volumen dentro de un paraboloide debajo de un plano** Sea D la región acotada por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 2y$. Escriba integrales triples iteradas en el orden $dz\,dx\,dy$ y $dz\,dy\,dx$ que nos den el volumen de la región D. No evalúe las integrales.

Evaluación de integrales triples iteradas

Evalúe las integrales de los ejercicios 7 a 20.

7. $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2)\,dz\,dy\,dx$

8. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{3y}\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\,dx\,dy$

9. $\displaystyle\int_1^e\int_1^{e^2}\int_1^{e^3}\frac{1}{xyz}dx\,dy\,dz$

10. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{3-3x}\int_0^{3-3x-y} dz\,dy\,dx$

11. $\displaystyle\int_0^{\pi/6}\int_0^1\int_{-2}^3 y\,\text{sen}\,z\,dx\,dy\,dz$

12. $\displaystyle\int_{-1}^1\int_0^1\int_0^2 (x + y + z)\,dy\,dx\,dz$

13. $\displaystyle\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^{\sqrt{9-x^2}} dz\,dy\,dx$

14. $\displaystyle\int_0^2\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_0^{2x+y} dz\,dx\,dy$

15. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{2-x}\int_0^{2-x-y} dz\,dy\,dx$

16. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-x^2}\int_3^{4-x^2-y} x\,dz\,dy\,dx$

17. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\cos(u + v + w)\,du\,dv\,dw$ (espacio uvw)

18. $\displaystyle\int_0^1\int_1^{\sqrt{e}}\int_1^e se^s \ln r\,\frac{(\ln t)^2}{t}\,dt\,dr\,ds$ (espacio rst)

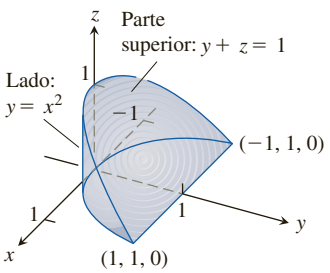
19. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{\ln \sec v}\int_{-\infty}^{2t} e^x\,dx\,dt\,dv$ (espacio tvx)

20. $\displaystyle\int_0^{7}\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{4-q^2}} \frac{q}{r+1}\,dp\,dq\,dr$ (espacio pqr)

Determinación de integrales iteradas equivalentes

21. La siguiente es la región de integración de la integral

$$\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{1-y} dz\,dy\,dx.$$



Replantee la integral como una integral iterada equivalente en el orden

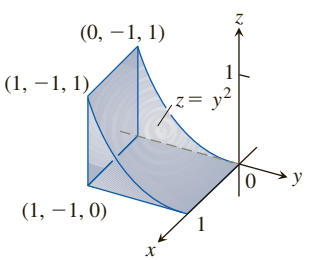
a) $dy\,dz\,dx$ ***b)*** $dy\,dx\,dz$

c) $dx\,dy\,dz$ ***d)*** $dx\,dz\,dy$

e) $dz\,dx\,dy$.

22. La siguiente es la región de integración de la integral

$$\int_{0}^{1}\int_{-1}^{0}\int_{0}^{y^2} dz\,dy\,dx.$$



Replantee la integral como una integral iterada equivalente en el orden

a) $dy\,dz\,dx$ ***b)*** $dy\,dx\,dz$

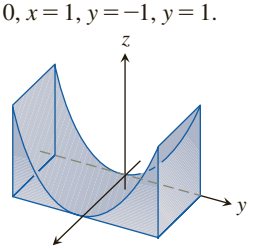
c) $dx\,dy\,dz$ ***d)*** $dx\,dz\,dy$

e) $dz\,dx\,dy$.

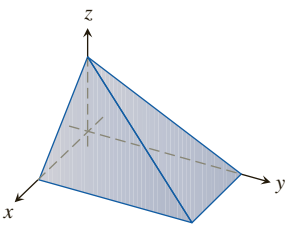
Cálculo de volúmenes usando integrales triples

Calcule los volúmenes de las regiones de los ejercicios 23 a 36.

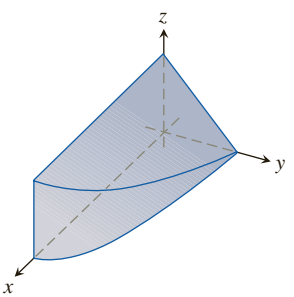
23. La región entre el cilindro $z = y^2$ y el plano xy que está acotada por los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = -1$, $y = 1$.



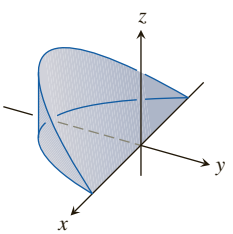
24. La región del primer octante acotada por los planos coordenados y los planos $x + z = 1$, $y + 2z = 2$.



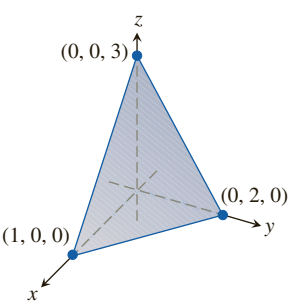
25. La región del primer octante acotada por los planos coordenados, el plano $y + z = 2$ y el cilindro $x = 4 - y^2$.



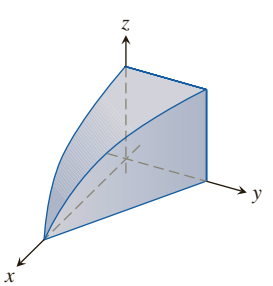
26. La cuña definida en el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ por los planos $z = -y$ y $z = 0$.



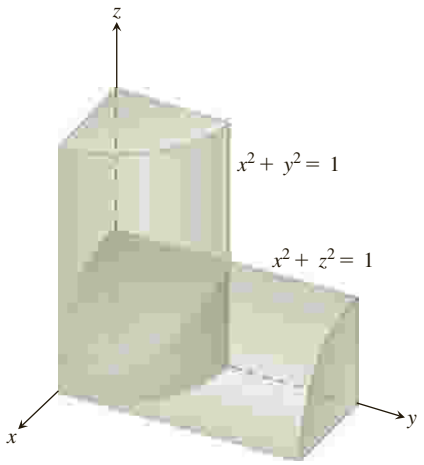
27. El tetraedro del primer octante acotado por los planos coordenados y el plano que pasa por (1, 0, 0), (0, 2, 0) y (0, 0, 3).



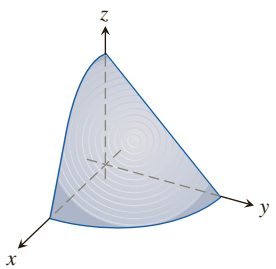
28. La región del primer octante acotada por los planos coordenados, el plano $y = 1 - x$ y la superficie $z = \cos(\pi x/2)$, $0 \le x \le 1$.



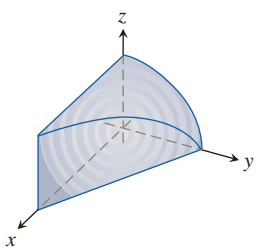
29. La región común a los interiores de los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + z^2 = 1$, cuya octava parte se muestra en la siguiente figura.



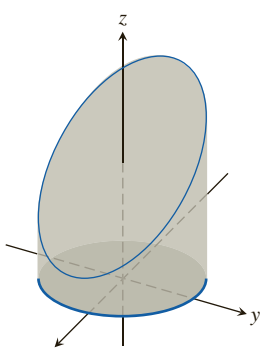
30. La región del primer octante acotada por los planos coordenados y la superficie $z = 4 - x^2 - y$.



31. La región del primer octante acotada por los planos coordenados, el plano $x + y = 4$ y el cilindro $y^2 + 4z^2 = 16$.



32. La región cortada en el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ por el plano $z = 0$ y el plano $x + z = 3$.



33. La región del primer octante entre los planos $x + y + 2z = 2$ y $2x + 2y + z = 4$.

34. La región finita acotada por los planos $z = x$, $x + z = 8$, $z = y$, $y = 8$ y $z = 0$.

35. La región cortada en el cilindro elíptico sólido $x^2 + 4y^2 \le 4$ por el plano xy y el plano $z = x + 2$.

36. La región acotada en la parte posterior por el plano $x = 0$, al frente y a los lados por el cilindro parabólico $x = 1 - y^2$, arriba por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, y abajo por el plano xy.

Valores promedio

En los ejercicios 37 a 40, calcule el valor promedio de $F(x, y, z)$ sobre la región dada.

37. $F(x, y, z) = x^2 + 9$ sobre un cubo en el primer octante acotado por los planos coordenados y los planos $x = 2$, $y = 2$ y $z = 2$.

38. $F(x, y, z) = x + y - z$ sobre un sólido rectangular en el primer octante acotado por los planos coordenados y los planos $x = 1$, $y = 1$ y $z = 2$.

39. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sobre el cubo en el primer octante acotado por los planos coordenados y los planos $x = 1$, $y = 1$ y $z = 1$.

40. $F(x, y, z) = xyz$ sobre el cubo en el primer octante acotado por los planos coordenados y los planos $x = 2$, $y = 2$ y $z = 2$.

Cambio del orden de integración

Evalúe las integrales de los ejercicios 41 a 44, cambiando el orden de integración de manera adecuada.

41. $\displaystyle\int_0^4 \int_0^1 \int_{2y}^2 \frac{4\cos(x^2)}{2\sqrt{z}}\,dx\,dy\,dz$

42. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \int_{x^2}^1 12xze^{zy^2}\,dy\,dx\,dz$

43. $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{z}}^1 \int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x}\,\text{sen}\,\pi y^2}{y^2}\,dx\,dy\,dz$

44. $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^x \frac{\text{sen}\,2z}{4 - z}\,dy\,dz\,dx$

Teoría y ejemplos

45. Obtención de un límite superior de una integral iterada Despeje a:

$$\int_0^1 \int_0^{4-a-x^2} \int_a^{4-x^2-y} dz\,dy\,dx = \frac{4}{15}.$$

46. Elipsoide ¿Con qué valor de c el volumen del elipsoide $x^2 + (y/2)^2 + (z/c)^2 = 1$ es igual a 8π?

47. Minimización de una integral triple ¿Cuál dominio D en el espacio minimiza el valor de la integral

$$\iiint_D (4x^2 + 4y^2 + z^2 - 4)\,dV\,?$$

Justifique su respuesta.

48. Maximización de una integral triple ¿Cuál dominio D en el espacio maximiza el valor de la integral

$$\iiint_D (1 - x^2 - y^2 - z^2)\,dV?$$

Justifique su respuesta.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 49 a 52, emplee una herramienta de integración de un software matemático para evaluar la integral triple de la función dada sobre la región sólida especificada.

49. $F(x, y, z) = x^2y^2z$ sobre el cilindro sólido acotado por $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $z = 0$ y $z = 1$.

50. $F(x, y, z) = |xyz|$ sobre el sólido acotado abajo por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y arriba por el plano $z = 1$.

51. $F(x, y, z) = \dfrac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ sobre el sólido acotado abajo por el cono $y = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el plano $z = 1$.

52. $F(x, y, z) = x^4 + y^2 + z^2$ sobre la esfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

15.6 Momentos y centros de masa

Esta sección describe cómo calcular las masas y los momentos de objetos bidimensionales y tridimensionales en coordenadas cartesianas. En la sección 15.7 estudiaremos los cálculos en coordenadas cilíndricas y esféricas. Las definiciones e ideas son similares al caso de la variable única que estudiamos en la sección 6.6, pero ahora consideramos situaciones más realistas.

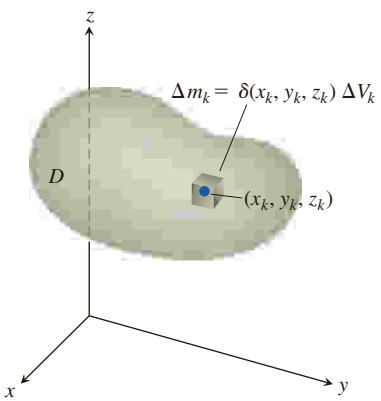


FIGURA 15.35 Para definir la masa de un objeto, primero imaginamos que está dividido en un número finito de elementos de masa Δm_k.

Masas y primeros momentos

Si $\delta(x, y, z)$ es la densidad (masa por unidad de volumen) de un objeto que ocupa una región D en el espacio, la integral de δ sobre D nos da la **masa** del objeto. Para ver por qué, imagine que el objeto se divide en n elementos de masa como el de la figura 15.35. La masa del objeto es el límite

$$M = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta m_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \delta(x_k, y_k, z_k)\,\Delta V_k = \iiint_D \delta(x, y, z)\,dV.$$

El *primer momento* de una región sólida D con respecto a un plano coordenado se define como la integral triple sobre D de la distancia de un punto (x, y, z) en D al plano, multiplicada por la densidad del sólido en ese punto. Por ejemplo, el primer momento con respecto al plano yz es la integral

$$M_{yz} = \iiint_D x\delta(x, y, z)\,dV.$$

El *centro de masa* se obtiene a partir de los primeros momentos. Por ejemplo, la coordenada x del centro de masa es $\bar{x} = M_{yz}/M$.

Para un objeto bidimensional, como una placa delgada y plana, calculamos los primeros momentos con respecto a los ejes de coordenadas eliminando simplemente la coordenada z. De esta forma, el primer momento con respecto al eje y es la integral doble sobre la región R *formada por la placa* (de la distancia a los ejes multiplicada por la densidad, es decir,

$$M_y = \iint_R x\delta(x, y)\,dA.$$

La tabla 15.1 resume las fórmulas.

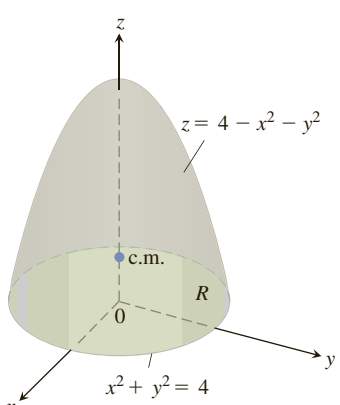


FIGURA 15.36 Determinación del centro de masa de un sólido (ejemplo 1).

EJEMPLO 1 Calcule el centro de masa de un sólido de densidad constante δ acotado abajo por el disco R: $x^2 + y^2 \le 4$ en el plano $z = 0$, y arriba por el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ (figura 15.36).

TABLA 15.1 Fórmulas para la masa y primer momento

SÓLIDO TRIDIMENSIONAL

Masa: $M = \iiint_D \delta \, dV$ $\delta = \delta(x, y, z)$ es la densidad en (x, y, z).

Primeros momentos con respecto a los planos coordenados:

$$M_{yz} = \iiint_D x \, \delta \, dV, \qquad M_{xz} = \iiint_D y \, \delta \, dV, \qquad M_{xy} = \iiint_D z \, \delta \, dV$$

Centro de masa:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

PLACA DE DOS DIMENSIONES

Masa: $M = \iint_R \delta \, dA$ $\delta = \delta(x, y)$ es la densidad en (x, y).

Primeros momentos: $M_y = \iint_R x \, \delta \, dA, \qquad M_x = \iint_R y \, \delta \, dA$

Centro de masa: $\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$

Solución Por simetría, $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Para obtener $\bar{z}$, calculamos primero

$$M_{xy} = \iiint_R \int_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} z \, \delta \, dz \, dy \, dx = \iint_R \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} \delta \, dy \, dx$$

$$= \frac{\delta}{2} \iint_R (4 - x^2 - y^2)^2 \, dy \, dx$$

$$= \frac{\delta}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2)^2 r \, dr \, d\theta$$ Las coordenadas polares simplifican la integración.

$$= \frac{\delta}{2} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{6} (4 - r^2)^3 \right]_{r=0}^{r=2} d\theta = \frac{16\delta}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{32\pi\delta}{3}.$$

Un cálculo similar nos proporciona la masa:

$$M = \iiint_R \int_0^{4-x^2-y^2} \delta \, dz \, dy \, dx = 8\pi\delta.$$

Por lo tanto, $\bar{z} = (M_{xy}/\mathrm{M}) = 4/3$ y el centro de masa es $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 4/3)$. ■

Cuando la densidad de un objeto sólido o de una placa es constante (como en el ejemplo 1), el centro de masa se conoce como el **centroide** del objeto. Para determinar el centroide, igualamos δ a 1 y procedemos a encontrar $\bar{x}$, $\bar{y}$ y $\bar{z}$ como antes, dividiendo los primeros momentos entre las masas. Estos cálculos también son válidos para objetos bidimensionales.

EJEMPLO 2 Encuentre el centroide de la región en el primer cuadrante que está acotada arriba por la recta $y = x$ y abajo por la parábola $y = x^2$.

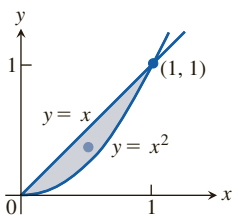


FIGURA 15.37 El centroide de esta región se calcula en el ejemplo 2.

Solución Trazamos la región e incluimos los detalles suficientes para determinar los límites de integración (figura 15.37). Luego, igualamos δ a 1 y evaluamos las fórmulas adecuadas de la tabla 15.1:

$$M = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} 1 \, dy \, dx = \int_0^1 \Big[y \Big]_{y=x^2}^{y=x} dx = \int_0^1 (x - x^2) \, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$M_x = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} y \, dy \, dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=x^2}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} \right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10} \right]_0^1 = \frac{1}{15}$$

$$M_y = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} x \, dy \, dx = \int_0^1 \Big[xy \Big]_{y=x^2}^{y=x} dx = \int_0^1 (x^2 - x^3) \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{12}.$$

A partir de estos valores de M, M_x y M_y, obtenemos

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{1/12}{1/6} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{1/15}{1/6} = \frac{2}{5}.$$

El centroide es el punto $(1/2, 2/5)$. ■

Momentos de inercia

Los primeros momentos de un cuerpo (tabla 15.1) nos hablan acerca del equilibrio y de la torca que el objeto experimenta con respecto a diferentes ejes en un campo gravitacional. Sin embargo, si el cuerpo es un eje en rotación, es más probable que estemos más interesados en conocer cuánta energía se almacena en el eje o cuánta energía genera éste a una velocidad angular determinada. Aquí es donde el segundo momento, o momento de inercia, entra en escena.

Imagine que dividimos el eje en pequeños bloques de masa Δm_k y que r_k es la distancia desde el centro de masa del k-ésimo bloque hasta el eje de rotación (figura 15.38). Si el eje gira a una velocidad angular constante de $\omega = d\theta/dt$ radianes por segundo, el centro de masa del bloque recorrerá su órbita a una rapidez lineal de

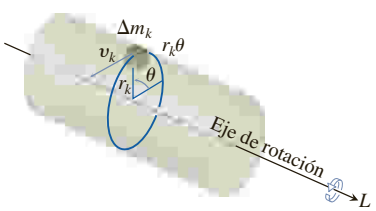


FIGURA 15.38 Cuando queremos determinar una integral para la cantidad de energía almacenada en un eje de rotación, primero imaginamos al eje dividido en pequeños bloques. Cada bloque tiene su propia energía cinética. Sumamos las contribuciones de los bloques individuales para obtener la energía cinética del eje.

$$v_k = \frac{d}{dt}(r_k\theta) = r_k \frac{d\theta}{dt} = r_k\omega.$$

La energía cinética (EC) del bloque será aproximadamente

$$\frac{1}{2}\Delta m_k v_k^2 = \frac{1}{2}\Delta m_k (r_k\omega)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 r_k^2 \, \Delta m_k.$$

La energía cinética del eje será aproximadamente

$$\sum \frac{1}{2}\omega^2 r_k^2 \, \Delta m_k.$$

La integral aproximada por estas sumas cuando el eje se divide en bloques cada vez más pequeños nos da la energía cinética del eje:

$$\text{EC}_{\text{eje}} = \int \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \, dm = \frac{1}{2}\omega^2 \int r^2 \, dm. \tag{1}$$

El factor

$$I = \int r^2 \, dm$$

es el *momento de inercia* del eje con respecto a su eje de rotación, y a partir de la ecuación (1) vemos que la energía cinética del eje es

$$\text{EC}_{\text{eje}} = \frac{1}{2} I\omega^2.$$

El momento de inercia de un eje se parece de alguna manera a la masa inercial de una locomotora. Para arrancar una locomotora con masa m, que se desplaza a una velocidad lineal v, necesitamos suministrar una energía cinética de EC $= (1/2)mv^2$. Para detener la locomotora, tenemos que eliminar esta cantidad de energía. Para que un eje con un momento de inercia I comience a girar con una velocidad angular ω, necesitamos suministrar una energía cinética de EC $= (1/2)I\omega^2$. Para detener el eje, tenemos que retirar esa energía. El momento de inercia del eje es análogo a la masa de la locomotora. Lo que hace difícil el arranque o la detención de la locomotora es su masa. Lo que dificulta el arranque o la detención de un eje es su momento de inercia. El momento de inercia no sólo depende de la masa del eje, sino también de su distribución. La masa que está más lejos del eje de rotación contribuye más al momento de inercia.

Ahora deduciremos una fórmula para el momento de inercia de un sólido en el espacio. Si $r(x, y, z)$ es la distancia desde el punto (x, y, z) en D a una recta L, entonces, el momento de inercia de la masa $\Delta m_k = \delta(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$ con respecto a la recta L (que se muestra en la figura 15.38) es aproximadamente $\Delta I_k = r^2(x_k, y_k, z_k)\Delta m_k$. **El momento de inercia con respecto a L** del objeto completo es

$$I_L = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta I_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} r^2(x_k, y_k, z_k)\delta(x_k, y_k, z_k)\,\Delta V_k = \iiint_D r^2\delta\, dV.$$

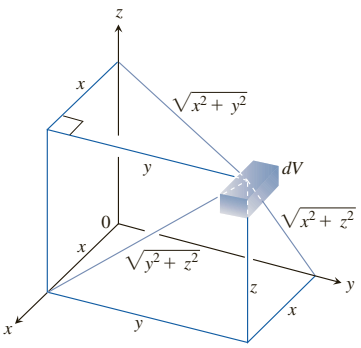


FIGURA 15.39 Distancias para dV a los planos y ejes de coordenadas.

Si L es el eje x, entonces, $r^2 = y^2 + z^2$ (figura 15.39) e

$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2)\,\delta(x, y, z)\,dV.$$

De manera similar, si L es el eje y o el eje z, tenemos

$$I_y = \iiint_D (x^2 + z^2)\,\delta(x, y, z)\,dV \qquad \text{e} \qquad I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)\,\delta(x, y, z)\,dV.$$

La tabla 15.2 resume las fórmulas de estos momentos de inercia (segundos momentos porque invocan los *cuadrados* de las distancias). También muestra la definición de *momento polar* con respecto al origen.

EJEMPLO 3 Calcule I_x, I_y e I_z del sólido rectangular de densidad constante δ que se ilustra en la figura 15.40.

Solución La fórmula de I_x nos da

$$I_x = \int_{-c/2}^{c/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2} (y^2 + z^2)\,\delta\,dx\,dy\,dz.$$

Nos ahorraremos algo de trabajo de integración al observar que $(y^2 + z^2)\delta$ es una función par de x, y y z, puesto que δ es constante. El sólido rectangular consta de ocho piezas simétricas, una en cada octante. Evaluamos la integral en una de estas piezas y, luego, multiplicamos por 8 para obtener el valor total.

$$I_x = 8\int_0^{c/2}\int_0^{b/2}\int_0^{a/2} (y^2 + z^2)\,\delta\,dx\,dy\,dz = 4a\delta\int_0^{c/2}\int_0^{b/2} (y^2 + z^2)\,dy\,dz$$

$$= 4a\delta\int_0^{c/2}\left[\frac{y^3}{3} + z^2y\right]_{y=0}^{y=b/2} dz$$

$$= 4a\delta\int_0^{c/2}\left(\frac{b^3}{24} + \frac{z^2b}{2}\right) dz$$

$$= 4a\delta\left(\frac{b^3c}{48} + \frac{c^3b}{48}\right) = \frac{abc\delta}{12}(b^2 + c^2) = \frac{M}{12}(b^2 + c^2). \qquad M = abc\delta$$

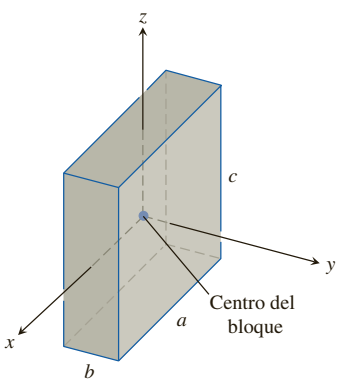


FIGURA 15.40 Cálculo de I_x, I_y e I_z para el bloque mostrado aquí. El origen se localiza en el centro del bloque (ejemplo 3).

TABLA 15.2 Fórmulas de momentos de inercia (segundos momentos)

SÓLIDO DE TRES DIMENSIONES

Con respecto al eje x:	$I_x = \iiint (y^2 + z^2)\,\delta\,dV$	$\delta = \delta(x, y, z)$
Con respecto al eje y:	$I_y = \iiint (x^2 + z^2)\,\delta\,dV$	
Con respecto al eje z:	$I_z = \iiint (x^2 + y^2)\,\delta\,dV$	
Con respecto a la recta L:	$I_L = \iiint r^2(x, y, z)\,\delta\,dV$	$r(x, y, z)$ = distancia del punto (x, y, z) a la recta L

PLACA DE DOS DIMENSIONES

Con respecto al eje x:	$I_x = \iint y^2\,\delta\,dA$	$\delta = \delta(x, y)$
Con respecto al eje y:	$I_y = \iint x^2\,\delta\,dA$	
Con respecto al eje z:	$I_L = \iint r^2(x, y)\,\delta\,dA$	$r(x, y)$ = distancia del punto (x, y) a la recta L
Con respecto al origen (momento polar):	$I_0 = \iint (x^2 + y^2)\,\delta\,dA = I_x + I_y$	

De manera similar,

$$I_y = \frac{M}{12}(a^2 + c^2) \qquad \text{e} \qquad I_z = \frac{M}{12}(a^2 + b^2).$$ ■

EJEMPLO 4 Una placa delgada cubre la región triangular acotada por el eje x y las rectas $x = 1$ y $y = 2x$ en el primer cuadrante. La densidad de la placa en el punto (x, y) es $\delta(x, y) = 6x + 6y + 6$. Obtenga los momentos de inercia de la placa con respecto a los ejes de coordenadas y el origen.

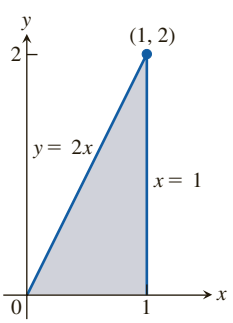


FIGURA 15.41 La región triangular cubierta por la placa del ejemplo 4.

Solución Trazamos la placa con suficiente detalle para determinar los límites de integración de las integrales que debemos evaluar (figura 15.41). El momento de inercia con respecto al eje x es

$$I_x = \int_0^1 \int_0^{2x} y^2\delta(x, y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{2x} (6xy^2 + 6y^3 + 6y^2)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[2xy^3 + \frac{3}{2}y^4 + 2y^3\right]_{y=0}^{y=2x} dx = \int_0^1 (40x^4 + 16x^3)\,dx$$

$$= \left[8x^5 + 4x^4\right]_0^1 = 12.$$

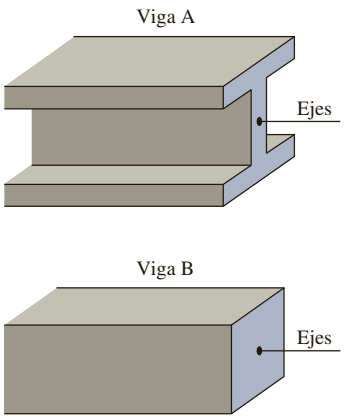


FIGURA 15.42 Cuanto mayor sea el momento polar de inercia de la sección transversal de una viga con respecto al eje longitudinal de la viga, más rígida será esta última. Las vigas A y B tienen igual área transversal, pero A es más rígida.

De forma análoga, el momento de inercia con respecto al eje y es

$$I_y = \int_0^1 \int_0^{2x} x^2 \delta(x, y)\, dy\, dx = \frac{39}{5}.$$

Observe que integramos y^2 por la densidad en el cálculo de I_x, y x^2 por la densidad para obtener I_y.

Puesto que conocemos I_x e I_y, no necesitamos evaluar una integral para obtener I_0; en vez de ello, usamos la ecuación $I_0 = I_x + I_y$ de la tabla 15.2:

$$I_0 = 12 + \frac{39}{5} = \frac{60 + 39}{5} = \frac{99}{5}.$$ ■

El momento de inercia también desempeña un papel en la determinación de cuánto se doblará una viga metálica horizontal por efecto de una carga. La rigidez de la viga es una constante multiplicada por I, el momento de inercia de una sección transversal típica de la viga con respecto al eje longitudinal de la viga. Cuanto mayor sea el valor de I, más rígida será la viga y menor la flexión que experimentará por efecto de una carga. Por esa razón, se usan vigas en forma de I en vez de vigas cuya sección transversal es cuadrada. Las pestañas en la parte superior e inferior de la viga mantienen lejos la mayor parte de la masa del eje longitudinal para incrementar el valor de I (figura 15.42).

Ejercicios 15.6

Placas con densidad constante

1. **Cálculo del centro de masa** Determine el centro de masa de una placa delgada de densidad $\delta = 3$ acotada por las rectas $x = 0$, $y = x$ y la parábola $y = 2 - x^2$ en el primer cuadrante.
2. **Cálculo de momentos de inercia** Determine los momentos de inercia con respecto a los ejes de coordenadas de una placa rectangular delgada de densidad constante δ acotada por las rectas $x = 3$ y $y = 3$ en el primer cuadrante.
3. **Obtención del centroide** Determine el centroide de la región en el primer cuadrante acotada por el eje x, la parábola $y^2 = 2x$ y la recta $x + y = 4$.
4. **Determinación del centroide** Obtenga el centroide de la región triangular cortada en el primer cuadrante por la recta $x + y = 3$.
5. **Obtención del centroide** Obtenga el centroide de la región cortada en el primer cuadrante por la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.
6. **Determinación del centroide** Obtenga el centroide de la región entre el eje x y el arco $y = \operatorname{sen} x$, $0 \le x \le \pi$.
7. **Cálculo de momentos de inercia** Obtenga el momento de inercia en relación con el eje x de una placa delgada de densidad $\delta = 1$ acotada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. Luego, use su resultado para obtener I_y e I_0 de la placa.
8. **Cálculo del momento de inercia** Obtenga el momento de inercia, con respecto al eje y, de una hoja delgada de densidad constante $\delta = 1$, acotada por la curva $y = (\operatorname{sen}^2 x)/x^2$ y el intervalo $\pi \le x \le 2\pi$ del eje x.
9. **Centroide de una región infinita** Determine el centroide de la región infinita en el segundo cuadrante comprendida entre los ejes de coordenadas y la curva $y = e^x$. (Use integrales impropias en las fórmulas de la masa y del momento).
10. **Primer momento de una placa infinita** Calcule el primer momento con respecto al eje y de una placa delgada de densidad $\delta(x, y) = 1$ que cubre la región infinita bajo la curva $y = e^{-x^2/2}$ en el primer cuadrante.

Placas con densidad variable

11. **Cálculo de un momento de inercia** Obtenga el momento de inercia, con respecto al eje x, de una placa delgada acotada por la parábola $x = y - y^2$ y la recta $x + y = 0$, si $\delta(x, y) = x + y$.
12. **Determinación de la masa** Calcule la masa de una placa delgada que ocupa la región más pequeña cortada de la elipse $x^2 + 4y^2 = 12$ por la parábola $x = 4y^2$, si $\delta(x, y) = 5x$.
13. **Determinación del centro de masa** Calcule el centro de masa de una placa triangular delgada acotada por el eje y y por las rectas $y = x$ y $y = 2 - x$, si $\delta(x, y) = 6x + 3y + 3$.
14. **Cálculo del centro de masa y el momento de inercia** Obtenga el centro de masa y el momento de inercia, con respecto al eje x, de una placa delgada acotada por las curvas $x = y^2$ y $x = 2y - y^2$, si la densidad en el punto (x, y) es $\delta(x, y) = y + 1$.
15. **Centro de masa, momento de inercia** Calcule el centro de masa y el momento de inercia, con respecto al eje y, de una placa rectangular delgada cortada en el primer cuadrante por las rectas $x = 6$ y $y = 1$, si $\delta(x, y) = x + y + 1$.
16. **Centro de masa, momento de inercia** Encuentre el centro de masa y el momento de inercia, con respecto al eje y, de una placa delgada acotada por la recta $y = 1$ y la parábola $y = x^2$, si la densidad es $\delta(x, y) = y + 1$.
17. **Centro de masa, momento de inercia** Encuentre el centro de masa y el momento de inercia, con respecto al eje y, de una placa delgada acotada por el eje x, las rectas $x = \pm 1$ y la parábola $y = x^2$, si $\delta(x, y) = 7y + 1$.

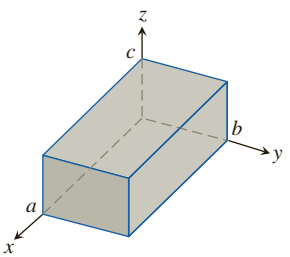
18. Centro de masa y momento de inercia Obtenga el centro de masa y el momento de inercia de una placa delgada, con respecto al eje x, acotada por las rectas $x = 0$, $x = 20$, $y = -1$ y $y = 1$, si $\delta(x, y) = 1 + (x/20)$.

19. Centro de masa, momentos de inercia Encuentre el centro de masa, el momento de inercia con respecto a los ejes de coordenadas y el momento polar de inercia de una placa triangular delgada acotada por las rectas $y = x$, $y = -x$ y $y = 1$, si $\delta(x, y) = y + 1$.

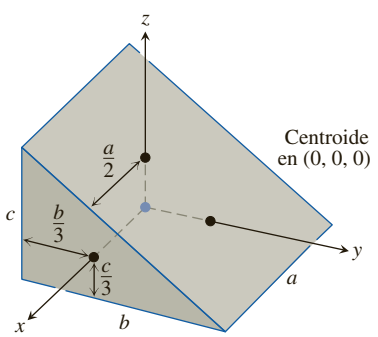
20. Centro de masa, momentos de inercia Repita el ejercicio 19 con $\delta(x, y) = 3x^2 + 1$.

Sólidos con densidad constante

21. Momentos de inercia Obtenga los momentos de inercia del sólido rectangular que se ilustra aquí, con respecto a sus aristas mediante el cálculo de I_x, I_y e I_z.



22. Momentos de inercia Los ejes de coordenadas en la figura pasan por el centroide de una cuña sólida, paralelos a los extremos que se indican. Obtenga I_x, I_y e I_z si $a = b = 6$ y $c = 4$.



23. Centro de masa y momentos de inercia Un sólido con densidad constante está acotado abajo por la superficie $z = 4y^2$, arriba por el plano $z = 4$ y en los extremos por los planos $x = 1$ y $x = -1$. Obtenga el centro de masa y los momentos de inercia con respecto a los tres ejes.

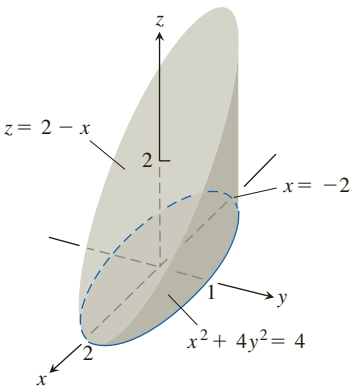
24. Centro de masa Un sólido de densidad constante está acotado abajo por el plano $z = 0$, a los lados por el cilindro elíptico $x^2 + 4y^2 = 4$ y arriba por el plano $z = 2 - x$ (vea la figura).

a) Obtenga $\bar{x}$ y $\bar{y}$.

b) Evalúe la integral

$$M_{xy} = \int_{-2}^{2} \int_{-(1/2)\sqrt{4-x^2}}^{(1/2)\sqrt{4-x^2}} \int_{0}^{2-x} z \, dz \, dy \, dx$$

usando las tablas de integrales para obtener la integración final con respecto a x. Luego, divida M_{xy} entre M para verificar que $\bar{z} = 5/4$.



25. *a)* Centro de masa Calcule el centro de masa de un sólido de densidad constante acotado abajo por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y arriba por el plano $z = 4$.

b) Encuentre el plano $z = c$ que divide al sólido en dos partes de igual volumen. Este plano no pasa por el centro de masa.

26. Momentos Un cubo sólido, de 2 unidades por lado, está acotado por los planos $x = \pm 1$, $z = \pm 1$, $y = 3$ y $y = 5$. Obtenga el centro de masa y los momentos de inercia con respecto a los ejes de coordenadas.

27. Momento de inercia con respecto a una recta Una cuña como la del ejercicio 22 tiene las siguientes dimensiones: $a = 4$, $b = 6$ y $c = 3$. Elabore un bosquejo para convencerse de que el cuadrado de la distancia de un punto típico (x, y, z) de la cuña a la recta L: $z = 0$, $y = 6$ es $r^2 = (y - 6)^2 + z^2$. Luego, calcule el momento de inercia de la cuña con respecto a L.

28. Momento de inercia alrededor de una recta Una cuña como la del ejercicio 22 tiene las siguientes dimensiones: $a = 4$, $b = 6$ y $c = 3$. Elabore un bosquejo para convencerse de que el cuadrado de la distancia de un punto típico (x, y, z) de la cuña a la recta L: $x = 4$, $y = 0$ es $r^2 = (x - 4)^2 + y^2$. Luego, calcule el momento de inercia de la cuña con respecto a L.

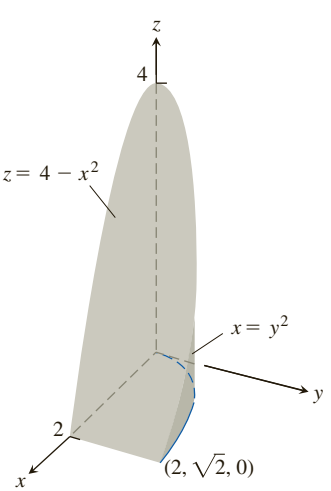
Sólidos con densidad variable

En los ejercicios 29 y 30, obtenga

a) la masa del sólido. ***b)*** el centro de masa.

29. Una región sólida en el primer octante está acotada por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 2$. La densidad del sólido es $\delta(x, y, z) = 2x$.

30. Un sólido en el primer octante que está acotado por los planos $y = 0$ y $z = 0$ y las superficies $z = 4 - x^2$ y $x = y^2$ (vea la figura). Su densidad es la función $\delta(x, y, z) = kxy$, donde k es una constante.



En los ejercicios 31 y 32, obtenga

a) la masa del sólido.

b) el centro de masa.

c) los momentos de inercia con respecto a los ejes de coordenadas.

31. Un cubo sólido en el primer octante está acotado por los planos coordenados y los planos $x = 1$, $y = 1$ y $z = 1$. La densidad del cubo es $\delta(x, y, z) = x + y + z + 1$.

32. Una cuña como la del ejercicio 22 tiene las dimensiones $a = 2$, $b = 6$ y $c = 3$. La densidad es $\delta(x, y, z) = x + 1$. Observe que si la densidad es constante, el centro de masa será (0, 0, 0).

33. Masa Determine la masa del sólido acotado por los planos $x + z = 1$, $x - z = -1$, $y = 0$ y la superficie $y = \sqrt{z}$. La densidad del sólido es $\delta(x, y, z) = 2y + 5$.

34. Masa Calcule la masa de la región sólida acotada por las superficies parabólicas $z = 16 - 2x^2 - 2y^2$ y $z = 2x^2 + 2y^2$, si la densidad del sólido es $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Teoría y ejemplos

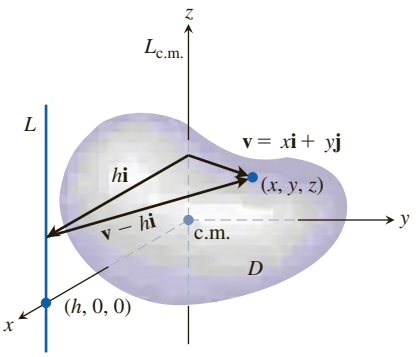
Teorema de los ejes paralelos Sea $L_{\text{c.m.}}$ una recta que pasa por el centro de masa de un cuerpo de masa m, y sea L una recta paralela a h unidades de distancia desde $L_{\text{c.m.}}$. El *teorema de los ejes paralelos* afirma que los momentos de inercia $I_{\text{c.m.}}$ e I_L del cuerpo con respecto a $L_{\text{c.m.}}$ y L satisfacen la ecuación

$$I_L = I_{\text{c.m.}} + mh^2. \tag{2}$$

Como en el caso bidimensional, el teorema ofrece una manera rápida de calcular un momento cuando se conocen el otro momento y la masa.

35. Demostración del teorema de los ejes paralelos

a) Demuestre que el primer momento de un cuerpo en el espacio con respecto a cualquier plano que pase por el centro de masa del cuerpo es cero. (*Sugerencia:* Coloque el centro de masa del cuerpo en el origen y suponga que el plano es el yz. ¿Qué le dice entonces la fórmula $\bar{x} = M_{yz}/M$?).



b) Para demostrar el teorema de los ejes paralelos, coloque el cuerpo con su centro de masa en el origen, con la recta $L_{\text{c.m.}}$ a lo largo del eje z y la recta L perpendicular al plano xy en el punto $(h, 0, 0)$. Sea D la región del espacio ocupada por el cuerpo. Luego, con la notación de la figura,

$$I_L = \iiint_D |\mathbf{v} - h\mathbf{i}|^2 \, dm.$$

Desarrolle el integrando de esta integral y complete la demostración.

36. El momento de inercia con respecto a un diámetro de una esfera sólida de densidad constante y radio a es $(2/5)ma^2$, donde m es la masa de la esfera. Obtenga el momento de inercia con respecto a una recta tangente a la esfera.

37. El momento de inercia del sólido del ejercicio 21 con respecto al eje z es $I_z = abc(a^2 + b^2)/3$.

a) Use la ecuación (2) para determinar el momento de inercia del sólido con respecto a la recta paralela al eje z que pasa por el centro de masa del sólido.

b) Use la ecuación (2) y el resultado del inciso *a)* para obtener el momento de inercia del sólido con respecto a la recta $x = 0$, $y = 2b$.

38. Si $a = b = 6$ y $c = 4$, el momento de inercia de la cuña sólida del ejemplo 22 con respecto al eje x es $I_x = 208$. Calcule el momento de inercia de la cuña con respecto a la recta $y = 4$, $z = -4/3$ (la orilla del extremo angosto de la cuña).

15.7 Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas

Cuando un cálculo en física, ingeniería o geometría implica un cilindro, un cono o una esfera, con frecuencia simplificamos nuestro trabajo usando coordenadas cilíndricas o esféricas, las cuales se presentan en esta sección. El procedimiento para hacer la transformación a estas coordenadas y evaluar las integrales triples resultantes es similar a la transformación a coordenadas polares en el plano que estudiamos en la sección 15.4.

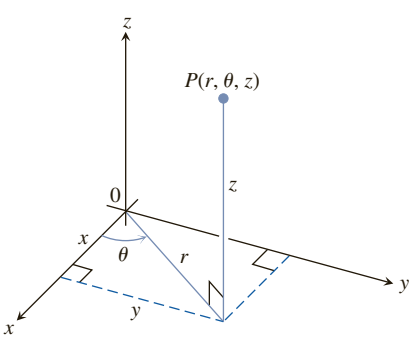


FIGURA 15.43 Las coordenadas cilíndricas de un punto en el espacio son r, θ y z.

Integración en coordenadas cilíndricas

Para obtener las coordenadas cilíndricas en el espacio, combinamos las coordenadas polares en el plano xy con el eje z. Esto asigna a cada punto en el espacio una o más coordenadas de la forma (r, θ, z), una terna, como se muestra en la figura 15.43. Aquí se requiere que $r \geq 0$.

DEFINICIÓN Las **coordenadas cilíndricas** representan un punto P en el espacio mediante ternas ordenadas (r, θ, z), donde $r \geq 0$.

1. r y θ son las coordenadas polares de la proyección vertical de P sobre el plano xy.
2. z es la coordenada vertical rectangular.

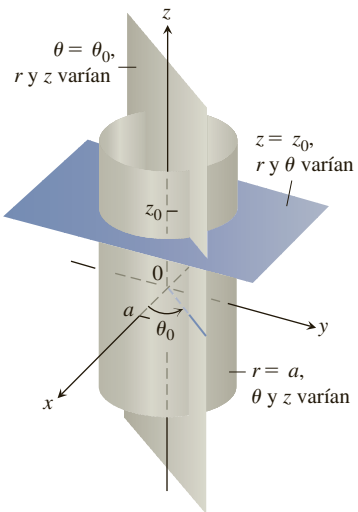


FIGURA 15.44 Ecuaciones con coordenadas constantes en coordenadas cilíndricas producen cilindros y planos.

Los valores de x, y, r y θ en coordenadas rectangulares y cilíndricas están relacionados por las ecuaciones usuales.

Ecuaciones que relacionan las coordenadas rectangulares (x, y, z) y las cilíndricas (r, θ, z)

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta, \qquad z = z,$$
$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = y/x$$

En coordenadas cilíndricas, la ecuación $r = a$ describe no sólo una circunferencia en el plano xy, sino todo un cilindro alrededor del eje z (figura 15.44). El eje z está dado por $r = 0$. La ecuación $\theta = \theta_0$ describe al plano que contiene al eje z y forma un ángulo θ_0 con el semieje positivo x. Al igual que en las coordenadas rectangulares, la ecuación $z = z_0$ describe un plano perpendicular al eje z.

Las coordenadas cilíndricas son adecuadas para describir los cilindros cuyos ejes corren a lo largo del eje z y planos que contienen al eje z o que son perpendiculares al mismo eje z. Superficies como ésta tienen ecuaciones con coordenadas constantes:

$r = 4$ Cilindro, radio 4, su eje es el eje z

$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ Plano que contiene al eje z

$z = 2.$ Plano perpendicular al eje z

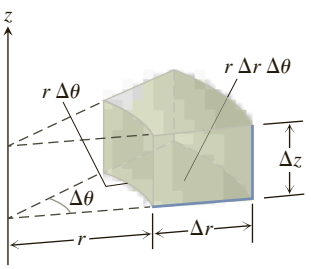


FIGURA 15.45 En coordenadas cilíndricas, el volumen de la cuña se aproxima mediante el producto $\Delta V = \Delta z r \Delta r \Delta\theta$.

Para calcular integrales triples sobre una región D en coordenadas cilíndricas, dividimos la región en n pequeñas cuñas cilíndricas, y no en cajas rectangulares. En la k-ésima cuña cilíndrica, r, θ y z cambian por Δr_k, $\Delta\theta_k$ y Δz_k, y el mayor de estos números entre todas las cuñas cilíndricas es la **norma** de la partición. Definimos la integral triple como un límite de las sumas de Riemann aplicadas a estas cuñas. El volumen de una cuña cilíndrica ΔV_k se obtiene al multiplicar el área ΔA_k de su base en el plano $r\theta$ por la altura Δz (figura 15.45).

Para un punto (r_k, θ_k, z_k) en el centro de la k-ésima cuña, ya hemos calculado en coordenadas polares que $\Delta A_k = r_k \Delta r_k \Delta\theta_k$. Entonces, $\Delta V_k = \Delta z_k r_k \Delta r_k\, \Delta\theta_k$ y una suma de Riemann para f sobre D tiene la forma

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(r_k, \theta_k, z_k)\, \Delta z_k\, r_k\, \Delta r_k\, \Delta\theta_k.$$

La integral triple de una función f sobre D se obtiene considerando un límite de tales sumas de Riemann con particiones cuyas normas tienden a cero.

Volumen diferencial en coordenadas cilíndricas

$$dV = dz\, r\, dr\, d\theta$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iiint_D f\, dV = \iiint_D f\, dz\, r\, dr\, d\theta.$$

Las integrales triples en coordenadas cilíndricas se evalúan entonces como integrales iteradas, tal como se verá en el siguiente ejemplo. Aunque la definición de las coordenadas cilíndricas tiene sentido sin ninguna restricción en θ, en la mayoría de las situaciones que implican integración, necesitaremos restringir θ a un intervalo de longitud 2π. Por lo tanto, imponemos el requisito de que $\alpha \le \theta \le \beta$, donde $0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$.

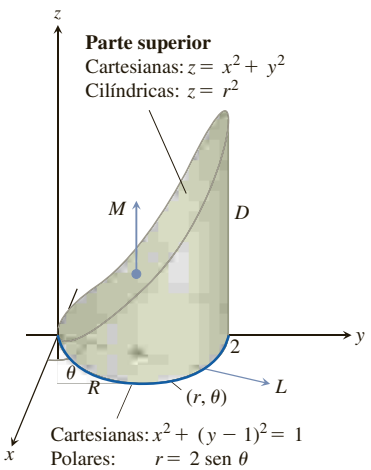


FIGURA 15.46 Determinación de los límites de integración para evaluar una integral en coordenadas cilíndricas (ejemplo 1).

EJEMPLO 1 Defina los límites de integración en coordenadas cilíndricas para integrar una función $f(r, \theta, z)$ sobre la región D acotada abajo por el plano $z = 0$, a los lados por el cilindro circular $x^2 + (y + 1)^2 = 1$, y arriba por el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

Solución La base de D también es la proyección R de la región sobre el plano xy. La frontera de R es la circunferencia $x^2 + (y - 1)^2 = 1$. Su ecuación en coordenadas polares es

$$\begin{aligned} x^2 + (y - 1)^2 &= 1 \\ x^2 + y^2 - 2y + 1 &= 1 \\ r^2 - 2r \operatorname{sen} \theta &= 0 \\ r &= 2 \operatorname{sen} \theta. \end{aligned}$$

La región se ilustra en la figura 15.46.

Determinamos los límites de integración, comenzando con los límites en z. Una recta M paralela al eje z que pasa por un punto típico (r, θ) en R, entra a D en $z = 0$ y sale en $z = x^2 + y^2 = r^2$.

A continuación, obtenemos los límites de integración en r. Un rayo L que pasa por (r, θ) partiendo del origen, entra a R en $r = 0$ y sale en $r = 2 \operatorname{sen} \theta$.

Por último, determinamos los límites de integración en θ. Cuando L barre R, el ángulo θ que forma con el semieje positivo x va de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$. La integral es

$$\iiint_D f(r, \theta, z)\, dV = \int_0^{\pi} \int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} \int_0^{r^2} f(r, \theta, z)\, dz\, r\, dr\, d\theta. \qquad \blacksquare$$

El ejemplo 1 ilustra un buen procedimiento para determinar los límites de integración en coordenadas cilíndricas. El procedimiento se resume como sigue.

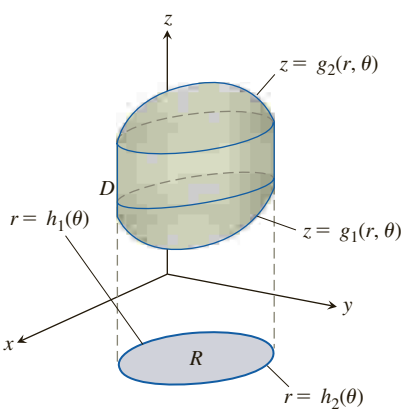
Cómo integrar en coordenadas cilíndricas

Para evaluar

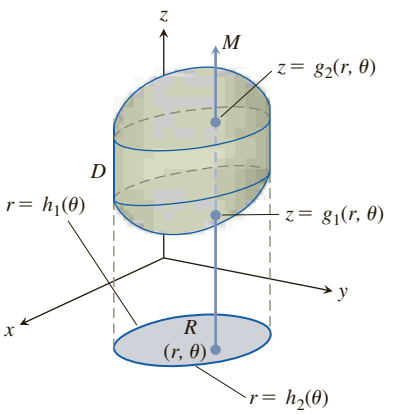
$$\iiint_D f(r, \theta, z)\, dV$$

sobre una región D en el espacio en coordenadas cilíndricas, integrando primero con respecto a z, luego con respecto a r y al final con respecto a θ, siga los siguientes pasos.

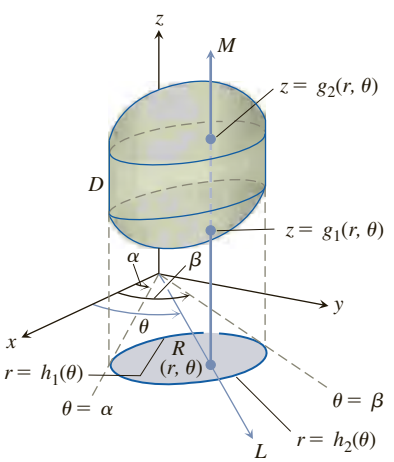
1. *Elabore un dibujo*. Trace la región D junto con su proyección R sobre el plano xy. Identifique las superficies y curvas que acotan a D y R.



2. *Determine los límites de integración en z.* Trace una recta M paralela al eje z, que pase por un punto típico (r, θ) de R. Conforme z crece, M entra a D en $z = g_1(r, \theta)$ y sale en $g_2(r, \theta)$. Éstos son los límites de integración en z.



3. *Determine los límites de integración en r.* Trace un rayo L desde el origen que pase por (r, θ). El rayo entra a R en $r = h_1(\theta)$ y sale en $r = h_2(\theta)$. Éstos son los límites de integración en r.



4. *Determine los límites de integración en θ.* Cuando L barre R, el ángulo θ que forma con el semieje positivo x va de $\theta = \alpha$ a $\theta = \beta$. Éstos son los límites de integración en θ. La integral es

$$\iiint_D f(r, \theta, z)\, dV = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{r=h_1(\theta)}^{r=h_2(\theta)} \int_{z=g_1(r,\theta)}^{z=g_2(r,\theta)} f(r, \theta, z)\, dz\, r\, dr\, d\theta.$$

EJEMPLO 2 Encuentre el centroide ($\delta = 1$) del sólido encerrado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, acotado arriba por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, y abajo por el plano xy.

Solución Trazamos el sólido, acotado arriba por el paraboloide $z = r^2$ y abajo por el plano $z = 0$ (figura 15.47). Su base R es el disco $0 \le r \le 2$ en el plano xy.

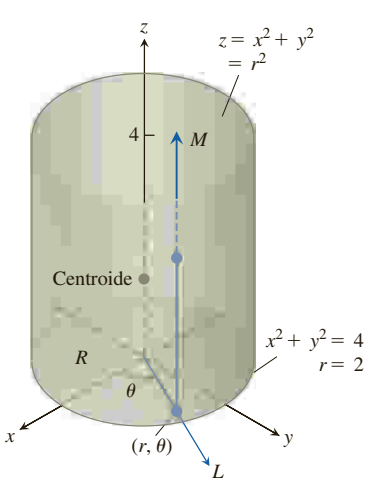


FIGURA 15.47 El ejemplo 2 muestra cómo encontrar el centroide de este sólido.

El centroide del sólido $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ se encuentra en su eje de simetría, en este caso, el eje z. Esto hace que $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Para hallar $\bar{z}$, dividimos el primer momento M_{xy} entre la masa M.

Para encontrar los límites de integración de las integrales de la masa y el momento, continuamos con los cuatro pasos básicos. Completamos nuestro dibujo inicial. Los demás pasos dan los límites de integración.

Los límites en z. Una recta M paralela al eje z, que pasa por un punto típico (r, θ) en la base, entra al sólido en $z = 0$ y sale en $z = r^2$.

Los límites en r. Un rayo L que pasa por (r, θ) saliendo desde el origen, entra a R en $r = 0$ y sale en $r = 2$.

Los límites en θ. Cuando L barre sobre la base, como una manecilla de reloj, el ángulo θ que forma con el semieje positivo x va desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\pi$. El valor de M_{xy} es

$$M_{xy} = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{r^2} z\,dz\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{r^2} r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{r^5}{2}dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^6}{12}\right]_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{16}{3}d\theta = \frac{32\pi}{3}.$$

El valor de M es

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{r^2} dz\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left[z\right]_0^{r^2} r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} 4\,d\theta = 8\pi.$$

Por lo tanto,

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{32\pi}{3}\frac{1}{8\pi} = \frac{4}{3},$$

y el centroide es $(0, 0, 4/3)$. Observe que el centroide se encuentra sobre el eje z, fuera del sólido. ■

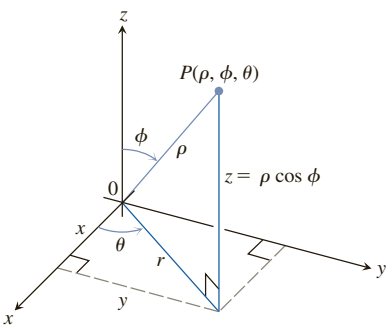


FIGURA 15.48 Las coordenadas esféricas ρ, ϕ y θ y su relación con x, y, z y r.

Coordenadas esféricas e integración

Las coordenadas esféricas ubican puntos en el espacio mediante dos ángulos y una distancia, como se observa en la figura 15.48. La primera coordenada, $\rho = |\overrightarrow{OP}|$, es la distancia del punto al origen y nunca es negativa. La segunda coordenada, ϕ, es el ángulo que $\overrightarrow{OP}$ forma con el semieje positivo z. Se requiere que esté en el intervalo $[0, \pi]$. La tercera coordenada es el ángulo θ medido en coordenadas cilíndricas.

DEFINICIÓN Las **coordenadas esféricas** representan un punto P en el espacio mediante la terna ordenada (r, ϕ, θ), donde

1. ρ es la distancia de P al origen $(\rho \geq 0)$.
2. ϕ es el ángulo que $\overrightarrow{OP}$ forma con el semieje positivo z $(0 \leq \phi \leq \pi)$.
3. θ es el ángulo de las coordenadas cilíndricas.

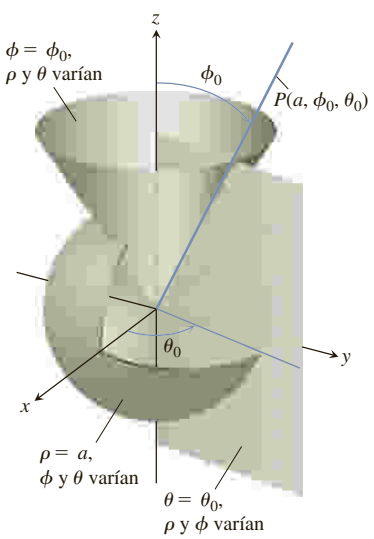


FIGURA 15.49 Las ecuaciones de coordenadas constantes en coordenadas esféricas dan esferas, conos sencillos y semiplanos.

En los mapas de la Tierra, θ se relaciona con el meridiano de un punto sobre nuestro planeta, y ϕ con su latitud, mientras que ρ se relaciona con la altitud sobre la superficie terrestre.

La ecuación $\rho = a$ describe la esfera de radio a con centro en el origen (figura 15.49). La ecuación $\phi = \phi_0$ describe un cono cuyo vértice se localiza en el origen y cuyo eje se encuentra a lo largo del eje z. (Ampliamos nuestra interpretación para incluir el plano xy como el cono $\phi = \pi/2$). Si ϕ_0 es mayor que $\pi/2$, el cono $\phi = \phi_0$ se abre hacia abajo. La ecuación $\theta = \theta_0$ describe el semiplano que contiene al eje z y forma un ángulo θ_0 con el semieje positivo x.

Ecuaciones que relacionan las coordenadas esféricas con las coordenadas cartesianas y cilíndricas

$$r = \rho \operatorname{sen}\phi, \qquad x = r\cos\theta = \rho \operatorname{sen}\phi\cos\theta,$$
$$z = \rho\cos\phi, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta = \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \tag{1}$$
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}.$$

EJEMPLO 3 Determine una ecuación en coordenadas esféricas para la esfera $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$.

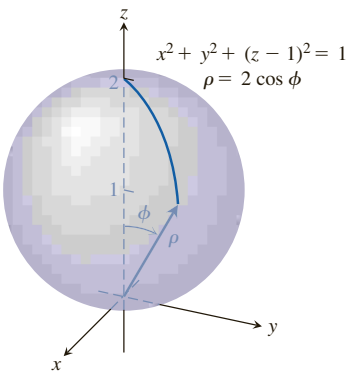


FIGURA 15.50 La esfera del ejemplo 3.

Solución Usamos las ecuaciones (1) para sustituir x, y y z:

$$x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$$
$$\rho^2\operatorname{sen}^2\phi\cos^2\theta + \rho^2\operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}^2\theta + (\rho\cos\phi - 1)^2 = 1 \qquad \text{Ecuaciones (1)}$$
$$\rho^2\operatorname{sen}^2\phi\underbrace{(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)}_{1} + \rho^2\cos^2\phi - 2\rho\cos\phi + 1 = 1$$
$$\rho^2\underbrace{(\operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\phi)}_{1} = 2\rho\cos\phi$$
$$\rho^2 = 2\rho\cos\phi$$
$$\rho = 2\cos\phi. \qquad \rho > 0$$

El ángulo ϕ varía desde 0 en el polo norte de la esfera hasta $\pi/2$ en el polo sur; el ángulo θ no aparece en la expresión de ρ, reflejando la simetría con respecto al eje z (vea la figura 15.50). ■

EJEMPLO 4 Determine una ecuación en coordenadas esféricas para el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Solución 1 *Use geometría.* El cono es simétrico con respecto al eje z y corta al primer cuadrante del plano yz a lo largo de la recta $z = y$. Por lo tanto, el ángulo entre el cono y el semieje positivo z es $\pi/4$ radianes. El cono consta de los puntos cuyas coordenadas esféricas tienen ϕ igual a $\pi/4$, de manera que su ecuación es $\phi = \pi/4$. (Vea la figura 15.51).

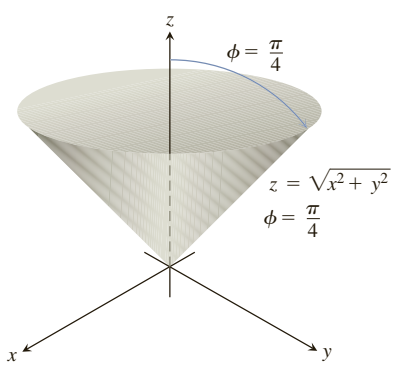


FIGURA 15.51 El cono del ejemplo 4.

Solución 2 *Use álgebra.* Si empleamos las ecuaciones (1) para sustituir x, y y z, obtenemos el mismo resultado:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\rho\cos\phi = \sqrt{\rho^2\operatorname{sen}^2\phi} \qquad \text{Ejemplo 3}$$
$$\rho\cos\phi = \rho\operatorname{sen}\phi \qquad \rho > 0,\ \operatorname{sen}\phi \geq 0$$
$$\cos\phi = \operatorname{sen}\phi$$
$$\phi = \frac{\pi}{4}. \qquad 0 \leq \phi \leq \pi$$

■

Las coordenadas esféricas son útiles para describir esferas con centro en el origen, semiplanos acoplados a lo largo del eje z y conos con vértice en el origen y eje a lo largo del eje z. Superficies como éstas tienen ecuaciones con valores constantes para las coordenadas:

$\rho = 4$ Esfera de radio 4, centro en el origen

$\phi = \dfrac{\pi}{3}$ Cono que abre hacia arriba desde el origen, formando un ángulo de $\pi/3$ radianes con el semieje positivo z

$\theta = \dfrac{\pi}{3}$. Semiplano, acoplado con el eje z, formando un ángulo de $\pi/3$ radianes con el semieje positivo x

Al calcular integrales triples sobre una región D en coordenadas esféricas, dividimos la región en n cuñas esféricas. El tamaño de la k-ésima cuña esférica, que contiene un punto

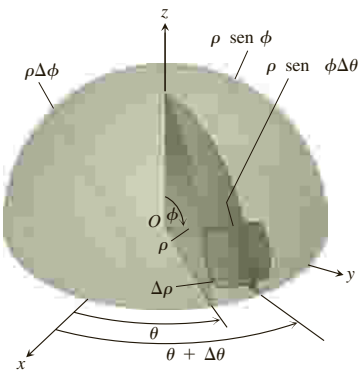


FIGURA 15.52 En coordenadas esféricas usamos el volumen de una cuña esférica que se aproxima mucho a un cubo.

(ρ_k, ϕ_k, θ_k), está dado por los incrementos $\Delta\rho_k$, $\Delta\phi_k$ y $\Delta\theta_k$, en ρ, ϕ y θ. Tal cuña esférica tiene como aristas un arco circular de longitud $\rho_k\ \Delta\phi_k$, y otro arco circular de longitud ρ_k sen $\phi_k\ \Delta\theta_k$; su espesor es $\Delta\rho_k$. La cuña esférica aproxima bien un cubo de las mismas dimensiones, cuando $\Delta\rho_k$, $\Delta\phi_k$ y $\Delta\theta_k$ son pequeños (figura 15.52). Es posible demostrar que el volumen de la cuña esférica ΔV_k es $\Delta V_k = \rho_k^2$ sen $\phi_k\,\Delta\rho_k\,\Delta\phi_k\,\Delta\theta_k$ para un punto $(\rho_k, \phi_k, \theta_k)$ elegido dentro de la cuña.

La suma de Riemann correspondiente para una función $f(\rho, \phi, \theta)$ es

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\rho_k, \phi_k, \theta_k)\,\rho_k^2 \text{ sen } \phi_k\,\Delta\rho_k\,\Delta\phi_k\,\Delta\theta_k.$$

Cuando la norma de la partición tiende a cero y las cuñas esféricas son cada vez más pequeñas, las sumas de Riemann tienen un límite si f es continua:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iiint_D f(\rho, \phi, \theta)\,dV = \iiint_D f(\rho, \phi, \theta)\,\rho^2 \text{ sen } \phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta.$$

Diferencial de volumen en coordenadas esféricas

$dV = \rho^2$ sen $\phi\,dr\,d\phi\,d\theta$

Para evaluar integrales en coordenadas esféricas, por lo general, integramos primero con respecto a ρ. El procedimiento para encontrar los límites de integración es el siguiente. Restringiremos nuestra atención a la integración sobre dominios que son sólidos de revolución alrededor del eje z (o partes de ellos), tales que los límites de θ y ϕ sean constantes. Al igual que con las coordenadas cilíndricas, restringimos θ en la forma $\alpha \le \theta \le \beta$ y $0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$.

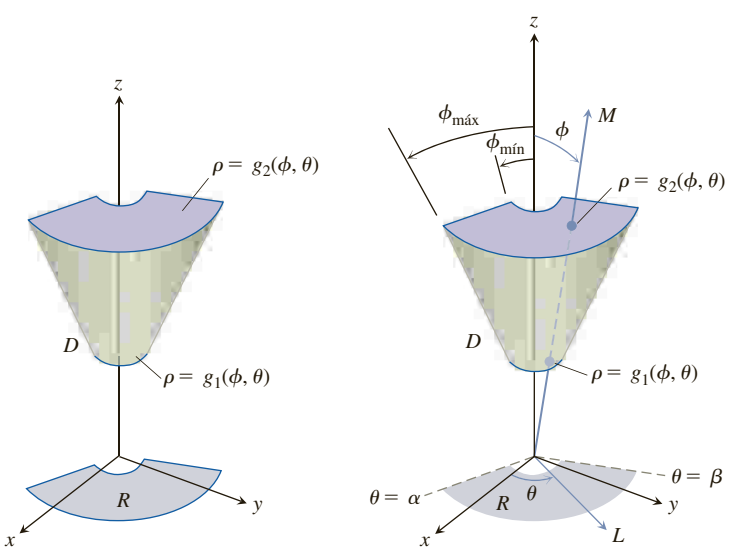
Cómo integrar en coordenadas esféricas

Para evaluar

$$\iiint_D f(\rho, \phi, \theta)\,dV$$

sobre una región D en el espacio en coordenadas esféricas, integrando primero con respecto a ρ, luego con respecto a ϕ, y por último con respecto a θ, siga estos pasos.

1. *Elabore un dibujo*. Trace la región D junto con su proyección R sobre el plano xy. Identifique las superficies que acotan a D.



2. *Determine los límites de integración en* ρ. Trace un rayo M desde el origen hacia D formando un ángulo ϕ con el semieje positivo z. Trace además la proyección de M sobre el plano xy (llámela proyección L). El rayo L forma un ángulo θ con el semieje positivo x. Al crecer ρ, M entra a D en $\rho = g_1(\phi, \theta)$, y sale en $\rho = g_2(\phi, \theta)$. Éstos son los límites de integración en ρ, que se indican en la figura anterior.
3. *Determine los límites de integración en* ϕ. Para cualquier θ dado, el ángulo ϕ que M forma con el eje z va desde $\phi = \phi_{\text{mín}}$ hasta $\phi = \phi_{\text{máx}}$. Éstos son los límites de integración en ϕ.
4. *Determine los límites de integración en* θ. El rayo L barre R cuando θ va de α a β. Éstos son los límites de integración en θ. La integral es

$$\iiint_D f(\rho, \phi, \theta)\, dV = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{\phi=\phi_{\text{mín}}}^{\phi=\phi_{\text{máx}}} \int_{\rho=g_1(\phi,\theta)}^{\rho=g_2(\phi,\theta)} f(\rho, \phi, \theta)\, \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

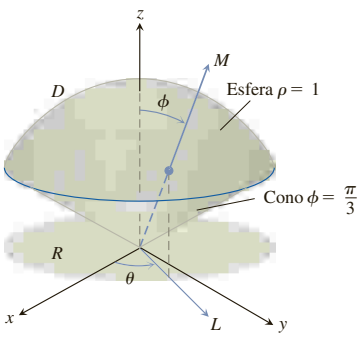


FIGURA 15.53 El cono de helado del ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Calcule el volumen del "cono de helado" D cortado en la esfera sólida $\rho \leq 1$ por el cono $\phi = \pi/3$.

Solución El volumen es $V = \iiint_D \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$, la integral de $f(\rho, \phi, \theta) = 1$ sobre D.

Para determinar los límites de integración y evaluar la integral, comenzamos por dibujar D y su proyección R sobre el plano xy (figura 15.53).

Los límites de integración en ρ. Trazamos un rayo M desde el origen hasta D, de manera que forme un ángulo ϕ con el semieje positivo z. También trazamos L, la proyección de M sobre el plano xy, junto con el ángulo θ que forma L con el semieje positivo x. El rayo M entra a D en $\rho = 0$ y sale en $\rho = 1$.

Los límites de integración en ϕ. El cono $\phi = \pi/3$ forma un ángulo de $\pi/3$ con el semieje positivo z. Para cualquier θ, el ángulo ϕ puede variar desde $\phi = 0$ hasta $\phi = \pi/3$.

Los límites de integración en θ. El rayo L barre R cuando θ va de 0 a 2π. El volumen es

$$V = \iiint_D \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 \operatorname{sen} \phi \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \frac{1}{3} \operatorname{sen} \phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3}\cos \phi\right]_0^{\pi/3} d\theta = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) d\theta = \frac{1}{6}(2\pi) = \frac{\pi}{3}.$$

■

EJEMPLO 6 En el ejemplo 5, un sólido de densidad constante $\delta = 1$ ocupa la región D. Determine el momento de inercia del sólido con respecto al eje z.

Solución En coordenadas rectangulares, el momento es

$$I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)\, dV.$$

En coordenadas esféricas, $x^2 + y^2 = (\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta)^2 + (\rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta)^2 = \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi$. Por lo tanto,

$$I_z = \iiint_D (\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi)\, \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \iiint_D \rho^4 \operatorname{sen}^3 \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

Para la región D del ejemplo 5, esto se convierte en

$$I_z = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^1 \rho^4 \operatorname{sen}^3\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1 \operatorname{sen}^3\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}(1-\cos^2\phi)\operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta = \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\left[-\cos\phi + \frac{\cos^3\phi}{3}\right]_0^{\pi/3} d\theta$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{24}-\frac{1}{3}\right)d\theta = \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\frac{5}{24}d\theta = \frac{1}{24}(2\pi) = \frac{\pi}{12}.$$

■

Fórmulas para transformación de coordenadas

Cilíndricas a rectangulares	Esféricas a rectangulares	Esféricas a cilíndricas
$x = r\cos\theta$	$x = \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta$	$r = \rho\operatorname{sen}\phi$
$y = r\operatorname{sen}\theta$	$y = \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$	$z = \rho\cos\phi$
$z = z$	$z = \rho\cos\phi$	$\theta = \theta$

Fórmulas correspondientes para dV en integrales triples:

$$\begin{aligned} dV &= dx\,dy\,dz \\ &= dz\,r\,dr\,d\theta \\ &= \rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta \end{aligned}$$

En la siguiente sección ofrecemos un procedimiento más general para determinar dV en coordenadas cilíndricas y esféricas. Desde luego, los resultados son los mismos.

Ejercicios 15.7

Evaluación de integrales en coordenadas cilíndricas

Evalúe las integrales en coordenadas cilíndricas de los ejercicios 1 a 6.

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^{\sqrt{2-r^2}} dz\,r\,dr\,d\theta$

2. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{r^2/3}^{\sqrt{18-r^2}} dz\,r\,dr\,d\theta$

3. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\theta/2\pi}\int_0^{3+24r^2} dz\,r\,dr\,d\theta$

4. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\theta/\pi}\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{3\sqrt{4-r^2}} z\,dz\,r\,dr\,d\theta$

5. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^{1/\sqrt{2-r^2}} 3\,dz\,r\,dr\,d\theta$

6. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-1/2}^{1/2}(r^2\operatorname{sen}^2\theta + z^2)\,dz\,r\,dr\,d\theta$

Cambio de orden de integración en coordenadas cilíndricas

Las integrales que hemos visto hasta ahora sugieren que hay órdenes de integración preferidos para las coordenadas cilíndricas, pero es usual que otros órdenes funcionen y que, en ocasiones, sean más fáciles de evaluar. Evalúe las integrales de los ejercicios 7 a 10.

7. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{z/3} r^3\,dr\,dz\,d\theta$

8. $\displaystyle\int_{-1}^1\int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} 4r\,dr\,d\theta\,dz$

9. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{z}}\int_0^{2\pi}(r^2\cos^2\theta + z^2)\,r\,d\theta\,dr\,dz$

10. $\displaystyle\int_0^2\int_{r-2}^{\sqrt{4-r^2}}\int_0^{2\pi}(r\operatorname{sen}\theta + 1)\,r\,d\theta\,dz\,dr$

11. Sea D la región acotada abajo por el plano $z = 0$, arriba por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, y a los lados por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Enuncie las integrales triples en coordenadas cilíndricas que dan el volumen de la región D, usando los siguientes órdenes de integración.

a) $dz\,dr\,d\theta$ ***b***) $dr\,dz\,d\theta$ ***c***) $d\theta\,dz\,dr$

12. Sea D la región acotada abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$. Enuncie las integrales triples en coordenadas cilíndricas que dan el volumen de D usando los siguientes órdenes de integración.

a) $dz\,dr\,d\theta$ ***b***) $dr\,dz\,d\theta$ ***c***) $d\theta\,dz\,dr$

Obtención de integrales iteradas en coordenadas cilíndricas

13. Dé los límites de integración para evaluar la integral

$$\iiint f(r,\theta,z)\,dz\,r\,dr\,d\theta$$

como una integral iterada sobre la región acotada abajo por el plano $z = 0$, a los lados por el cilindro $r = \cos\theta$ y arriba por el paraboloide $z = 3r^2$.

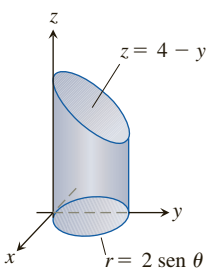
14. Convierta la integral

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{0}^{x}(x^2 + y^2)\,dz\,dx\,dy$$

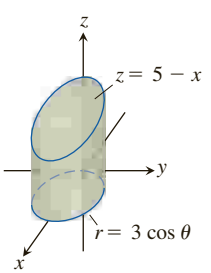
en una integral equivalente en coordenadas cilíndricas y evalúe el resultado.

En los ejercicios 15 a 20, enuncie la integral iterada para evaluar $\iiint_D f(r, \theta, z)\,dz\,r\,dr\,d\theta$ sobre la región D dada.

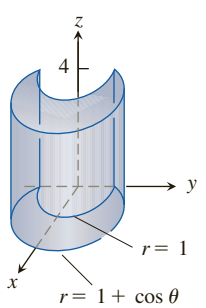
15. D es el cilindro circular recto cuya base es la circunferencia $r = 2\,\text{sen}\,\theta$ en el plano xy y cuya parte superior se encuentra en el plano $z = 4 - y$.



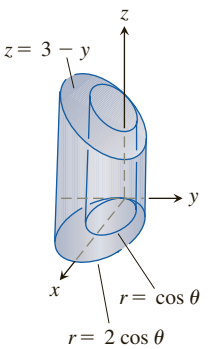
16. D es el cilindro circular recto cuya base es la circunferencia $r = 3\cos\theta$ y cuya parte superior se encuentra en el plano $z = 5 - x$.



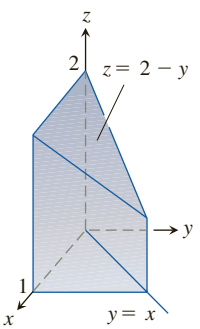
17. D es el cilindro recto sólido cuya base es la región del plano xy que está dentro de la cardioide $r = 1 + \cos\theta$, fuera de la circunferencia $r = 1$, y cuya parte superior se encuentra en el plano $z = 4$.



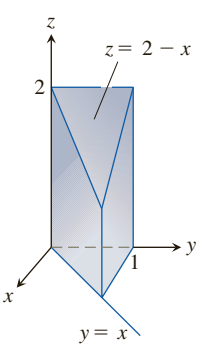
18. D es el cilindro recto sólido cuya base es la región entre las circunferencias $r = \cos\theta$ y $r = 2\cos\theta$, y cuya parte superior se encuentra en el plano $z = 3 - y$.



19. D es el prisma cuya base es el triángulo en el plano xy acotado por el eje x y las rectas $y = x$ y $x = 1$, y cuya parte superior se encuentra en el plano $z = 2 - y$.



20. D es el prisma cuya base es el triángulo en el plano xy acotado por el eje y y las rectas $y = x$ y $y = 1$, y cuya parte superior se encuentra en el plano $z = 2 - x$.



Evaluación de integrales en coordenadas esféricas

Evalúe las integrales en coordenadas esféricas de los ejercicios 21 a 26.

21. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\,\text{sen}\,\phi}\rho^2\,\text{sen}\,\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

22. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2}(\rho\cos\phi)\,\rho^2\,\text{sen}\,\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

23. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{(1-\cos\phi)/2}\rho^2\,\text{sen}\,\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

24. $\displaystyle\int_0^{3\pi/2}\int_0^{\pi}\int_0^{1}5\rho^3\,\text{sen}^3\,\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

25. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_{\sec\phi}^{2}3\rho^2\,\text{sen}\,\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

26. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\phi} (\rho\cos\phi)\,\rho^2\,\text{sen}\,\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

Cambio del orden de integración en coordenadas esféricas

Las integrales anteriores sugieren que hay órdenes de integración preferidos para las coordenadas esféricas, pero existen otros órdenes que, en ocasiones, son más fáciles de evaluar. Evalúe las integrales de los ejercicios 27 a 30.

27. $\displaystyle\int_0^{2}\int_{-\pi}^{0}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \rho^3\,\text{sen}\,2\phi\,d\phi\,d\theta\,d\rho$

28. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3}\int_{\csc\phi}^{2\csc\phi}\int_0^{2\pi} \rho^2\,\text{sen}\,\phi\,d\theta\,d\rho\,d\phi$

29. $\displaystyle\int_0^{1}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/4} 12\rho\,\text{sen}^3\phi\,d\phi\,d\theta\,d\rho$

30. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{\csc\phi}^{2} 5\rho^4\,\text{sen}^3\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$

31. Sea D la región del ejercicio 11. Enuncie las integrales triples en coordenadas esféricas que dan el volumen de D, usando los siguientes órdenes de integración.

a) $d\rho\,d\phi\,d\theta$ ***b***) $d\phi\,d\rho\,d\theta$

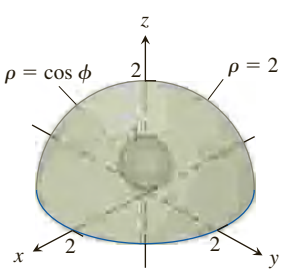
32. Sea D la región acotada abajo por el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y arriba por el plano $z=1$. Enuncie las integrales triples en coordenadas esféricas que determinan el volumen de la región D, con los siguientes órdenes de integración.

a) $d\rho\,d\phi\,d\theta$ ***b***) $d\phi\,d\rho\,d\theta$

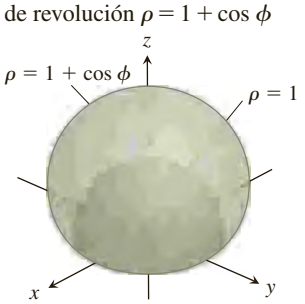
Cálculo de integrales iteradas en coordenadas esféricas

En los ejercicios 33 a 38, ***a***) determine los límites en coordenadas esféricas para la integral que da el volumen del sólido descrito y ***b***) evalúe la integral.

33. El sólido entre la esfera $r=\cos\phi$ y el hemisferio $\rho=2$, $z\ge 0$



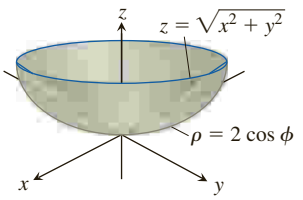
34. El sólido acotado abajo por el hemisferio $\rho=1$, $z\ge 0$ y arriba por la cardioide de revolución $\rho=1+\cos\phi$



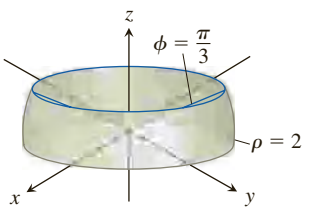
35. El sólido encerrado por la cardioide de revolución $\rho=1-\cos\phi$.

36. La parte superior del sólido del ejercicio 35, cortada por el plano xy.

37. El sólido acotado abajo por la esfera $r=2\cos f$ y arriba por el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$



38. El sólido acotado abajo por el plano xy, a los lados por la esfera $r=2$ y arriba por el cono $f=\pi/3$.



Cálculo de integrales triples

39. Enuncie las integrales triples para el volumen de la esfera $\rho=2$ en coordenadas ***a***) esféricas, ***b***) cilíndricas y ***c***) rectangulares.

40. Sea D la región del primer octante que está acotada abajo por el cono $\phi=\pi/4$ y arriba por la esfera $\theta=3$. Exprese el volumen de la región D como una integral triple iterada en coordenadas ***a***) cilíndricas y ***b***) esféricas. ***c***) Luego, calcule V.

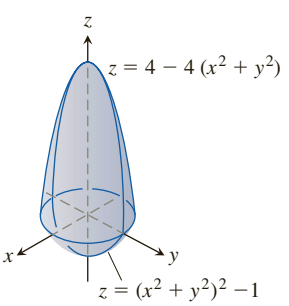
41. Sea D el pequeño casquete de una bola sólida con 2 unidades de radio, cortado por un plano que está a una unidad del centro de la esfera. Exprese el volumen de la región D como una integral triple iterada en coordenadas ***a***) esféricas, ***b***) cilíndricas y ***c***) rectangulares. ***d***) Luego, calcule el volumen evaluando una de las tres integrales triples.

42. Exprese el momento de inercia I_z del hemisferio sólido $x^2+y^2+z^2\le 1$, $z\ge 0$, como una integral iterada en coordenadas ***a***) cilíndricas y ***b***) esféricas. ***c***) Luego, determine I_z.

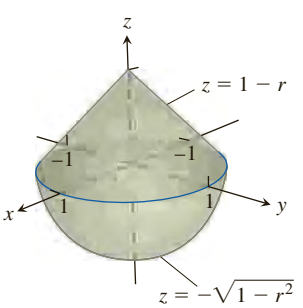
Volúmenes

Calcule los volúmenes de los sólidos de los ejercicios 43 a 48.

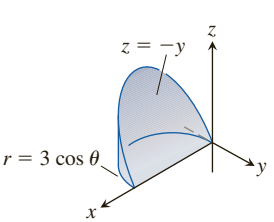
43.



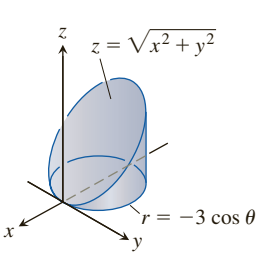
44.



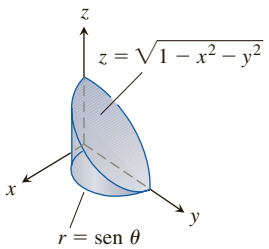
45.



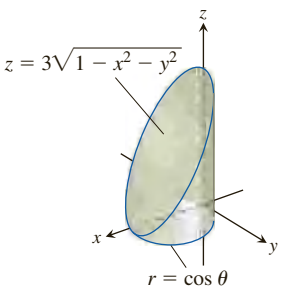
46.



47.



48.



49. Esferas y conos Calcule el volumen de la porción de la esfera sólida $\rho \le a$ que está entre los conos $\phi = \pi/3$ y $\phi = 2\pi/3$.

50. Esferas y semiplanos Calcule el volumen de la región de la esfera sólida $\rho \le a$ cortada por los semiplanos $\theta = 0$ y $\theta = \pi/6$ en el primer octante.

51. Esfera y plano Calcule el volumen de la región más pequeña de la esfera sólida $\rho \le 2$ cortada por el plano $z = 1$.

52. Cono y planos Calcule el volumen del sólido encerrado por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre los planos $z = 1$ y $z = 2$.

53. Cilindro y paraboloide Calcule el volumen de la región acotada abajo por el plano $z = 0$, a los lados por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, y arriba por el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

54. Cilindro y paraboloides Calcule el volumen de la región acotada abajo por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, a los lados por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y arriba por el paraboloide $z = x^2 + y^2 + 1$.

55. Cilindro y conos Calcule el volumen del sólido cortado del cilindro de pared gruesa $1 \le x^2 + y^2 \le 2$ por los conos $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$.

56. Esfera y cilindro Calcule el volumen de la región que está dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ y fuera del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

57. Cilindro y planos Calcule el volumen de la región encerrada por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y por los planos $z = 0$ y $y + z = 4$.

58. Cilindro y planos Calcule el volumen de la región encerrada por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y por los planos $z = 0$ y $x + y + z = 4$.

59. Región entre paraboloides Calcule el volumen de la región acotada arriba por el paraboloide $z = 5 - x^2 - y^2$ y abajo por el paraboloide $z = 4x^2 + 4y^2$.

60. Paraboloide y cilindro Calcule el volumen de la región acotada arriba por el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$, abajo por el plano xy y que está *fuera* del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

61. Cilindro y esfera Calcule el volumen de la región del cilindro sólido $x^2 + y^2 \le 1$ cortada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

62. Esfera y paraboloide Calcule el volumen de la región acotada arriba por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ y abajo por el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

Valores promedio

63. Calcule el valor promedio de la función $f(r, \theta, z) = r$ sobre la región acotada por el cilindro $r = 1$ que se encuentra entre los planos $z = -1$ y $z = 1$.

64. Determine el valor promedio de la función $f(r, \theta, z) = r$ sobre la bola sólida acotada por la esfera $r^2 + z^2 = 1$. (Ésta es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$).

65. Calcule el valor promedio de la función $f(\rho, \phi, \theta) = \rho$ sobre la bola sólida $\rho \le 1$.

66. Calcule el valor promedio de la función $f(\rho, \phi, \theta) = \rho \cos \phi$ sobre la bola superior sólida $\rho \le 1$, $0 \le \phi \le \pi/2$.

Masas, momentos y centroides

67. Centro de masa Un sólido de densidad constante está acotado abajo por el plano $z = 0$, arriba por el cono $z = r$, $r \ge 0$ y a los lados por el cilindro $r = 1$. Determine el centro de masa.

68. Centroide Determine el centroide de la región del primer octante que está acotada arriba por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, abajo por el plano $z = 0$ y a los lados por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y por los planos $x = 0$ y $y = 0$.

69. Centroide Determine el centroide del sólido en el ejercicio 38.

70. Centroide Determine el centroide del sólido acotado arriba por la esfera $\rho = a$ y abajo por el cono $\phi = \pi/4$.

71. Centroide Determine el centroide de la región acotada arriba por la superficie $z = \sqrt{r}$, a los lados por el cilindro $r = 4$ y abajo por el plano xy.

72. Centroide Determine el centroide de la región de la bola sólida $r^2 + z^2 \le 1$ cortada por los semiplanos $\theta = -\pi/3$, $r \ge 0$ y $\theta = \pi/3$, $r \ge 0$.

73. Momento de inercia de un cono sólido Calcule el momento de inercia de un cono circular recto de altura 1 y base de radio 1, con respecto a un eje que pasa por el vértice de forma paralela a la base. (Considere $\delta = 1$).

74. Momento de inercia de una esfera sólida Determine el momento de inercia de una esfera sólida de radio a con respecto a un diámetro. (Considere $\delta = 1$).

75. Momento de inercia de un cono sólido Calcule el momento de inercia de un cono circular recto de altura h y base de radio a, con respecto a su eje. (*Sugerencia:* Coloque el cono con su vértice en el origen y su eje a lo largo del eje z).

76. Densidad variable Un sólido está acotado arriba por el paraboloide $z = r^2$, abajo por el plano $z = 0$ y a los lados por el cilindro $r = 1$. Calcule el centro de masa y el momento de inercia con respecto al eje z si la densidad es

a) $\delta(r, \theta, z) = z$ ***b)*** $\delta(r, \theta, z) = r$.

77. Densidad variable Un sólido está acotado abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el plano $z = 1$. Calcule el centro de masa y el momento de inercia con respecto al eje z, si la densidad es

a) $\delta(r, \theta, z) = z$ ***b)*** $\delta(r, \theta, z) = r^2$.

78. Densidad variable Una bola sólida está acotada arriba por la esfera $\rho = a$. Calcule el momento de inercia con respecto al eje z si la densidad es

a) $\delta(\rho, \phi, \theta) = \rho^2$ ***b)*** $\delta(\rho, \phi, \theta) = r = \rho \operatorname{sen} \phi$.

79. Centroide de un semielipsoide sólido Demuestre que el centroide del semielipsoide de revolución sólido $(r^2/a^2) + (z^2/h^2) \le 1$, $z \ge 0$, se localiza sobre el eje z a $3/8$ del camino de la base a la parte superior. El caso particular $h = a$ da un hemisferio sólido. Así, el centroide de un hemisferio sólido se encuentra en el eje de simetría a $3/8$ del camino de la base a la parte superior.

80. Centroide de un cono sólido Demuestre que el centroide de un cono circular recto sólido se localiza a un cuarto del camino de la base al vértice. (En general, el centroide de un cono sólido o de una pirámide sólida está a un cuarto del camino del centroide de la base al vértice).

81. Densidad del centro de un planeta Un planeta tiene la forma de una esfera de radio R y una masa total M con una distribu-

ción de densidad con simetría esférica que crece linealmente al aproximarse al centro. ¿Cuál es la densidad en el centro de este planeta, si la densidad en la superficie es igual a cero?

82. Masa de la atmósfera de un planeta Un planeta esférico de radio R tiene una atmósfera cuya densidad es $\mu = \mu_0 e^{-ch}$, donde h es la altura sobre la superficie del planeta, μ_0 es la densidad a nivel del mar y c es una constante positiva. Calcule la masa de la atmósfera del planeta.

Teoría y ejemplos

83. Planos verticales en coordenadas cilíndricas

a) Demuestre que los planos perpendiculares al eje x tienen ecuaciones de la forma $r = a \sec\theta$ en coordenadas cilíndricas.

b) Demuestre que los planos perpendiculares al eje y tienen ecuaciones de la forma $r = b \csc\theta$.

84. (*Continuación del ejercicio 83*). Determine una ecuación de la forma $r = f(\theta)$ en coordenadas cilíndricas para el plano $ax + by = c$, $c \neq 0$.

85. Simetría ¿Qué simetría tendrá una superficie con una ecuación de la forma $r = f(z)$ en coordenadas cilíndricas? Justifique su respuesta.

86. Simetría ¿Qué simetría tendrá una superficie con una ecuación de la forma $\rho = f(\phi)$ en coordenadas esféricas? Justifique su respuesta.

15.8 Sustitución en integrales múltiples

El objetivo de esta sección es presentar las ideas implicadas en las transformaciones de coordenadas para evaluar integrales múltiples por sustitución. El método reemplaza integrales complicadas por otras que sean más fáciles de evaluar. Las sustituciones logran esto al simplificar el integrando, los límites de integración, o ambos. Un estudio más profundo de las transformaciones y sustituciones de varias variables se deja para un curso más avanzado, pero esta introducción muestra cómo las sustituciones que acabamos de estudiar reflejan la idea general deducida para el cálculo de integrales simples.

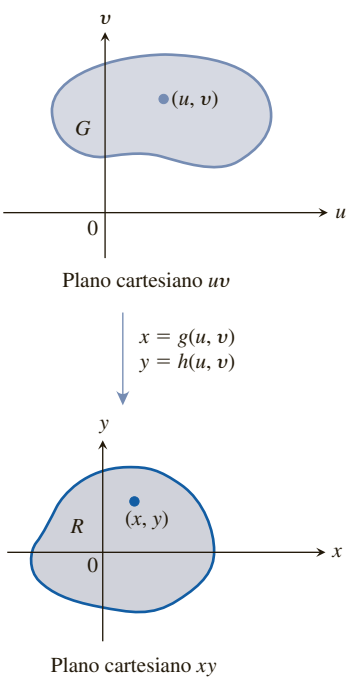


FIGURA 15.54 Las ecuaciones $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$ nos permiten cambiar una integral sobre una región R del plano xy a una integral sobre una región G del plano uv.

Sustituciones en integrales dobles

La sustitución por coordenadas polares de la sección 15.4 es un caso particular de un método más general de sustitución para integrales dobles, un método que representa los cambios de variable como transformaciones de regiones.

Suponga que la región G en el plano uv se transforma en la región R del plano xy mediante ecuaciones de la forma

$$x = g(u, v), \qquad y = h(u, v),$$

como sugiere la figura 15.54. Se supone que la transformación es uno a uno en el interior de G. Llamamos a R la **imagen** de G bajo la transformación, y G es la **preimagen** de R. Cualquier función $f(x, y)$ definida en R se considera como una función $f(g(u, v), h(u, v))$ también definida en G. ¿Cuál es la relación entre la integral de $f(x, y)$ sobre R con la integral de $f(g(u, v), h(u, v))$ sobre G?

Para responder esta pregunta, repasemos el caso de una sola variable. Para ser consistentes en su uso, intercambiamos las variables x y u empleadas en el método de sustitución para integrales de una variable única en el capítulo 5; de esta forma, ahora la ecuación se enuncia como

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(g(u))\,g'(u)\,du. \qquad x = g(u),\ dx = g'(u)\,du$$

Si deseamos proponer un método similar para la sustitución en una integral doble $\iint_R f(x, y)\,dx\,dy$, necesitamos un factor de derivación $g'(u)$ como un multiplicador que transforma el elemento de área $du\,dv$ en la región G en su correspondiente elemento de área $dx\,dy$ en la región R. Denotamos este factor con J. Para continuar con la analogía, es razonable suponer que J es una función de ambas variables, u y v, así como g' es una función de la variable única u. Además, J debería registrar el cambio instantáneo, así que habrá derivadas parciales implicadas en esta expresión. Puesto que están asociadas cuatro derivadas parciales en las ecuaciones de transformación $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$, también es razonable suponer que el factor que buscamos $J(u, v)$ las incluye. Estas características se consideran en la siguiente definición elaborada a partir de las derivadas parciales y nombrada en honor del matemático alemán Carl Jacobi.

DEFINICIÓN El **jacobiano** o **determinante jacobiano** de la transformación de coordenadas $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$ es

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}. \tag{1}$$

El jacobiano se denota también como

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

para ayudarnos a recordar la construcción del determinante de la ecuación (1) a partir de las derivadas parciales de x y y. El determinante de las derivadas parciales se comporta como la derivada g' en la situación de una sola variable. El jacobiano mide qué tanto la transformación expande o contrae el área alrededor del punto (u, v). Efectivamente, el factor $|J|$ convierte el área del rectángulo diferencial $du\,dv$ en G para hacerlo corresponder con su diferencial de área $dx\,dy$ en R. Observe que, en general, el valor del factor de escalamiento $|J|$ depende del punto (u, v) en G. Nuestros ejemplos le seguirán mostrando cómo se escala el elemento diferencial de área $du\,dv$ para transformaciones específicas.

Con la definición del determinante jacobiano, podemos responder la pregunta inicial concerniente a la relación de la integral de $f(x, y)$ sobre R con la integral de $f(g(u, v), h(u, v))$ sobre G.

Diferencial de área para la sustitución

$$x = g(u, v), y = h(u, v)$$

$$dx\,dy = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv$$

TEOREMA 3 Sustitución para integrales dobles Suponga que $f(x, y)$ es continua sobre la región R. Sea G la preimagen de R bajo la transformación $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$, que se supone uno a uno en el interior de G. Si las funciones g y h tienen primeras derivadas parciales continuas en el interior de G, entonces,

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \iint_G f(g(u, v), h(u, v)) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv. \tag{2}$$

La deducción de la ecuación (2) es intrincada y corresponde a un curso de cálculo avanzado, por lo que en este libro no la incluiremos. Ahora presentaremos ejemplos que ilustran el método de sustitución definido en la ecuación.

EJEMPLO 1 Determine el jacobiano para la transformación de las coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, y use la ecuación (2) para escribir la integral cartesiana $\iint_R f(x, y)\,dx\,dy$ como una integral polar.

Solución La figura 15.55 muestra la forma en que las ecuaciones $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ transforman el rectángulo G: $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le \pi/2$, en el cuarto de círculo R, acotado por $x^2 + y^2 = 1$ en el primer cuadrante del plano xy.

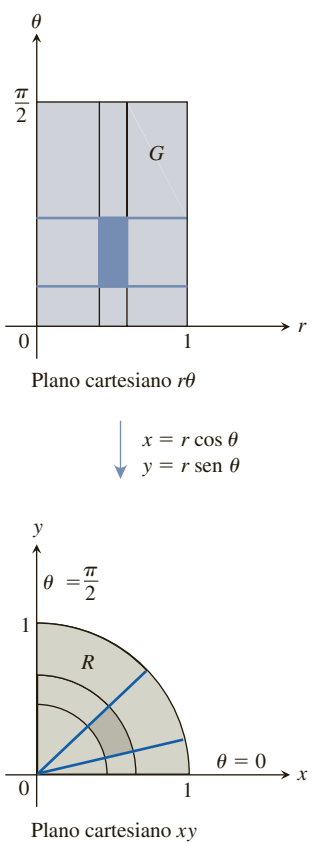


FIGURA 15.55 Las ecuaciones $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ transforman G en R. El factor jacobiano r, calculado en el ejemplo 1, escala el rectángulo diferencial $dr\,d\theta$ en G para hacerlo corresponder con el elemento diferencial de área $dx\,dy$ en R.

Para coordenadas polares, tenemos r y θ en vez de u y v. Con $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$, el jacobiano es

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) = r.$$

Puesto que suponemos que $r \geq 0$ cuando integramos en coordenadas polares, $|J(r,\theta)| = |r| = r$, de manera que la ecuación (2) da

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_G f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\,r\,dr\,d\theta. \tag{3}$$

Ésta es la misma fórmula que obtuvimos de forma independiente considerando un argumento geométrico para el área polar en la sección 15.4.

Observe que la integral del lado derecho de la ecuación (3) no es la integral de $f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$ sobre una región en el plano de coordenadas polares. Ésta es la integral del producto de $f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$ y r sobre una región G en el plano *cartesiano* $r\theta$. ■

He aquí un ejemplo de una sustitución en la cual la imagen de un rectángulo según la transformación de coordenadas es un trapezoide. Transformaciones como ésta se llaman **transformaciones lineales** y sus jacobianos son constantes en todo punto de G.

EJEMPLO 2 Evalúe

$$\int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \frac{2x - y}{2}\,dx\,dy$$

aplicando la transformación

$$u = \frac{2x - y}{2}, \qquad v = \frac{y}{2} \tag{4}$$

e integrando sobre una región adecuada en el plano uv.

Solución Trazamos la región de integración R en el plano xy e identificamos sus fronteras (figura 15.56).

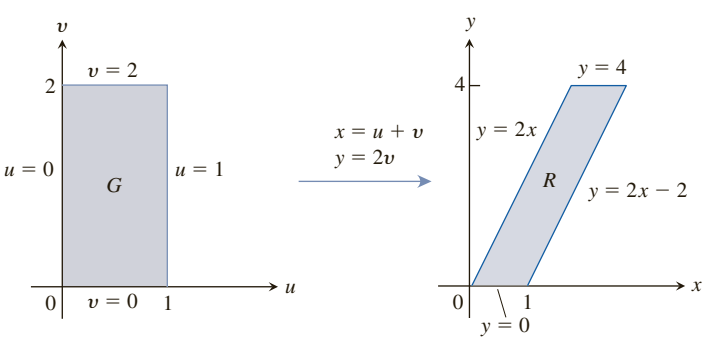


FIGURA 15.56 Las ecuaciones $x = u + v$ y $y = 2v$ transforman G en R. Se invierte la transformación mediante las ecuaciones $u = (2x - y)/2$ y $v = y/2$, entonces, R se transforma en G (ejemplo 2).

Para aplicar la ecuación (2) necesitamos conocer la región G correspondiente del plano uv y el jacobiano de la transformación. Para obtenerlos, primero despejamos x y y de las ecuaciones (4) en términos de u y v. Al aplicar algo de álgebra, se obtiene

$$x = u + v, \qquad y = 2v. \tag{5}$$

Luego, determinamos las fronteras de G al sustituir estas expresiones en las ecuaciones para las fronteras de R (figura 15.56).

Ecuaciones de la frontera de R en el plano xy	Ecuaciones correspondientes de la frontera de G en el plano uv	Ecuaciones simplificadas en uv
$x = y/2$	$u + v = 2v/2 = v$	$u = 0$
$x = (y/2) + 1$	$u + v = (2v/2) + 1 = v + 1$	$u = 1$
$y = 0$	$2v = 0$	$v = 0$
$y = 4$	$2v = 4$	$v = 2$

De acuerdo con las ecuaciones (5), el jacobiano de la transformación es

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u}(u + v) & \dfrac{\partial}{\partial v}(u + v) \\ \dfrac{\partial}{\partial u}(2v) & \dfrac{\partial}{\partial v}(2v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Ahora tenemos todo lo necesario para aplicar la ecuación (2):

$$\int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \frac{2x - y}{2} dx\, dy = \int_{v=0}^{v=2} \int_{u=0}^{u=1} u\, |J(u, v)|\, du\, dv$$

$$= \int_0^2 \int_0^1 (u)(2)\, du\, dv = \int_0^2 \Big[u^2\Big]_0^1 dv = \int_0^2 dv = 2. \quad \blacksquare$$

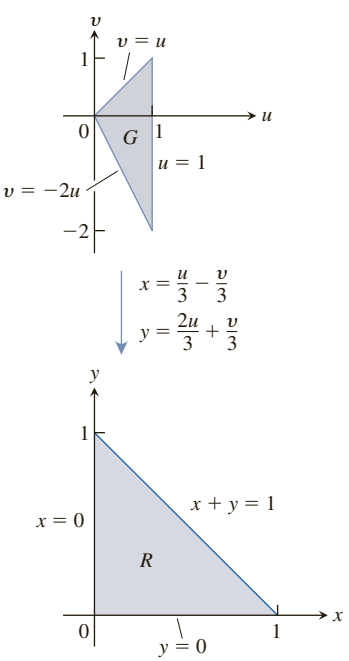


FIGURA 15.57 Las ecuaciones $x = (u/3) - (v/3)$ y $y = (2u/3) + (v/3)$ transforman G en R. Al invertir la transformación mediante las ecuaciones $u = x + y$ y $v = y - 2x$, se transforma R en G (ejemplo 3).

EJEMPLO 3 Evalúe

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x + y}\,(y - 2x)^2\, dy\, dx.$$

Solución Trazamos la región de integración R en el plano xy e identificamos sus fronteras (figura 15.57). El integrando sugiere la transformación $u = x + y$ y $v = y - 2x$. El álgebra de rutina produce x y y como funciones de u y v:

$$x = \frac{u}{3} - \frac{v}{3}, \qquad y = \frac{2u}{3} + \frac{v}{3}. \tag{6}$$

Las ecuaciones (6) nos permiten encontrar las fronteras de la región G en el plano uv (figura 15.57).

Ecuaciones de la frontera de R en el plano xy	Ecuaciones correspondientes de la frontera de G en el plano uv	Ecuaciones simplificadas en uv
$x + y = 1$	$\left(\dfrac{u}{3} - \dfrac{v}{3}\right) + \left(\dfrac{2u}{3} + \dfrac{v}{3}\right) = 1$	$u = 1$
$x = 0$	$\dfrac{u}{3} - \dfrac{v}{3} = 0$	$v = u$
$y = 0$	$\dfrac{2u}{3} + \dfrac{v}{3} = 0$	$v = -2u$

El jacobiano de la transformación de las ecuaciones (6) es

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}.$$

Al aplicar la ecuación (2), evaluamos la integral:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x + y}\,(y - 2x)^2\, dy\, dx &= \int_{u=0}^{u=1} \int_{v=-2u}^{v=u} u^{1/2} v^2 \, |J(u, v)| \, dv\, du \\ &= \int_0^1 \int_{-2u}^{u} u^{1/2} v^2 \left(\frac{1}{3}\right) dv\, du = \frac{1}{3} \int_0^1 u^{1/2} \left[\frac{1}{3} v^3\right]_{v=-2u}^{v=u} du \\ &= \frac{1}{9} \int_0^1 u^{1/2}(u^3 + 8u^3)\, du = \int_0^1 u^{7/2}\, du = \frac{2}{9} u^{9/2} \Big]_0^1 = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

■

En el siguiente ejemplo ilustramos una transformación no lineal de coordenadas, que se obtiene de la simplificación del integrando. Al igual que en la transformación de las coordenadas polares, las transformaciones no lineales pueden convertir la línea recta de la frontera de una región en una frontera curva (o viceversa, si se efectúa la transformación en sentido contrario). En general, las transformaciones no lineales son más complejas de analizar que las lineales, y su estudio completo se deja para un curso más avanzado.

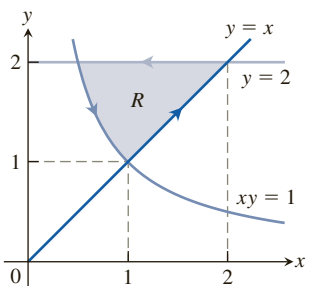


FIGURA 15.58 La región de integración R del ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Evalúe la integral

$$\int_1^2 \int_{1/y}^{y} \sqrt{\frac{y}{x}}\, e^{\sqrt{xy}}\, dx\, dy.$$

Solución Los términos de raíz cuadrada en el integrando sugieren que podríamos simplificar la integración al sustituir $u = \sqrt{xy}$ y $v = \sqrt{x/y}$. Si elevamos al cuadrado estas ecuaciones, fácilmente obtenemos $u^2 = xy$ y $v^2 = y/x$, lo cual implica que $u^2v^2 = y^2$ y $u^2/v^2 = x^2$. Entonces, obtenemos la transformación (en el mismo orden de las variables ya analizadas)

$$x = \frac{u}{v} \qquad \text{y} \qquad y = uv,$$

con $u > 0$ y $v > 0$. Primero veamos qué sucede con el integrando mismo al realizar esta transformación. El jacobiano de la transformación no es constante y encontramos

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ v & u \end{vmatrix} = \frac{2u}{v}.$$

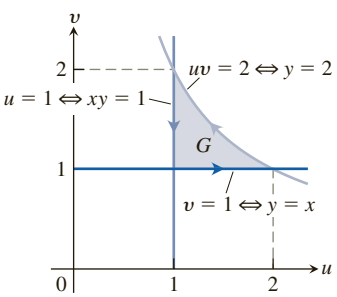


FIGURA 15.59 Las fronteras de la región G corresponden a aquellas regiones de R en la figura 15.58. Observe que cuando nos movemos en sentido contrario a las manecillas del reloj en la región R, también nos movemos en sentido contrario a las manecillas del reloj en la región G. Las ecuaciones de transformación inversa $u = \sqrt{xy}$ y $v = \sqrt{x/y}$, generan la región G a partir de la región R.

Si G es la región de integración en el plano uv, entonces, al aplicar la ecuación (2), la integral doble transformada por la sustitución es

$$\iint_R \sqrt{\frac{y}{x}}\, e^{\sqrt{xy}}\, dx\, dy = \iint_G v e^u \frac{2u}{v}\, du\, dv = \iint_G 2ue^u\, du\, dv.$$

El integrando transformado es más fácil de integrar que el original, de manera que procedemos a determinar los límites de integración de la integral transformada.

La región de integración R de la integral original en el plano xy se muestra en la figura 15.58. A partir de las ecuaciones de sustitución $u = \sqrt{xy}$ y $v = \sqrt{x/y}$, vemos que la imagen de la frontera de la izquierda $xy = 1$ para R es el segmento de recta vertical $u = 1$, $2 \geq v \geq 1$, en G (vea la figura 15.59). Asimismo, la frontera de la derecha $y = x$ de R tiene por imagen al segmento de recta horizontal $v = 1$, $1 \leq u \leq 2$, en G. Por último, la frontera horizontal

superior $y = 2$ de R tiene por imagen a $uv = 2$, $1 \le v \le 2$, en G. Cuando nos movemos en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de la frontera de la región R, también nos movemos en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de la frontera de G, como se indica en la figura 15.59. Si conocemos la región de integración G en el plano uv, escribimos las integrales iteradas equivalentes:

$$\int_1^2 \int_{1/y}^{y} \sqrt{\frac{y}{x}}\, e^{\sqrt{xy}}\, dx\, dy = \int_1^2 \int_1^{2/u} 2ue^u\, dv\, du. \qquad \text{Observe el orden de integración.}$$

Ahora evaluamos la integral transformada del lado derecho,

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \int_1^{2/u} 2ue^u\, dv\, du &= 2\int_1^2 \Big[vue^u \Big]_{v=1}^{v=2/u} du \\
&= 2\int_1^2 (2e^u - ue^u)\, du \\
&= 2\int_1^2 (2 - u)e^u\, du \\
&= 2\Big[(2 - u)e^u + e^u \Big]_{u=1}^{u=2} \qquad \text{Se integra por partes.} \\
&= 2(e^2 - (e + e)) = 2e(e - 2). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Sustitución en integrales triples

Las sustituciones por coordenadas cilíndricas y esféricas de la sección 15.7 son casos particulares de un método de sustitución que representa los cambios de variable en las integrales triples como transformaciones de regiones tridimensionales. El método es similar al de las integrales dobles de la ecuación 2, excepto que ahora trabajamos con tres dimensiones en vez de dos.

Suponga que una región G del espacio uvw se transforma de manera inyectiva en la región D del espacio xyz mediante ecuaciones diferenciables de la forma

$$x = g(u, v, w), \qquad y = h(u, v, w), \qquad z = k(u, v, w),$$

como sugiere la figura 15.60. Entonces, cualquier función $F(x, y, z)$ definida en D se considera como una función

$$F(g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)) = H(u, v, w)$$

definida en G. Si g, h y k tienen primeras derivadas parciales continuas, entonces, la integral de $F(x, y, z)$ sobre D se relaciona con la integral de $H(u, v, w)$ sobre G mediante la ecuación

$$\iiint_D F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_G H(u, v, w)\,|J(u, v, w)|\, du\, dv\, dw. \tag{7}$$

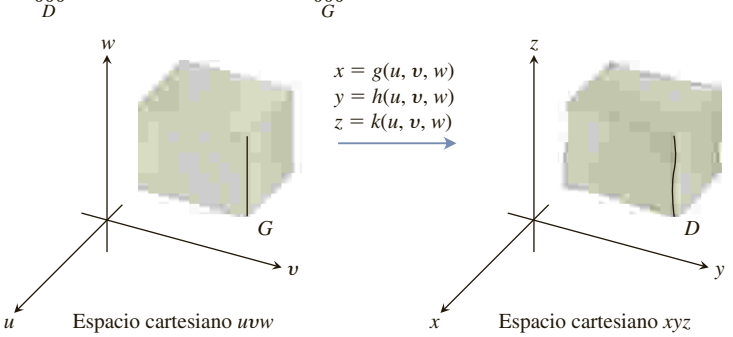


FIGURA 15.60 Las ecuaciones $x = g(u, v, w)$, $y = h(u, v, w)$ y $z = k(u, v, w)$ permiten cambiar una integral sobre una región D en el espacio cartesiano xyz por una integral sobre una región G en el espacio cartesiano uvw usando la ecuación (7).

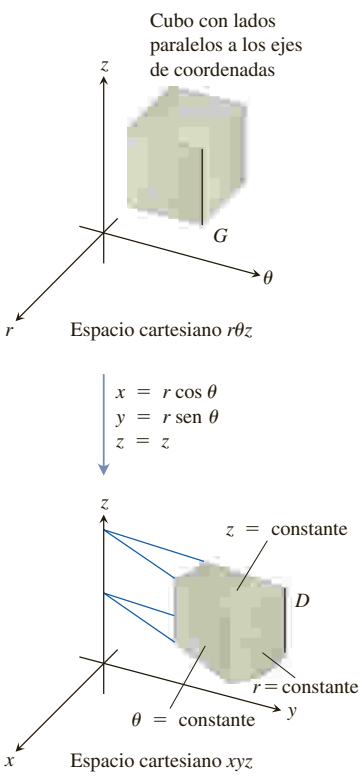


FIGURA 15.61 Las ecuaciones $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ y $z = z$ transforman el cubo G en una cuña cilíndrica D.

El factor $J(u, v, w)$, cuyo valor absoluto aparece en esta ecuación, es el **determinante jacobiano**

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}.$$

Este determinante mide la razón con la que la transformación de coordenadas (u, v, w) a (x, y, z) expande o contrae el volumen cerca de un punto en G. Como en el caso bidimensional, se omite la deducción de la fórmula de cambio de variable de la ecuación (7).

Para coordenadas cilíndricas, tenemos r, θ y z en lugar de u, v y w. La transformación del espacio cartesiano $r\theta z$ al espacio cartesiano xyz está dada por las ecuaciones

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta, \qquad z = z$$

(figura 15.61). El jacobiano de la transformación es

$$J(r, \theta, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= r\cos^2\theta + r\,\text{sen}^2\,\theta = r.$$

La versión correspondiente de la ecuación (7) es

$$\iiint_D F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_G H(r, \theta, z)|r|\,dr\,d\theta\,dz.$$

Podemos eliminar los símbolos de valor absoluto siempre que $r \geq 0$.

Para coordenadas esféricas, tenemos ρ, ϕ y θ en lugar de u, v y w. La transformación del espacio cartesiano $\rho\phi\theta$ al espacio cartesiano xyz está dada por

$$x = \rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta, \qquad y = \rho\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta, \qquad z = \rho\cos\phi$$

(figura 15.62). El jacobiano de la transformación es (vea el ejercicio 23)

$$J(\rho, \phi, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \rho^2\,\text{sen}\,\phi.$$

La versión correspondiente de la ecuación (7) es

$$\iiint_D F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_G H(\rho, \phi, \theta)\,|\rho^2\,\text{sen}\,\phi\,|\,d\rho\,d\phi\,d\theta.$$

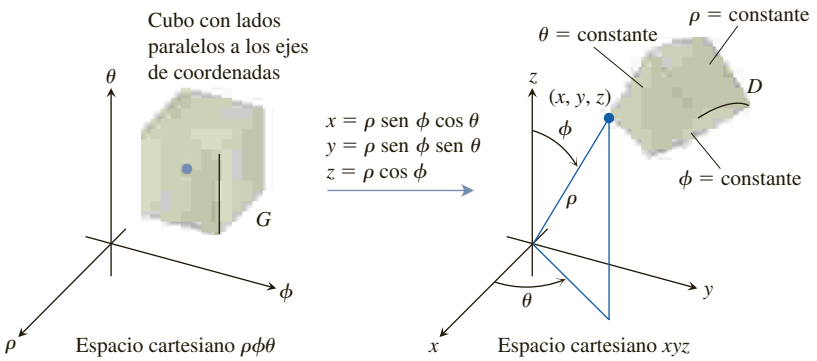


FIGURA 15.62 Las ecuaciones $x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta$, $x = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$ y $z = \rho \cos \phi$ transforman el cubo G en la cuña esférica D.

Podemos eliminar los símbolos de valor absoluto porque sen ϕ nunca es negativo para $0 \leq \phi \leq \pi$. Observe que es el mismo resultado que se obtuvo en la sección 15.7.

He aquí un ejemplo de otra sustitución. Aunque podríamos evaluar la integral del ejemplo en forma directa, la elegimos para ilustrar el método de sustitución en un caso sencillo (y bastante intuitivo).

EJEMPLO 5 Evalúe

$$\int_0^3 \int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \left(\frac{2x - y}{2} + \frac{z}{3} \right) dx\, dy\, dz$$

aplicando la transformación

$$u = (2x - y)/2, \qquad v = y/2, \qquad w = z/3 \tag{8}$$

e integrando sobre una región adecuada en el espacio uvw.

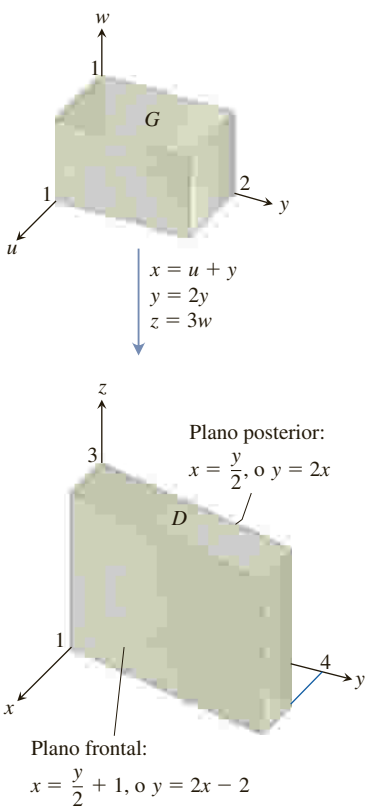


FIGURA 15.63 Las ecuaciones $x = u + v$, $y = 2v$ y $z = 3w$ transforman G en D. Si se invierte la transformación mediante las ecuaciones $u = (2x - y)/2$, $v = y/2$ y $w = z/3$, entonces, D se transforma en G (ejemplo 5).

Solución Trazamos la región de integración D en el espacio xyz e identificamos sus fronteras (figura 15.63). En este caso, las superficies de la frontera son planos.

Para aplicar la ecuación (7), necesitamos encontrar la región G correspondiente del espacio uvw y el jacobiano de la transformación. Para encontrarlos, primero despejamos x, y y z de las ecuaciones (8) en términos de u, v y w. Después de realizar un poco de álgebra, tenemos

$$x = u + v, \qquad y = 2v, \qquad z = 3w. \tag{9}$$

Luego, obtenemos las fronteras de G al sustituir estas expresiones en las ecuaciones de las fronteras de D:

Ecuaciones de la frontera de D en el espacio xyz	**Ecuaciones correspondientes de la frontera de G en el espacio uvw**	**Ecuaciones simplificadas en el espacio uvw**
$x = y/2$	$u + v = 2v/2 = v$	$u = 0$
$x = (y/2) + 1$	$u + v = (2v/2) + 1 = v + 1$	$u = 1$
$y = 0$	$2v = 0$	$v = 0$
$y = 4$	$2v = 4$	$v = 2$
$z = 0$	$3w = 0$	$w = 0$
$z = 3$	$3w = 3$	$w = 1$

De nuevo, por las ecuaciones (9), el jacobiano de la transformación es

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

Ahora tenemos todo lo necesario para aplicar la ecuación (7):

$$\begin{aligned} &\int_0^3 \int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \left(\frac{2x - y}{2} + \frac{z}{3}\right) dx\, dy\, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^1 (u + w)\, |J(u, v, w)|\, du\, dv\, dw \\ &= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^1 (u + w)(6)\, du\, dv\, dw = 6 \int_0^1 \int_0^2 \left[\frac{u^2}{2} + uw\right]_0^1 dv\, dw \\ &= 6 \int_0^1 \int_0^2 \left(\frac{1}{2} + w\right) dv\, dw = 6 \int_0^1 \left[\frac{v}{2} + vw\right]_0^2 dw = 6 \int_0^1 (1 + 2w)\, dw \\ &= 6 \left[w + w^2\right]_0^1 = 6(2) = 12. \end{aligned}$$

Ejercicios 15.8

Cálculo de jacobianos y regiones transformadas en el plano

1. ***a***) Resuelva el sistema

$$u = x - y, \qquad v = 2x + y$$

para despejar x y y en términos de u y v. Luego, obtenga el valor del jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$.

b) Encuentre la imagen bajo la transformación $u = x - y$, $v = x + y$ de la región triangular con vértices (0, 0), (1, 1) y (1, −2) en el plano xy. Trace la región transformada en el plano uv.

2. ***a***) Resuelva el sistema

$$u = x + 2y, \qquad v = x - y$$

para x y y en términos de u y v. Luego, encuentre el valor del jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$.

b) Encuentre la imagen bajo la transformación $u = x + 2y$, $v = x - y$ de la región triangular en el plano xy acotada por las rectas $y = 0$, $y = x$, y $x + 2y = 2$. Trace la región transformada en el plano uv.

3. ***a***) Resuelva el sistema

$$u = 3x + 2y, \qquad v = x + 4y$$

para despejar x y y en términos de u y v. Luego, halle el valor del jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$.

b) Encuentre la imagen bajo la transformación $u = 3x + 2y$, $v = x + 4y$ de la región triangular en el plano xy acotada por el eje x, el eje y y la recta $x + y = 1$. Trace la región transformada en el plano uv.

4. ***a***) Resuelva el sistema

$$u = 2x - 3y, \qquad v = -x + y$$

para despejar x y y en términos de u y v. Luego, obtenga el valor del jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$.

b) Encuentre la imagen bajo la transformación $u = 2x - 3y$, $v = -x + y$ del paralelogramo R en el plano xy con fronteras $x = -3$, $x = 0$, $y = x$ y $y = x + 1$. Trace la región transformada en el plano uv.

Sustituciones en integrales dobles

5. Evalúe la integral

$$\int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=(y/2)+1} \frac{2x - y}{2} dx\, dy$$

del ejemplo 1 por integración directa con respecto a x y y para confirmar que su valor es 2.

6. Considerando la transformación del ejercicio 1, evalúe la integral

$$\iint_R (2x^2 - xy - y^2)\, dx\, dy$$

para la región R del primer cuadrante, acotada por las rectas $y = -2x + 4$, $y = -2x + 7$, $y = x - 2$ y $y = x + 1$.

7. Considerando la transformación del ejercicio 3, evalúe la integral

$$\iint_R (3x^2 + 14xy + 8y^2)\, dx\, dy$$

para la región R del primer cuadrante, acotada por las rectas $y = -(3/2)x + 1$, $y = -(3/2)x + 3$ $y = -(1/4)x$ y $y = -(1/4)x + 1$.

8. Considere la transformación y el paralelogramo R del ejercicio 4 para evaluar la integral

$$\iint_R 2(x - y)\, dx\, dy.$$

9. Sea R la región del primer cuadrante del plano xy, acotada por las hipérbolas $xy = 1$, $xy = 9$, y las rectas $y = x$, $y = 4x$. Use la transformación $x = u/v$, $y = uv$, con $u > 0$ y $v > 0$ para replantear

$$\iint_R \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy}\right) dx\, dy$$

como una integral sobre una región adecuada G del plano uv. Luego, evalúe la integral en uv sobre G.

10. ***a)*** Calcule el jacobiano de la transformación $x = u$, $y = uv$ y dibuje la región G: $1 \le u \le 2$, $1 \le uv \le 2$, en el plano uv.

b) Use la ecuación (2) para transformar la integral

$$\int_1^2 \int_1^2 \frac{y}{x} dy\, dx$$

en una integral sobre G, y evalúe ambas integrales.

11. Momento polar de inercia de una placa elíptica Una placa delgada de densidad constante cubre la región acotada por la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a > 0$, $b > 0$, en el plano xy. Calcule el primer momento de la placa con respecto al origen. (*Sugerencia:* Considere la transformación $x = ar\cos\theta$, $y = br\,\text{sen}\,\theta$).

12. El área de una elipse El área πab de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ se puede encontrar integrando la función $f(x, y) = 1$ sobre la región acotada por la elipse en el plano xy. La evaluación directa de la integral requiere una sustitución trigonométrica. Una forma más sencilla de evaluarla consiste en usar la transformación $x = au$, $y = bv$ y evaluar la integral transformada sobre el disco G: $u^2 + v^2 \le 1$ en el plano uv. Encuentre el área de esta forma.

13. Considere la transformación del ejercicio 2 para evaluar la integral

$$\int_0^{2/3} \int_y^{2-2y} (x + 2y)e^{(y-x)}\, dx\, dy$$

escribiéndola primero como una integral sobre una región G en el plano uv.

14. Considere la transformación $x = u + (1/2)v$, $y = v$ para evaluar la integral

$$\int_0^2 \int_{y/2}^{(y+4)/2} y^3(2x - y)e^{(2x-y)^2}\, dx\, dy$$

escribiéndola primero como una integral sobre una región G en el plano uv.

15. Considere la transformación $x = u/v$, $y = uv$ para evaluar la suma integral

$$\int_1^2 \int_{1/y}^{y} (x^2 + y^2)\, dx\, dy + \int_2^4 \int_{y/4}^{4/y} (x^2 + y^2)\, dx\, dy.$$

16. Considere la transformación $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ para evaluar la integral

$$\int_0^1 \int_0^{2\sqrt{1-x}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dy\, dx.$$

[*Sugerencia:* Demuestre que la imagen de la región triangular G con vértices (0, 0), (1, 0), (1, 1) en el plano uv es la región de integración R en el plano xy definida por los límites de integración].

Sustituciones en integrales simples

17. Evalúe la integral del ejemplo 5 integrando con respecto a x, y y z.

18. Volumen de un elipsoide Calcule el volumen del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

(*Sugerencia:* Sean $x = au$, $y = bv$ y $z = cw$. Después, encuentre el volumen de una región adecuada en el espacio uvw).

19. Evalúe

$$\iiint |xyz|\, dx\, dy\, dz$$

sobre el elipsoide sólido

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1.$$

(*Sugerencia:* Sean $x = au$, $y = bv$ y $z = cw$. Luego, integre sobre una región adecuada en el espacio uvw).

20. Sea D una región en el espacio xyz definida por las desigualdades

$$1 \le x \le 2, \quad 0 \le xy \le 2, \quad 0 \le z \le 1.$$

Evalúe

$$\iiint_D (x^2y + 3xyz)\, dx\, dy\, dz$$

utilizando la transformación

$$u = x, \quad v = xy, \quad w = 3z$$

e integrando sobre una región adecuada G en el espacio uvw.

Teoría y ejemplos

21. Determine el jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ de las transformaciones

a) $x = u\cos v$, $y = u\,\text{sen}\,v$

b) $x = u\,\text{sen}\,v$, $y = u\cos v$.

22. Determine el jacobiano $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$ de las transformaciones

a) $x = u\cos v$, $y = u\,\text{sen}\,v$, $z = w$

b) $x = 2u - 1$, $y = 3v - 4$, $z = (1/2)(w - 4)$.

23. Evalúe el determinante adecuado para demostrar que el jacobiano de la transformación desde el espacio cartesiano $\rho\phi\theta$ al espacio cartesiano xyz es $\rho^2 \operatorname{sen} \phi$.

24. Sustitución en integrales de una variable ¿Cómo pueden considerarse las sustituciones de integrales definidas de una variable como transformaciones de regiones? ¿Cuál es el jacobiano en ese caso? Ilustre con un ejemplo.

25. Centroide de un semielipsoide sólido Suponga que el centroide de un hemisferio sólido se encuentra sobre el eje de simetría, a $3/8$ de distancia de la base a la parte superior; demuestre, transformando las integrales adecuadas, que el centro de masa de un semielipsoide sólido $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) \leq 1$, $z \geq 0$, está sobre el eje z a $3/8$ de la distancia de la base a la parte superior. (Demuéstrelo sin evaluar las integrales).

26. Capas cilíndricas En la sección 6.2 aprendimos a calcular el volumen de un sólido de revolución mediante el método de casquillos; a saber, si la región entre la curva $y = f(x)$ y el eje x de a a b $(0 < a < b)$ gira en torno al eje y, el volumen del sólido resultante es $\int_a^b 2\pi x f(x)\, dx$. Demuestre que el cálculo de los volúmenes mediante integrales triples da el mismo resultado. (*Sugerencia:* Emplee coordenadas cilíndricas, intercambiando los papeles de y y z).

27. Transformación inversa Las ecuaciones $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$ en la figura 15.54 transforman la región G del plano uv en la región R en el plano xy. Puesto que la transformación de sustitución es uno a uno con primeras derivadas parciales continuas, se tiene una transformación inversa y las ecuaciones $u = a(x, y)$, $v = b(x, y)$ con primeras derivadas parciales continuas que transforman R de nuevo a G. Además, los determinantes jacobianos de la transformación están relacionados de forma recíproca por

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right)^{-1}. \tag{10}$$

En cursos de cálculo avanzado se demuestra la ecuación (10). Utilícela para determinar el área de la región R en el primer cuadrante del plano xy acotado por las rectas $y = 2x$, $2y = x$, y las curvas $xy = 2$, $2xy = 1$ para $u = xy$ y $v = y/x$.

28. (*Continuación del ejercicio 27*). Para la región R descrita en el ejercicio 27, evalué la integral $\iint_R y^2\, dA$.

Capítulo 15 Preguntas de repaso

1. Defina la integral doble de una función de dos variables sobre una región acotada en el plano coordenado.

2. ¿Cómo se evalúan las integrales dobles mediante las integrales iteradas? ¿Es importante el orden de integración? ¿Cómo se determinan los límites de integración? Dé ejemplos.

3. ¿Cómo se emplean las integrales dobles para calcular áreas y valores promedio? Dé ejemplos.

4. ¿Cómo cambiaría usted una integral doble en coordenadas rectangulares por una integral doble en coordenadas polares? ¿De qué podría servir? Dé un ejemplo.

5. Defina la integral triple de una función $f(x, y, z)$ sobre una región acotada en el espacio.

6. ¿Cómo se evalúan las integrales triples en coordenadas rectangulares? ¿Cómo se determinan los límites de integración? Dé un ejemplo.

7. ¿Cómo se usan las integrales dobles y triples en coordenadas rectangulares para calcular volúmenes, valores promedio, masas, momentos y centros de masa? Dé ejemplos.

8. ¿Cómo se definen las integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas? ¿Por qué sería preferible trabajar en alguno de estos sistemas de coordenadas que trabajar con coordenadas rectangulares?

9. ¿Cómo se evalúan las integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas? ¿Cómo se determinan los límites de integración? Dé ejemplos.

10. ¿Cómo se representan las sustituciones en integrales dobles como transformaciones de regiones bidimensionales? Dé un ejemplo de cálculo.

11. ¿Cómo se representan las sustituciones en integrales triples como transformaciones de regiones tridimensionales? Dé un ejemplo de cálculo.

Capítulo 15 Ejercicios de práctica

Evaluación de integrales iteradas dobles

En los ejercicios 1 a 4, bosqueje la región de integración y evalúe la integral doble.

1. $\displaystyle\int_1^{10} \int_0^{1/y} ye^{xy}\, dx\, dy$

2. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x^3} e^{y/x}\, dy\, dx$

3. $\displaystyle\int_0^{3/2} \int_{-\sqrt{9-4t^2}}^{\sqrt{9-4t^2}} t\, ds\, dt$

4. $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{2-\sqrt{y}} xy\, dx\, dy$

En los ejercicios 5 a 8, bosqueje la región de integración y escriba una integral equivalente con el orden de integración invertido. Luego, evalúe ambas integrales.

5. $\displaystyle\int_0^4 \int_{-\sqrt{4-y}}^{(y-4)/2} dx\, dy$

6. $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{x} \sqrt{x}\, dy\, dx$

7. $\displaystyle\int_0^{3/2} \int_{-\sqrt{9-4y^2}}^{\sqrt{9-4y^2}} y\, dx\, dy$

8. $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{4-x^2} 2x\, dy\, dx$

Evalúe las integrales en los ejercicios 9 a 12.

9. $\displaystyle\int_0^1 \int_{2y}^2 4\cos(x^2)\,dx\,dy$

10. $\displaystyle\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2}\,dx\,dy$

11. $\displaystyle\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy\,dx}{y^4+1}$

12. $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{y}}^1 \frac{2\pi \operatorname{sen} \pi x^2}{x^2}\,dx\,dy$

Uso de integrales dobles en áreas y volúmenes

13. Área entre una recta y una parábola Calcule el área de la región encerrada por la recta $y = 2x + 4$ y la parábola $y = 4 - x^2$ en el plano xy.

14. Área acotada por rectas y parábola Calcule el área de la región "triangular" del plano xy acotada a la derecha por la parábola $y = x^2$, a la izquierda por la recta $x + y = 2$, y arriba por la recta $y = 4$.

15. Volumen de la región bajo un paraboloide Calcule el volumen bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$, arriba del triángulo encerrado por las rectas $y = x$, $x = 0$ y $x + y = 2$ en el plano xy.

16. Volumen de la región bajo un cilindro parabólico Calcule el volumen debajo del cilindro parabólico $z = x^2$, sobre la región encerrada por la parábola $y = 6 - x^2$ y la recta $y = x$ en el plano xy.

Valores promedio

Calcule el valor promedio de $f(x, y) = xy$ sobre las regiones de los ejercicios 17 y 18.

17. El cuadrado acotado por las rectas $x = 1$, $y = 1$ en el primer cuadrante.

18. El cuarto de circunferencia $x^2 + y^2 \le 1$ en el primer cuadrante.

Coordenadas polares

Evalúe las integrales de los ejercicios 19 y 20 efectuando la transformación a coordenadas polares.

19. $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2\,dy\,dx}{(1+x^2+y^2)^2}$

20. $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1)\,dx\,dy$

21. Integración sobre una lemniscata Integre la función $f(x, y) = 1/(1 + x^2 + y^2)^2$ sobre la región encerrada por un lazo de la lemniscata $(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0$.

22. Integre $f(x, y) = 1/(1 + x^2 + y^2)^2$ sobre

***a*) Región triangular** El triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, \sqrt{3})$.

***b*) Primer cuadrante** El primer cuadrante del plano xy.

Evaluación de integrales iteradas triples

Evalúe las integrales de los ejercicios 23 a 26.

23. $\displaystyle\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \cos(x+y+z)\,dx\,dy\,dz$

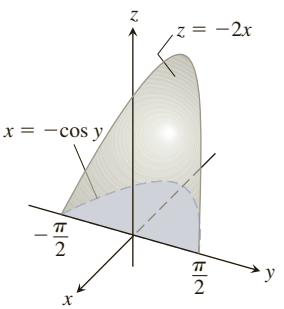
24. $\displaystyle\int_{\ln 6}^{\ln 7} \int_0^{\ln 2} \int_{\ln 4}^{\ln 5} e^{(x+y+z)}\,dz\,dy\,dx$

25. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{x+y} (2x - y - z)\,dz\,dy\,dx$

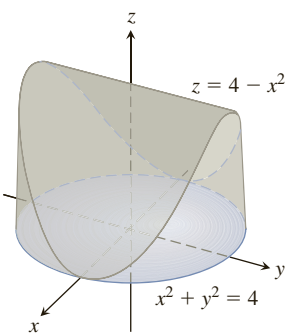
26. $\displaystyle\int_1^e \int_1^x \int_0^z \frac{2y}{z^3}\,dy\,dz\,dx$

Cálculo de volúmenes y valores promedio con integrales triples

27. Volumen Calcule el volumen de la región con forma de cuña encerrada a los lados por el cilindro $x = -\cos y$, $-\pi/2 \le y \le \pi/2$, arriba por el plano $z = -2x$, y abajo por el plano xy.



28. Volumen Calcule el volumen del sólido acotado arriba por el cilindro $z = 4 - x^2$, a los lados por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, y abajo por el plano xy.



29. Valor promedio Calcule el valor promedio de $f(x, y, z) = 30xz\sqrt{x^2 + y}$, sobre el sólido rectangular en el primer octante acotado por los planos coordenados y los planos $x = 1$, $y = 3$, $z = 1$.

30. Valor promedio Calcule el valor promedio de ρ sobre la esfera sólida $\rho \le a$ (coordenadas esféricas).

Coordenadas cilíndricas y esféricas

31. Coordenadas cilíndricas a rectangulares Transforme

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_r^{\sqrt{4-r^2}} 3\,dz\,r\,dr\,d\theta, \qquad r \ge 0$$

***a*)** a coordenadas rectangulares con el orden de integración $dz\,dx\,dy$, y ***b*)** a coordenadas esféricas. ***c*)** Luego, evalúe una de las integrales.

32. Coordenadas rectangulares a cilíndricas ***a*)** Transforme a coordenadas cilíndricas. ***b*)** Luego, evalúe la nueva integral.

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-(x^2+y^2)}^{(x^2+y^2)} 21xy^2\,dz\,dy\,dx$$

33. Coordenadas rectangulares a esféricas ***a*)** Transforme a coordenadas esféricas. ***b*)** Luego, evalúe la nueva integral.

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz\,dy\,dx$$

34. Coordenadas rectangulares, cilíndricas y esféricas Escriba una integral triple iterada para la integral de $f(x, y, z) = 6 + 4y$ sobre la región en el primer octante acotada por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, y los planos coordenados, en ***a*)** coordenadas rectangulares, ***b*)** coordenadas cilíndricas y

c) coordenadas esféricas. ***d***) Luego, determine la integral de f evaluando una de las integrales triples.

35. Coordenadas cilíndricas a rectangulares Encuentre una integral en coordenadas rectangulares equivalente a la integral

$$\int_0^{\pi/2}\int_1^{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{4-r^2}} r^3(\operatorname{sen}\theta\cos\theta)z^2\,dz\,dr\,d\theta.$$

Arregle el orden de integración colocando z primero, luego y y, por último, x.

36. Coordenadas rectangulares a cilíndricas El volumen de un sólido es

$$\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx.$$

a) Describa el sólido dando las ecuaciones de las superficies que forman su frontera.

b) Convierta la integral a coordenadas cilíndricas, pero no evalúe la integral.

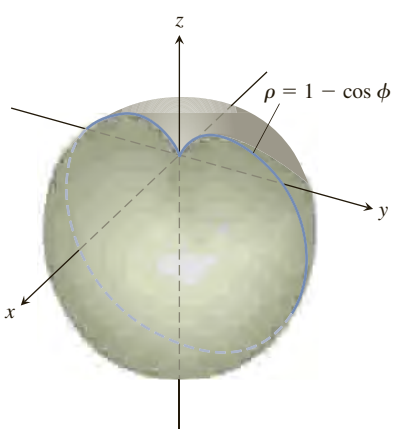
37. Coordenadas esféricas contra cilíndricas Las integrales triples que implican formas esféricas no siempre requieren coordenadas esféricas para evaluarse de manera conveniente. Algunos cálculos se realizan más fácilmente con coordenadas cilíndricas. Como ejemplo, calcule el volumen de la región acotada arriba por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ y abajo por el plano $z = 2$, usando ***a***) coordenadas cilíndricas y ***b***) coordenadas esféricas.

Masas y momentos

38. Cálculo de I_z en coordenadas esféricas Calcule, con respecto al eje z, el momento de inercia de un sólido con densidad constante $\delta = 1$ que está acotado arriba por la esfera $r = 2$ y abajo por el cono $f = \pi/3$ (coordenadas esféricas).

39. Momento de inercia de una esfera "gruesa" Calcule el momento de inercia de un sólido con densidad constante δ, acotado por dos esferas concéntricas de radios a y b $(a < b)$ con respecto a un diámetro.

40. Momento de inercia de una manzana Calcule, con respecto al eje z, el momento de inercia de un sólido con densidad $\delta = 1$ encerrado por la superficie expresada en coordenadas esféricas $\rho = 1 - \cos\phi$. El sólido se genera por la curva que gira en torno al eje z, como se indica en la siguiente figura.



41. Centroide Determine el centroide de la región "triangular" acotada por las rectas $x = 2$, $y = 2$ y la hipérbola $xy = 2$ en el plano xy.

42. Centroide Determine el centroide de la región entre la parábola $x^2 + y^2 - 2y = 0$ y la recta $x + 2y = 0$ en el plano xy.

43. Momento polar Calcule, con respecto al origen, el momento polar de inercia de una placa delgada triangular de densidad constante $\delta = 3$, acotada por el eje y y las rectas $y = 2x$ y $y = 4$ en el plano xy.

44. Momento polar Calcule el momento polar de inercia con respecto al centro de una delgada lámina rectangular de densidad constante $\delta = 1$, acotada por las rectas

a) $x = \pm 2$, $y = \pm 1$ en el plano xy

b) $x = \pm a$, $y = \pm b$ en el plano xy

(*Sugerencia:* Calcule I_x. Luego, use la fórmula de I_x para hallar I_y y sume ambas para determinar I_0).

45. Momento de inercia Calcule, con respecto al eje x, el momento de inercia de una delgada placa con densidad constante δ que cubre el triángulo con vértices (0, 0), (3, 0) y (3, 2) en el plano xy.

46. Placa con densidad variable Calcule, con respecto a los ejes de coordenadas, el centro de masa y los momentos de inercia de una delgada placa acotada por la recta $y = x$ y la parábola $y = x^2$ en el plano xy, si la densidad es $\delta(x, y) = x + 1$.

47. Placa con densidad variable Calcule, con respecto a los ejes de coordenadas, la masa y los primeros momentos de una delgada placa cuadrada acotada por las rectas $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ en el plano xy, si la densidad es $\delta(x, y) = x^2 + y^2 + 1/3$.

48. Triángulos con los mismos momentos inerciales Calcule, con respecto al eje x, el momento de inercia de una delgada placa triangular de densidad constante δ, cuya base está a lo largo del intervalo $[0, b]$ sobre el eje x y cuyo vértice se localiza en la recta $y = h$ sobre el eje x. Como verá, no importa dónde se encuentre el vértice sobre esta recta. Todos estos triángulos tienen el mismo momento de inercia con respecto al eje x.

49. Centroide Calcule el centroide de la región del plano de coordenadas polares definida mediante las desigualdades $0 \le r \le 3$, $-\pi/3 \le \theta \le \pi/3$.

50. Centroide Determine el centroide de la región en el primer cuadrante acotada por los rayos $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$ y las circunferencias $r = 1$ y $r = 3$.

51. ***a***) **Centroide** Determine el centroide de la región del plano de coordenadas polares que está dentro de la cardioide $r = 1 + \cos\theta$ y fuera de la circunferencia $r = 1$.

b) Dibuje la región y muestre el centroide en su dibujo.

52. ***a***) **Centroide** Determine el centroide de la región plana definida por las desigualdades en coordenadas polares $0 \le r \le a$, $-\alpha \le \theta \le \alpha$ $(0 < \alpha \le \pi)$. ¿Cómo se mueve el centroide cuando $\alpha \to \pi^-$?

b) Dibuje la región para $\alpha = 5\pi/6$ y muestre el centroide en su dibujo.

Sustituciones

53. Demuestre que si $u = x - y$ y $v = y$, entonces, para cualquier función continua f

$$\int_0^{\infty}\int_0^{x} e^{-sx} f(x - y, y)\,dy\,dx = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-s(u+v)} f(u, v)\,du\,dv.$$

54. ¿Qué relación debe haber entre las constantes a, b y c para que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\,dx\,dy = 1?$$

[*Sugerencia:* Sean $s = \alpha x + \beta y$ y $t = \gamma x + \delta y$, donde $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = ac - b^2$. Entonces, $ax^2 + 2bxy + cy^2 = s^2 + t^2$].

Capítulo 15 Ejercicios adicionales y avanzados

Volúmenes

1. **Pila de arena: integrales dobles y triples** La base de una pila de arena cubre la región del plano xy acotada por la parábola $x^2 + y = 6$ y la recta $y = x$. La altura de la arena sobre el punto (x, y) es x^2. Exprese el volumen de arena como ***a)*** una integral doble, ***b)*** una integral triple. ***c)*** Luego, calcule el volumen.

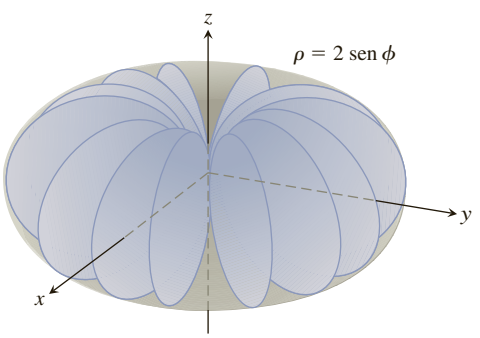
2. **Agua en un tazón semiesférico** Un tazón semiesférico de 5 cm de radio se llena con agua hasta 3 cm por debajo de la parte superior. Calcule el volumen de agua en el tazón.

3. **Región cilíndrica sólida entre dos planos** Calcule el volumen de la porción del cilindro sólido $x^2 + y^2 \le 1$ que se encuentra entre los planos $z = 0$ y $x + y + z = 2$.

4. **Esfera y paraboloide** Calcule el volumen de la región acotada arriba por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ y abajo por el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

5. **Dos paraboloides** Calcule el volumen de la región acotada arriba por el paraboloide $z = 3 - x^2 - y^2$ y abajo por el paraboloide $z = 2x^2 + 2y^2$.

6. **Coordenadas esféricas** Calcule el volumen de la región encerrada por la superficie expresada en coordenadas esféricas $r = 2 \operatorname{sen} \phi$ (vea la siguiente figura).



7. **Orificio en esfera** Se perfora un orificio cilíndrico circular en una esfera sólida; el eje del orificio coincide con un diámetro de la esfera. El volumen del sólido restante es

$$V = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{4-z^2}} r\,dr\,dz\,d\theta.$$

   a) Determine el radio del orificio y el de la esfera.

   b) Evalúe la integral.

8. **Esfera y cilindro** Calcule el volumen de material cortado de la esfera sólida $r^2 + z^2 \le 9$ por el cilindro $r = 3 \operatorname{sen} \theta$.

9. **Dos paraboloides** Calcule el volumen de la región encerrada entre las superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = (x^2 + y^2 + 1)/2$.

10. **Cilindro y superficie $z = xy$** Calcule el volumen de la región del primer octante que está entre los cilindros $r = 1$ y $r = 2$, acotado abajo por el plano xy y arriba por la superficie $z = xy$.

Cambio del orden de integración

11. Evalúe la integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx.$$

   (*Sugerencia:* Considere la relación

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy}\,dy$$

   para formar una integral doble y evalúe la integral cambiando el orden de integración).

12. ***a)*** **Coordenadas polares** Demuestre, cambiando a coordenadas polares, que

$$\int_0^{a \operatorname{sen} \beta}\int_{y \cot \beta}^{\sqrt{a^2-y^2}} \ln(x^2 + y^2)\,dx\,dy = a^2\beta\left(\ln a - \frac{1}{2}\right),$$

   donde $a > 0$ y $0 < b < \pi/2$.

   b) Rescriba la integral cartesiana con el orden de integración invertido.

13. **Reducción de una integral doble a una integral simple** Cambie el orden de integración para demostrar que la siguiente integral doble se reduce a una integral simple:

$$\int_0^x\int_0^u e^{m(x-t)} f(t)\,dt\,du = \int_0^x (x - t)e^{m(x-t)} f(t)\,dt.$$

   De manera similar, es posible demostrar que

$$\int_0^x\int_0^v\int_0^u e^{m(x-t)} f(t)\,dt\,du\,dv = \int_0^x \frac{(x - t)^2}{2} e^{m(x-t)} f(t)\,dt.$$

14. **Transformación de una integral doble para obtener límites constantes** A veces, una integral múltiple con límites variables sustituye por una con límites constantes. Cambie el orden de integración, para demostrar que

$$\int_0^1 f(x)\left(\int_0^x g(x - y)f(y)\,dy\right)dx$$

$$= \int_0^1 f(y)\left(\int_y^1 g(x - y)f(x)\,dx\right)dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 g(\,|x - y|\,)f(x)f(y)\,dx\,dy.$$

Masas y momentos

15. **Minimización del momento polar de inercia** Una delgada placa de densidad constante debe ocupar la región triangular en el primer cuadrante del plano xy con vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$ y $(a, 1/a)$. ¿Qué valor de a minimiza el momento polar de inercia de la placa con respecto al origen?

16. **Momento polar de inercia de una placa triangular** Calcule, con respecto al origen, el momento polar de inercia de una delgada placa triangular de densidad constante $\delta = 3$, acotada por el eje y y las rectas $y = 2x$ y $y = 4$ en el plano xy.

17. Masa y momento polar de inercia de un contrapeso El contrapeso de un volante de densidad constante 1 tiene la forma del segmento más pequeño cortado en un círculo de radio a por una cuerda a distancia b del centro ($b < a$). Calcule la masa del contrapeso y su momento polar de inercia con respecto al centro del volante.

18. Centroide de un búmeran Determine el centroide de la región con forma de búmeran entre las parábolas $y^2 = -4(x-1)$ y $y^2 = -2(x-2)$ en el plano xy.

Teoría y ejemplos

19. Evalúe

$$\int_0^a \int_0^b e^{\text{máx}\,(b^2x^2,\, a^2y^2)}\, dy\, dx,$$

donde a y b son números positivos y

$$\text{máx}\,(b^2x^2, a^2y^2) = \begin{cases} b^2x^2 & \text{si } b^2x^2 \geq a^2y^2 \\ a^2y^2 & \text{si } b^2x^2 < a^2y^2. \end{cases}$$

20. Demuestre que

$$\iint \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y} dx\, dy$$

sobre el rectángulo $x_0 \leq x \leq x_1$, $y_0 \leq y \leq y_1$, es

$$F(x_1, y_1) - F(x_0, y_1) - F(x_1, y_0) + F(x_0, y_0).$$

21. Suponga que $f(x, y)$ se expresa como el producto $f(x, y) = F(x)G(y)$ de una función de x y una función de y. Entonces, la integral de f sobre el rectángulo R: $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, se evalúa también como un producto, mediante la fórmula

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \left(\int_a^b F(x)\, dx\right)\left(\int_c^d G(y)\, dy\right). \tag{1}$$

El argumento es que

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \left(\int_a^b F(x)G(y)\, dx\right) dy \tag{i}$$

$$= \int_c^d \left(G(y)\int_a^b F(x)\, dx\right) dy \tag{ii}$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b F(x)\, dx\right) G(y)\, dy \tag{iii}$$

$$= \left(\int_a^b F(x)\, dx\right)\int_c^d G(y)\, dy. \tag{iv}$$

***a*)** Justifique los pasos **i.** a **iv.**

Cuando sea aplicable, la ecuación (1) ayuda a ahorrar tiempo. Utilícela para evaluar las siguientes integrales.

b. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \int_0^{\pi/2} e^x \cos y\, dy\, dx$ **c.** $\displaystyle\int_1^2 \int_{-1}^1 \frac{x}{y^2} dx\, dy$

22. Sea $D_{\mathbf{u}}f$ la derivada de $f(x, y) = (x^2 + y^2)/2$ en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$.

***a*) Cálculo de un valor promedio** Calcule el valor promedio de $D_{\mathbf{u}}f$ sobre la región triangular cortada en el primer cuadrante por la recta $x + y = 1$.

***b*) Valor promedio y centroide** Demuestre que, en general, el valor promedio de $D_{\mathbf{u}}f$ sobre una región en el plano xy es el valor de $D_{\mathbf{u}}f$ en el centroide de la región.

23. El valor de $\Gamma(1/2)$ La función gamma,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt,$$

amplía la función factorial de los enteros no negativos a otros valores reales. De particular interés en la teoría de ecuaciones diferenciales es el número

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{(1/2)-1} e^{-t}\, dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt. \tag{2}$$

***a*)** Si aún no ha resuelto el ejercicio 41 de la sección 15.4, hágalo ahora para demostrar que

$$I = \int_0^\infty e^{-y^2}\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

***b*)** Sustituya $y = \sqrt{t}$ en la ecuación (2) para demostrar que $\Gamma(1/2) = 2I = \sqrt{\pi}$.

24. Carga eléctrica total sobre una placa circular La distribución de carga eléctrica sobre una placa circular con radio de R metros es $\sigma(r, \theta) = kr(1 - \text{sen}\,\theta)$ coulombs/m^2 (k constante). Integre σ sobre la placa para encontrar la carga total Q.

25. Pluviómetro parabólico Un tazón tiene la forma de la gráfica $z = x^2 + y^2$ desde $z = 0$ hasta $z = 10$ in. Usted quiere calibrar el tazón para que sirva como pluviómetro. ¿Qué altura en el tazón correspondería a 1 in de lluvia? ¿Y a 3 in?

26. Agua en una antena satelital Una antena parabólica de satélite tiene 2 m de ancho y 1/2 m de profundidad. Su eje de simetría está inclinado 30 grados con respecto a la vertical.

***a*)** Escriba, pero no evalúe, una integral triple en coordenadas rectangulares que dé la cantidad de agua que puede contener la antena. (*Sugerencia:* Coloque su sistema de coordenadas de forma que la antena se encuentre en "posición estándar", y el plano del nivel del agua esté inclinado). (*Cuidado:* Los límites de integración no son "agradables").

***b*)** ¿Cuál debe ser la menor inclinación de la antena para que no acumule agua?

27. Un semicilindro infinito Sea D el interior del semicilindro circular recto infinito de radio 1, con sucara única suspendida 1 unidad sobre el origen y cuyo eje es el rayo que va de (0, 0, 1) a ∞. Use coordenadas cilíndricas para evaluar

$$\iiint_D z(r^2 + z^2)^{-5/2}\, dV.$$

28. Hipervolumen Hemos visto que $\int_a^b 1\, dx$ es la longitud del intervalo $[a, b]$ sobre la recta numérica (espacio unidimensional), $\iint_R 1\, dA$ es el área de la región R en el plano xy (espacio bidimensional), y $\iiint_D 1\, dV$ es el volumen de la región D en el espacio tridimensional (espacio xyz). Podríamos continuar: si Q es una región en el espacio de cuatro dimensiones (espacio $xyzw$), entonces, $\iiiint_Q 1\, dV$ sería el "hipervolumen" de Q. Use su capacidad de generalización y un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio tetradimensional para determinar el hipervolumen dentro de la esfera unitaria tetradimensional $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$.

Capítulo 15 Proyectos para aplicación tecnológica

Módulos Mathematica/Maple

Pruebe su suerte: Use la técnica Monte Carlo para la integración numérica en tres dimensiones
Use la técnica Monte Carlo para integrar numéricamente en tres dimensiones.

Medias y momentos; exploración de nuevas técnicas de graficación, parte II
Use el método de momentos de forma que emplee la simetría geométrica y la integración múltiple.

16 Integrales y campos vectoriales

INTRODUCCIÓN En este capítulo ampliaremos la teoría de integración en rectas coordenadas y planos a curvas y superficies en el espacio. La teoría resultante de integrales de línea y de superficie ofrece herramientas matemáticas poderosas para la ciencia y la ingeniería. Las integrales de línea se emplean para calcular el trabajo realizado por una fuerza al mover un objeto a lo largo de una trayectoria, y para determinar la masa de un alambre curvado de densidad variable. Las integrales de superficie se utilizan para calcular la razón de flujo a la que pasa un fluido a través de una superficie. Presentaremos los teoremas fundamentales del cálculo integral vectorial y discutiremos sus consecuencias matemáticas y sus aplicaciones físicas. En el análisis final, los teoremas clave se presentarán como interpretaciones generalizadas del teorema fundamental del cálculo.

16.1 Integrales de línea

Para calcular la masa total de un alambre que se encuentra a lo largo de una curva en el espacio o para obtener el trabajo realizado por una fuerza variable que actúa a lo largo de una curva, necesitamos un concepto de integral más general que el definido en el capítulo 5. Ahora requerimos integrar sobre una curva C y no sobre un intervalo $[a, b]$. Estas integrales, que son más generales, se conocen como *integrales de línea* (aunque el nombre de integrales de *trayectoria* sería más descriptivo). Plantearemos nuestras definiciones para el caso de curvas espaciales, sin olvidar que las curvas en el plano xy son sólo un caso particular de las anteriores, y que resultan de considerar su coordenada z igual a cero.

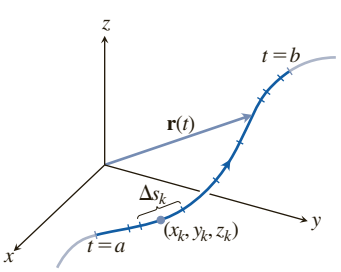


FIGURA 16.1 La curva $\mathbf{r}(t)$ dividida en pequeños arcos desde $t = a$ hasta $t = b$. El subarco típico tiene una longitud de Δs_k.

Supongamos que $f(x, y, z)$ es una función con valores reales y que queremos integrar a lo largo de la curva C que se encuentra en el dominio de f y está parametrizada por $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$, $a \le t \le b$. Los valores de f a lo largo de la curva están dados por la función compuesta $f(g(t), h(t), k(t))$. Integraremos esta función compuesta con respecto a la longitud de arco desde $t = a$ hasta $t = b$. Para comenzar, dividimos la curva C en un número finito n de subarcos (figura 16.1). El subarco típico tiene una longitud Δs_k. En cada subarco, elegimos un punto (x_k, y_k, z_k) y formamos la suma:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\, \Delta s_k,$$

que es similar a una suma de Riemann. Dependiendo de cómo se efectúe la partición de la curva C y de la selección de (x_k, y_k, z_k) en el k-ésimo subarco, podemos obtener diferentes valores de S_n. Si f es continua y las funciones g, h y k tienen primeras derivadas continuas, entonces, estas sumas tienden a un límite cuando n crece y las longitudes Δs_k tienden a cero. Este límite nos conduce a la siguiente definición, similar a la de la integral simple. En la definición, se supone que la partición satisface el enunciado de que $\Delta s_k \to 0$ cuando $n \to \infty$.

DEFINICIÓN Si f está definida sobre una curva C expresada en forma paramétrica por $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$, $a \le t \le b$, entonces, la **integral de línea de f sobre C** es

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\, \Delta s_k, \tag{1}$$

siempre que este límite exista.

Si la curva C es suave para $a \le t \le b$ (de manera que $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ es continua y nunca es igual a $\mathbf{0}$) y la función f es continua sobre C, entonces, es posible demostrar que el límite de la ecuación (1) existe. Ahora aplicamos el teorema fundamental del cálculo para diferenciar la ecuación de la longitud de arco

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{v}(\tau)|\, d\tau, \qquad \text{Ecuación 3 de la sección 13.3 con } t_0 = a$$

para expresar ds en la ecuación (1) como $ds = |\mathbf{v}(t)|dt$ y evaluar la integral de f sobre C como

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(g(t), h(t), k(t))\, |\mathbf{v}(t)|\, dt. \tag{2}$$

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

Observe que la integral del lado derecho de la ecuación (2) es una integral definida simple del tipo que estudiamos en el capítulo 5, donde integramos con respecto al parámetro t. La fórmula evalúa de forma correcta la integral de línea del lado izquierdo, sin importar cuál parametrización se emplee, siempre que ésta sea suave. Observe que el parámetro t define una dirección a lo largo de la trayectoria. El punto inicial sobre C es la posición $\mathbf{r}(a)$, y el movimiento a lo largo de la trayectoria se da en la dirección creciente de t (vea la figura 16.1).

Cómo evaluar una integral de línea

Para integrar una función continua $f(x, y, z)$ sobre una curva C:

1. Determine una parametrización suave de C,

$$\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}, \qquad a \le t \le b.$$

2. Evalúe la integral como

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(g(t), h(t), k(t))\, |\mathbf{v}(t)|\, dt.$$

$$f(\mathbf{r}(t)) = f(g(t), h(t), k(t))$$

Si f tiene el valor constante 1, entonces, la integral de f sobre C da la longitud de C desde $t = a$ hasta $t = b$ como se muestra en la figura 16.1. También rescribimos $f(\mathbf{r}(t))$ para la evaluación $f(g(t), h(t), k(t))$ a lo largo de la curva $\mathbf{r}$.

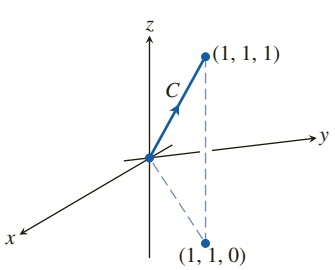


FIGURA 16.2 La trayectoria de integración en el ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Integre $f(x, y, z) = x - 3y^2 + z$ sobre el segmento de recta C que une el origen con el punto (1, 1, 1) (figura 16.2).

Solución Elegimos la parametrización más sencilla posible:

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \qquad 0 \le t \le 1.$$

Las componentes tienen primeras derivadas continuas y $|\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ nunca se anula, de manera que la parametrización es suave. La integral de f sobre C es

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_0^1 f(t, t, t)\left(\sqrt{3}\right) dt \qquad \text{Ecuación (2), } ds = |\mathbf{v}(t)|\, dt = \sqrt{3}\, dt$$

$$= \int_0^1 (t - 3t^2 + t)\sqrt{3}\, dt$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 (2t - 3t^2)\, dt = \sqrt{3}\left[t^2 - t^3\right]_0^1 = 0. \quad \blacksquare$$

Aditividad

Las integrales de línea tienen la útil propiedad de que si la curva C está formada por la unión de un número finito de curvas suaves $C_1, C_2, \ldots, C_n$ (sección 13.1), entonces, la integral de una función sobre C es la suma de las integrales sobre las curvas que la conforman:

$$\int_C f\, ds = \int_{C_1} f\, ds + \int_{C_2} f\, ds + \cdots + \int_{C_n} f\, ds. \tag{3}$$

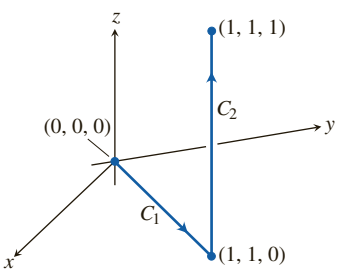


FIGURA 16.3 La trayectoria de integración del ejemplo 2.

EJEMPLO 2 La figura 16.3 muestra otra trayectoria desde el origen hasta el punto (1, 1, 1), la unión de los segmentos de recta C_1 y C_2. Integre la función $f(x, y, z) = x - 3y^2 + z$ sobre $C_1 \cup C_2$.

Solución Elegimos la parametrización más sencilla para C_1 y C_2 que podamos encontrar, y verificamos las longitudes de los vectores de velocidad conforme procedemos:

$$C_1: \quad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1; \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$C_2: \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1; \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1.$$

Con estas parametrizaciones, tenemos que

$$\int_{C_1 \cup C_2} f(x, y, z)\, ds = \int_{C_1} f(x, y, z)\, ds + \int_{C_2} f(x, y, z)\, ds \qquad \text{Ecuación (3)}$$

$$= \int_0^1 f(t, t, 0)\sqrt{2}\, dt + \int_0^1 f(1, 1, t)(1)\, dt \qquad \text{Ecuación (2)}$$

$$= \int_0^1 (t - 3t^2 + 0)\sqrt{2}\, dt + \int_0^1 (1 - 3 + t)(1)\, dt$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{t^2}{2} - t^3\right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2} - 2t\right]_0^1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2}. \quad \blacksquare$$

Observemos tres aspectos acerca de las integraciones de los ejemplos 1 y 2. En primer lugar, al sustituir las componentes de la curva adecuada en la fórmula de f, esta integral se convierte en una integral normal con respecto a t. En segundo lugar, la integral de f sobre $C_1 \cup C_2$ se obtuvo integrando f sobre cada una de las secciones de la trayectoria y sumando estos resultados. Tercero, las integrales de f a lo largo de C y de $C_1 \cup C_2$ tienen valores diferentes. Analizaremos esta tercera observación en la sección 16.3.

El valor de la integral de línea a lo largo de la trayectoria entre dos puntos se modifica al cambiar la trayectoria entre ellos.

EJEMPLO 3 Encuentre la integral de línea de $f(x, y, z) = 2xy + \sqrt{z}$ sobre la hélice $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \le t \le \pi$.

Solución Para la hélice, encontramos $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -\operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2 + 1} = \sqrt{2}$. Al evaluar la función f a lo largo de la trayectoria, se obtiene

$$f(\mathbf{r}(t)) = f(\cos t,\ \operatorname{sen} t, t) = 2 \cos t \operatorname{sen} t + \sqrt{t} = \operatorname{sen} 2t + \sqrt{t}.$$

La integral de línea está dada por

$$\begin{aligned}\int_C f(x, y, z)\, ds &= \int_0^{\pi} \left(\operatorname{sen} 2t + \sqrt{t}\right)\sqrt{2}\, dt \\ &= \sqrt{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2t + \frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi^{3/2} \approx 5.25.\end{aligned}$$

■

Cálculo de masa y momento

Consideramos los resortes y alambres como masas distribuidas a lo largo de curvas suaves en el espacio. La distribución se describe mediante una función de densidad continua $\delta(x, y, z)$ que representa la masa por unidad de longitud. Cuando una curva C se parametriza por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, $a \le t \le b$, entonces x, y y z son funciones del parámetro t, la densidad es la función $\delta(x(t), y(t), z(t))$, y la diferencial de la longitud de arco está dada por

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt.$$

(Vea la sección 13.3). La masa del resorte o del alambre, el centro de masa y los momentos se calculan mediante las fórmulas de la tabla 16.1, con las integrales en términos del parámetro t sobre el intervalo $[a, b]$. Por ejemplo, la fórmula de la masa se convierte en

$$M = \int_a^b \delta(x(t), y(t), z(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Estas fórmulas también se aplican a varillas delgadas, y su deducción es similar a las que se realizaron en la sección 6.6. Observe el parecido de las fórmulas con las de las tablas 15.1 y 15.2 para integrales dobles y triples. Las integrales dobles de regiones planas y las integrales triples de sólidos se convierten en integrales de línea para resortes, alambres y varillas delgadas.

Observe que el elemento de masa dm es igual a $\delta\, ds$ en la tabla y no a $\delta\, dV$ como en tabla 15.1, y que las integrales se toman sobre la curva C.

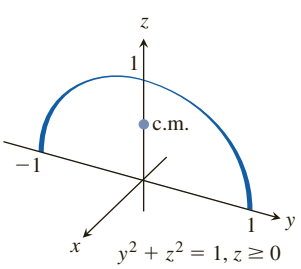


FIGURA 16.4 El ejemplo 4 nos muestra cómo encontrar el centro de masa de un arco circular de densidad variable.

EJEMPLO 4 Un arco de metal delgado, más denso en la parte inferior que en la superior, se encuentra a lo largo de la semicircunferencia $y^2 + z^2 = 1$, $z \ge 0$, en el plano yz (figura 16.4). Determine el centro de masa del arco, si la densidad en el punto (x, y, z) del arco es $\delta(x, y, z) = 2 - z$.

Solución Sabemos que $\bar{x} = 0$ y $\bar{y} = 0$ porque el arco está en el plano yz con la masa distribuida de manera simétrica alrededor del eje z. Para encontrar $\bar{z}$, parametrizamos la circunferencia como:

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{j} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{k}, \qquad 0 \le t \le \pi.$$

TABLA 16.1 Fórmulas de la masa y el momento para resortes, alambres y varillas delgadas a lo largo de una curva suave C en el espacio

Masa: $M = \int_C \delta\, ds$ $\quad \delta = \delta(x, y, z)$ es la densidad en (x, y, z)

Primeros momentos con respecto a los planos coordenados:

$$M_{yz} = \int_C x\,\delta\, ds, \qquad M_{xz} = \int_C y\,\delta\, ds, \qquad M_{xy} = \int_C z\,\delta\, ds$$

Coordenadas del centro de masa:

$$\bar{x} = M_{yz}/M, \qquad \bar{y} = M_{xz}/M, \qquad \bar{z} = M_{xy}/M$$

Momentos de inercia con respecto a los ejes y otras rectas:

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2)\,\delta\, ds, \qquad I_y = \int_C (x^2 + z^2)\,\delta\, ds, \qquad I_z = \int_C (x^2 + y^2)\,\delta\, ds,$$

$$I_L = \int_C r^2 \delta\, ds \qquad r(x, y, z) = \text{distancia desde el punto } (x, y, z) \text{ a la recta } L$$

Para esta parametrización,

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{(0)^2 + (-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2} = 1,$$

de manera que $ds = |\mathbf{v}|\, dt = dt$.

Las fórmulas de la tabla 16.1 implican

$$M = \int_C \delta\, ds = \int_C (2 - z)\, ds = \int_0^{\pi} (2 - \operatorname{sen} t)\, dt = 2\pi - 2$$

$$M_{xy} = \int_C z\delta\, ds = \int_C z(2 - z)\, ds = \int_0^{\pi} (\operatorname{sen} t)(2 - \operatorname{sen} t)\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} (2 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen}^2 t)\, dt = \frac{8 - \pi}{2} \qquad \text{Integración de rutina}$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{8 - \pi}{2} \cdot \frac{1}{2\pi - 2} = \frac{8 - \pi}{4\pi - 4} \approx 0.57.$$

Con $\bar{z}$ redondeada a la centésima más cercana, el centro de masa es (0, 0, 0.57). ■

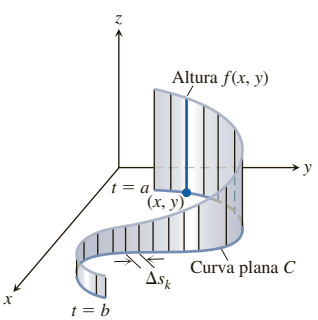


FIGURA 16.5 La integral de línea $\int_C f\, ds$ nos da el área de la porción de la superficie cilíndrica o "pared" debajo de $z = f(x, y) \geq 0$.

Integrales de línea en el plano

Existe una interpretación geométrica interesante de las integrales de línea en el plano. Si C es una curva suave en el plano xy parametrizada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, $a \leq t \leq b$, se genera una superficie cilíndrica al mover una recta a lo largo de C ortogonal al plano, manteniendo la recta paralela al eje z como en la sección 12.6. Si $z = f(x, y)$ es una función continua no negativa sobre una región en el plano que contiene a la curva C, entonces, la gráfica de f es una superficie que se encuentra arriba del plano. El cilindro corta a través de esta superficie, formando una curva sobre ella que está arriba de la curva C y sigue su curso sinuoso. La parte de la superficie cilíndrica que está debajo de la superficie curva y arriba del plano xy es como una "pared" o una "cerca" serpenteante que se encuentra sobre la curva C y es ortogonal al plano. En cualquier punto (x, y) a lo largo de la curva, la altura de la pared es $f(x, y)$.

La pared se ilustra en la figura 16.5, donde la parte alta de dicha pared es la curva que está sobre la superficie $z = f(x, y)$. (No se muestra la superficie formada por la gráfica de f en la figura, sólo la curva sobre ella que es cortada por el cilindro). A partir de la definición

$$\int_C f\,ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta s_k,$$

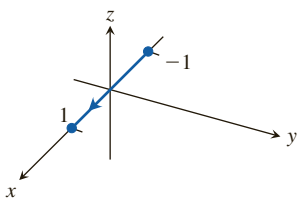
donde $\Delta s_k \to 0$ cuando $n \to \infty$, vemos que la integral de línea $\int_C f\,ds$ es el área de la pared representada en la figura.

Ejercicios 16.1

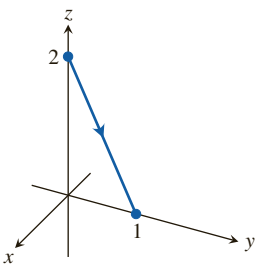
Gráficas de ecuaciones vectoriales

Relacione las ecuaciones vectoriales de los ejercicios 1 a 8 con las gráficas *a*) a *h*) que aquí se presentan.

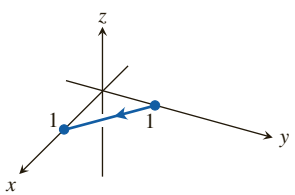
a)



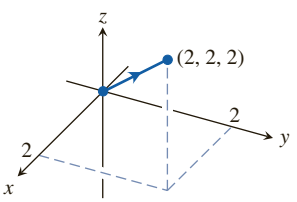
b)



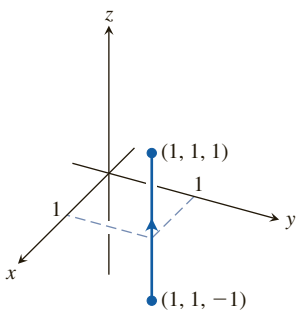
c)



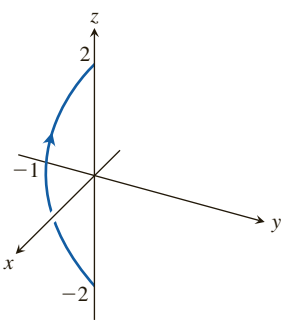
d)



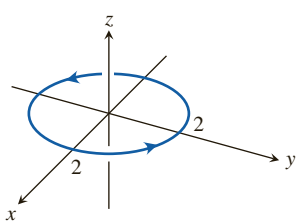
e)



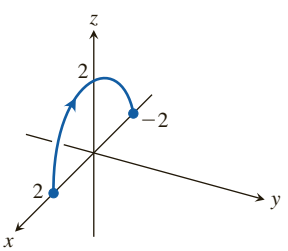
f)



g)



h)

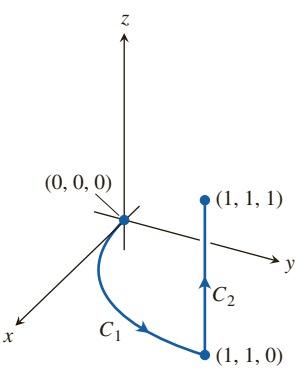


1. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1 - t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1$
2. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad -1 \le t \le 1$
3. $\mathbf{r}(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (2\operatorname{sen} t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi$
4. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i}, \quad -1 \le t \le 1$
5. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 2$
6. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{j} + (2 - 2t)\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$
7. $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}, \quad -1 \le t \le 1$
8. $\mathbf{r}(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (2\operatorname{sen} t)\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi$

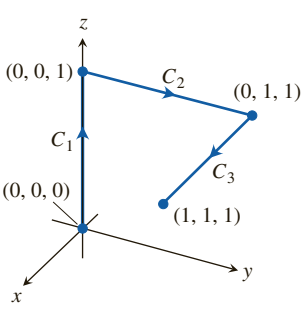
Evaluación de integrales de línea sobre curvas en el espacio

9. Evalúe $\int_C (x + y)\,ds$ donde C es el segmento de recta $x = t$, $y = (1 - t)$, $z = 0$, desde $(0, 1, 0)$ hasta $(1, 0, 0)$.
10. Evalúe $\int_C (x - y + z - 2)\,ds$ donde C es el segmento de recta $x = t$, $y = (1 - t)$, $z = 1$, desde $(0, 1, 1)$ hasta $(1, 0, 1)$.
11. Evalúe $\int_C (xy + y + z)\,ds$ a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (2 - 2t)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$.
12. Evalúe $\int_C \sqrt{x^2 + y^2}\,ds$ a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = (4\cos t)\mathbf{i} + (4\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$, $-2\pi \le t \le 2\pi$.
13. Encuentre la integral de línea de $f(x, y, z) = x + y + z$ sobre el segmento de recta que va desde $(1, 2, 3)$ hasta $(0, -1, 1)$.
14. Encuentre la integral de línea de $f(x, y, z) = \sqrt{3}/(x^2 + y^2 + z^2)$ sobre la curva $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $1 \le t \le \infty$.
15. Integre $f(x, y, z) = x + \sqrt{y} - z^2$ sobre la trayectoria que va desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 1, 1)$ (vea la figura anexa) dada por

$$C_1: \quad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1$$
$$C_2: \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$$



a)



b)

Trayectorias de integración de los ejercicios 15 y 16.

16. Integre $f(x, y, z) = x + \sqrt{y} - z^2$ sobre la trayectoria que va desde (0, 0, 0) hasta (1, 1, 1) (vea la figura anterior) y está dada por

$$C_1: \quad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$$
$$C_2: \quad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$$
$$C_3: \quad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$$

17. Integre $f(x, y, z) = (x + y + z)/(x^2 + y^2 + z^2)$ sobre la trayectoria $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 < a \le t \le b$.

18. Integre $f(x, y, z) = -\sqrt{x^2 - z^2}$ sobre la circunferencia

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t)\mathbf{j} + (a \operatorname{sen} t)\mathbf{k}, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Integrales de línea sobre curvas planas

19. Evalúe $\int_C x\,ds$, donde C es

a) el segmento de recta $x = t$, $y = t/2$, desde (0, 0) hasta (4, 2).

b) la curva parabólica $x = t$, $y = t^2$, desde (0, 0) hasta (2, 4).

20. Evalúe $\int_C \sqrt{x - 2y}\,ds$, donde C es

a) el segmento de recta $x = t$, $y = 4t$, desde (0, 0) hasta (1, 4).

b) $C_1 \cup C_2$; C_1 es el segmento de recta desde (0, 0) hasta (1, 0), y C_2 es el segmento de recta desde (1, 0) hasta (1, 2).

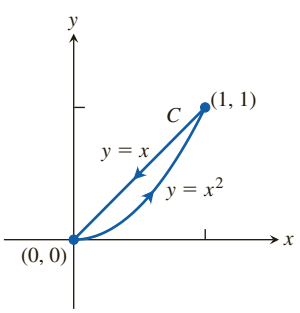
21. Encuentre la integral de línea de $f(x, y) = ye^{x^2}$ a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} - 3t\mathbf{j}$, $-1 \le t \le 2$.

22. Obtenga la integral de línea de $f(x, y) = x - y + 3$ a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$.

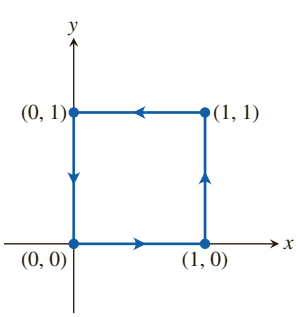
23. Evalúe $\displaystyle\int_C \frac{x^2}{y^{4/3}}\,ds$, donde C es la curva $x = t^2$, $y = t^3$, para $1 \le t \le 2$.

24. Obtenga la integral de línea de $f(x, y) = \sqrt{y}/x$ a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t^4\mathbf{j}$, $1/2 \le t \le 1$.

25. Evalúe $\int_C (x + \sqrt{y})\,ds$, donde C está dada en la siguiente figura.



26. Evalúe $\displaystyle\int_C \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}\,ds$, donde C está dada en la siguiente figura.



En los ejercicios 27 a 30, integre f sobre la curva dada.

27. $f(x, y) = x^3/y$, C: $y = x^2/2$, $0 \le x \le 2$

28. $f(x, y) = (x + y^2)/\sqrt{1 + x^2}$, C: $y = x^2/2$ desde (1, 1/2) hasta (0, 0).

29. $f(x, y) = x + y$, C: $x^2 + y^2 = 4$ en el primer cuadrante, desde (2, 0) hasta (0, 2).

30. $f(x, y) = x^2 - y$, C: $x^2 + y^2 = 4$ en el primer cuadrante, desde (0, 2) hasta $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

31. Determine el área de uno de los lados de la "pared sinuosa" que es ortogonal a la curva $y = x^2$, $0 \le x \le 2$, y está debajo de la curva y sobre la superficie $f(x, y) = x + \sqrt{y}$.

32. Determine el área de uno de los lados de la "pared" que es ortogonal a la curva $2x + 3y = 6$, $0 \le x \le 6$, y está debajo de la curva y sobre la superficie $f(x, y) = 4 + 3x + 2y$.

Masas y momentos

33. Masa de un alambre Encuentre la masa de un alambre colocado a lo largo de una curva $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$, si la densidad es $\delta = (3/2)t$.

34. Centro de masa de un alambre curvo Un alambre de densidad $\delta(x, y, z) = 15\sqrt{y + 2}$ está colocado a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, $-1 \le t \le 1$. Encuentre su centro de masa. Trace la curva y su centro de masa juntos.

35. Masa de un alambre con densidad variable Encuentre la masa de un alambre delgado, colocado a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}t\mathbf{i} + \sqrt{2}t\mathbf{j} + (4 - t^2)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$, si la densidad es ***a)*** $\delta = 3t$ y ***b)*** $\delta = 1$.

36. Centro de masa de un alambre con densidad variable Encuentre el centro de masa de un alambre delgado colocado a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (2/3)t^{3/2}\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2$, si la densidad es $\delta = 3\sqrt{5} + t$.

37. Momento de inercia de un lazo de alambre Un lazo circular de alambre, con densidad constante δ, se encuentra a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, en el plano xy. Encuentre el momento de inercia del lazo con respecto al eje z.

38. Inercia de una varilla delgada Una varilla delgada con densidad constante está colocada a lo largo del segmento de recta $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{j} + (2 - 2t)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$, en el plano yz. Encuentre el momento de inercia de la varilla con respecto a los tres ejes de coordenadas.

39. Dos resortes con densidad constante Un resorte de densidad constante δ se encuentra a lo largo de la hélice

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

a) Encuentre I_z.

b) Suponga que ahora tiene otro resorte de densidad constante δ, con el doble de la longitud del resorte en el inciso *a)* y que está a lo largo de la hélice para $0 \le t \le 4\pi$. ¿Esperaría que el valor de I_z para el resorte más largo fuera igual que el del resorte más corto? ¿O debería ser distinto? Verifique sus predicciones calculando I_z para el resorte más largo.

40. Alambre de densidad constante Un alambre con densidad constante $\delta = 1$ se encuentra a lo largo de la curva

$$\mathbf{r}(t) = (t\cos t)\mathbf{i} + (t \operatorname{sen} t)\mathbf{j} + \left(2\sqrt{2}/3\right)t^{3/2}\mathbf{k}, \qquad 0 \le t \le 1.$$

Determine $\bar{z}$ e I_z.

41. El arco del ejemplo 4 Determine I_x para el arco del ejemplo 4.

42. Centro de masa y momentos de inercia para un alambre con densidad variable Encuentre el centro de masa y los momentos de inercia con respecto a los ejes de coordenadas de un alambre delgado que está a lo largo de la curva

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\mathbf{j} + \frac{t^2}{2}\mathbf{k}, \qquad 0 \le t \le 2,$$

si la densidad es $\delta = 1/(t+1)$.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 43 a 46, utilice un software matemático para realizar los siguientes pasos y evaluar las integrales de línea.

a) Encuentre $ds = |\mathbf{v}(t)|dt$ para la trayectoria $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$.

b) Exprese el integrando $f(g(t), h(t), k(t))|\mathbf{v}(t)|$ como función del parámetro t.

c) Evalúe $\int_C f\,ds$ usando la ecuación (2) del texto.

43. $f(x, y, z) = \sqrt{1 + 30x^2 + 10y}$; $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2$

44. $f(x, y, z) = \sqrt{1 + x^3 + 5y^3}$; $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^2\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2$

45. $f(x, y, z) = x\sqrt{y} - 3z^2$; $\mathbf{r}(t) = (\cos 2t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} 2t)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

46. $f(x, y, z) = \left(1 + \frac{9}{4}z^{1/3}\right)^{1/4}$; $\mathbf{r}(t) = (\cos 2t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} 2t)\mathbf{j} + t^{5/2}\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

16.2 Campos vectoriales e integrales de línea: trabajo, circulación y flujo

Las fuerzas gravitacionales y eléctricas tienen magnitud y dirección. Se representan por un vector en cada punto de su dominio, generando así un *campo vectorial.* En esta sección mostraremos cómo calcular el trabajo realizado al mover un objeto a través del campo mediante una integral de línea que involucra al campo vectorial. También estudiaremos los campos de velocidad, como el campo vectorial que representa la velocidad de un fluido que fluye a través de su dominio. Se usa una integral de línea para calcular la razón a la cual el fluido fluye tanto a lo largo como a través de una trayectoria curva dentro del dominio.

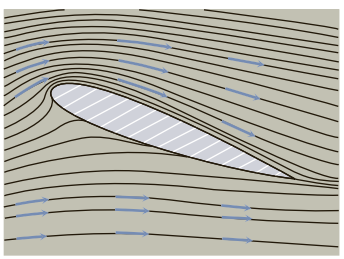


FIGURA 16.6 Vectores de velocidad de un flujo alrededor de una superficie de sustentación en un túnel de viento.

Campos vectoriales

Suponga que una región en el plano o en el espacio está ocupada por un fluido en movimiento, como aire o agua. El fluido está formado por un número muy grande de partículas y, en cualquier instante, una partícula tiene una velocidad $\mathbf{v}$. En diferentes puntos de la región en un instante determinado, estas velocidades pueden variar. Pensamos que el vector de velocidad está unido a cada uno de los puntos del fluido y que representa la velocidad de una partícula en ese punto. Un fluido así es un ejemplo de un *campo vectorial.* La figura 16.6 muestra un campo vectorial de velocidad, obtenido del aire que fluye alrededor de una superficie de sustentación dentro de un túnel de viento. La figura 16.7 muestra otro campo vectorial de vectores de velocidad a lo largo de líneas de flujo del agua que se mueve en un canal que se reduce. Los campos vectoriales también están asociados con fuerzas como la atracción gravitacional (figura 16.8), y con campos magnéticos y eléctricos, e incluso existen campos puramente matemáticos.

En general, un **campo vectorial** es una función que asigna un vector a cada punto en su dominio. Un campo vectorial en un dominio tridimensional en el espacio tendrá una fórmula como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}.$$

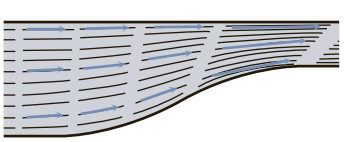


FIGURA 16.7 Líneas de flujo dentro de un canal cuyo grosor se reduce. La rapidez del agua aumenta cuando el canal se hace angosto, y los vectores de velocidad aumentan su longitud.

El campo es **continuo** si las **funciones componentes** M, N y P son continuas; es **diferenciable** si cada una de las funciones componentes es diferenciable. Un campo de vectores bidimensionales tiene una fórmula como

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}.$$

Encontramos otro tipo de campo vectorial en el capítulo 13. Los vectores tangentes $\mathbf{T}$ y los vectores normales $\mathbf{N}$ de una curva en el espacio forman campos vectoriales a lo largo de la curva. Por ejemplo, a lo largo de una curva $\mathbf{r}(t)$, tienen una fórmula componente similar a la expresión del campo de velocidad

$$\mathbf{v}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}.$$

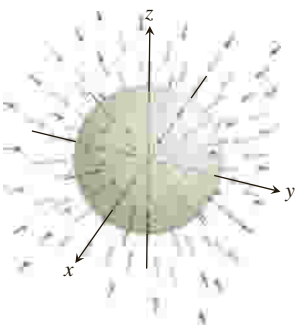


FIGURA 16.8 Los vectores en un campo gravitacional apuntan hacia el centro de masa que es fuente del campo.

Si unimos el vector gradiente ∇f de una función escalar $f(x, y, z)$ en cada punto de una superficie de nivel de la función, tendremos un campo tridimensional sobre la superficie. Y si asociamos el vector de velocidad en cada punto del flujo de un fluido, tendremos un campo tridimensional definido en una región del espacio. Éstos y otros campos se ilustran en las figuras 16.6 a 16.15. Para dibujar estos campos, hacemos una selección representativa de puntos del dominio y trazamos los vectores asociados a ellos. Las flechas que representan a los vectores se trazan con su punto base, no con su punta, exactamente donde las funciones vectoriales se evalúan.

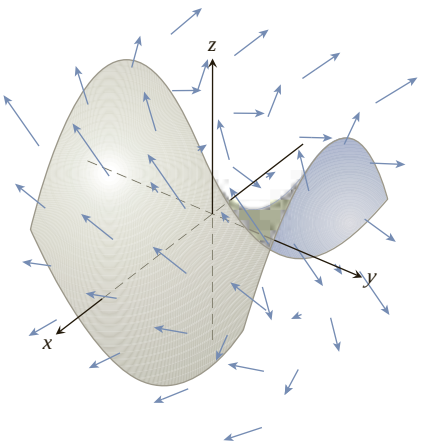


FIGURA 16.9 Una superficie, como una red o un paracaídas, en un campo vectorial que representa los vectores de velocidad del flujo de agua o aire. Las flechas señalan la dirección y sus longitudes indican la rapidez.

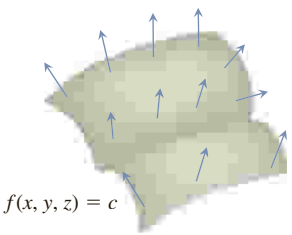


FIGURA 16.10 El campo de vectores gradientes ∇f sobre una superficie $f(x, y, z) = c$.

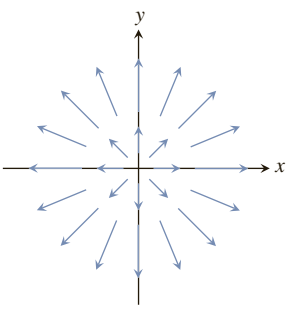


FIGURA 16.11 El campo radial $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ de vectores de posición de puntos en el plano. Observe la convención de que una flecha se dibuja con su base, y no con su cabeza, en el punto donde se evalúa $\mathbf{F}$.

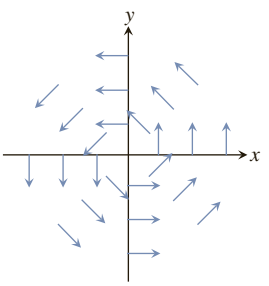


FIGURA 16.12 El campo circular o de "giro" con vectores unitarios

$$\mathbf{F} = (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})/(x^2 + y^2)^{1/2}$$

que giran en el plano. El campo no está definido en el origen.

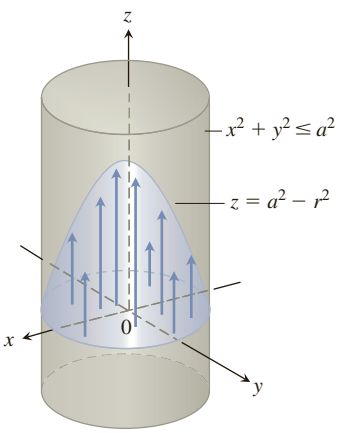


FIGURA 16.13 El flujo de un fluido en un tubo cilíndrico largo. Los vectores $\mathbf{v} = (a^2 - r^2)\mathbf{k}$ dentro del cilindro que tienen sus bases en el plano xy y sus puntas en el paraboloide $z = a^2 - r^2$.

Campos gradiente

El vector gradiente de una función escalar diferenciable en un punto indica la dirección de mayor crecimiento de la función. Un tipo importante de campo vectorial es el formado por todos los vectores gradiente de la función (vea la sección 14.5). Definimos el **campo gradiente** de una función diferenciable $f(x, y, z)$ como el campo de vectores gradiente

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}.$$

En cada punto (x, y, z), el campo gradiente da un vector que apunta en la dirección del mayor crecimiento de f y de magnitud igual al valor de la derivada direccional en esa dirección. El campo gradiente no siempre es un campo de fuerza o un campo de velocidad.

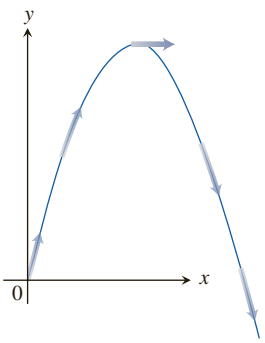


FIGURA 16.14 Los vectores de velocidad $\mathbf{v}(t)$ del movimiento de un proyectil definen un campo vectorial a lo largo de la trayectoria.

FIGURA 16.15 El satélite *Seasat* de la NASA emplea un radar para tomar 350 000 medidas del viento sobre los océanos del mundo. Las flechas indican la dirección del viento; su longitud y la tonalidad indican la rapidez. Observe la gran tormenta en el sur de Groenlandia.

EJEMPLO 1 Suponga que la temperatura t en cada punto (x, y, z) en una región del espacio está dada por

$$T = 100 - x^2 - y^2 - z^2,$$

y que $\mathbf{F}(x, y, z)$ está definido como el gradiente de T. Obtenga el campo vectorial $\mathbf{F}$.

Solución El campo gradiente $\mathbf{F}$ es el campo $\mathbf{F} = \nabla T = -2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$. En cada punto del espacio, el campo vectorial $\mathbf{F}$ da la dirección en la cual el incremento de temperatura es el mayor. ■

Integrales de línea de campos vectoriales

En la sección 16.1 definimos la integral de línea de una función escalar $f(x, y, z)$ sobre una trayectoria C. Ahora pondremos atención a la idea de una integral de línea de un campo vectorial $\mathbf{F}$ a lo largo de la curva C. Estas integrales de línea tienen importantes aplicaciones en el estudio de flujo de fluidos, y en campos eléctricos o gravitacionales.

Suponga que el campo vectorial $\mathbf{F} = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$ tiene componentes continuas, y que la curva C tiene una parametrización suave $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$, $a \le t \le b$. Como vimos en la sección 16.1, la parametrización $\mathbf{r}(t)$ define una dirección (u orientación) a lo largo de C, a la cual llamamos **dirección hacia delante**. En cada punto a lo largo de la trayectoria de C, el vector tangente $\mathbf{T} = d\mathbf{r}/ds = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ es un vector unitario tangente a la trayectoria y apunta hacia delante. (El vector $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ es el vector de velocidad tangente a C en ese punto, como vimos en las secciones 13.1 y 13.3). Intuimos

que la integral de línea del campo vectorial es la integral de línea de la componente escalar tangencial de **F** a lo largo de *C*. Esta componente tangencial está dada por el producto punto

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds},$$

de manera que llegamos a la siguiente definición formal, donde $f = \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ en la ecuación (1) de la sección 16.1.

DEFINICIÓN Sea **F** un campo vectorial con componentes continuas definidas a lo largo de la curva suave *C* parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$. Entonces, la **integral de línea de F a lo largo de *C*** es

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_C \left(\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) ds = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Las integrales de línea de campos vectoriales se evalúan de manera similar a la forma como evaluamos integrales de línea de funciones escalares (sección 16.1).

Evaluación de la integral de línea $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ a lo largo de *C*: $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$

1. Exprese el campo vectorial **F** en términos de la curva parametrizada *C* como $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ sustituyendo las componentes $x = g(t)$, $y = h(t)$, $z = k(t)$ de **r** en las componentes escalares $M(x, y, z)$, $N(x, y, z)$, $P(x, y, z)$ de **F**.
2. Calcule la derivada del vector (velocidad) $d\mathbf{r}/dt$.
3. Evalúe la integral de línea con respecto al parámetro *t*, $a \le t \le b$, para obtener

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt.$$

EJEMPLO 2 Evalúe $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}$ a lo largo de la curva *C* dada por $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \sqrt{t}\,\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$.

Solución Tenemos que

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \sqrt{t}\,\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} - t^2\mathbf{k} \qquad z = \sqrt{t},\ xy = t^3,\ -y^2 = -t^2$$

y

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2t\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathbf{k}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt \\ &= \int_0^1 \left(2t^{3/2} + t^3 - \frac{1}{2} t^{3/2} \right) dt \\ &= \left[\left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{2}{5} t^{5/2} \right) + \frac{1}{4} t^4 \right]_0^1 = \frac{17}{20}. \end{aligned}$$

■

Integrales de línea con respecto a *dx*, *dy* o *dz*

Cuando analizamos fuerzas o flujos, con frecuencia resulta útil considerar la dirección de cada componente de manera separada. En tales situaciones, deseamos una integral de línea de una función escalar con respecto a una de las coordenadas, como $\int_C M\,dx$. Esta integral no es la misma que la integral de línea de la longitud de arco $\int_C M\,ds$ definida en la sección 16.1. Para definir la integral $\int_C M\,dx$ de la función escalar $M(x, y, z)$, especificamos un campo vectorial $\mathbf{F} = M(x, y, z)\mathbf{i}$ que sólo tiene una componente en la dirección x, y ninguna en las direcciones y y z. Entonces, sobre la curva C parametrizada por $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$, para $a \le t \le b$, tenemos que $x = g(t)$ y $dx = g'(t)\,dt$, y

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt = M(x, y, z)g'(t)\,dt = M(x, y, z)\,dx.$$

A partir de la definición de la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de C, definimos

$$\int_C M(x, y, z)\,dx = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad \text{donde} \quad \mathbf{F} = M(x, y, z)\mathbf{i}.$$

Del mismo modo, al definir $\mathbf{F} = N(x, y, z)\mathbf{j}$ con una componente sólo en la dirección y, o como $\mathbf{F} = P(x, y, z)\mathbf{k}$, con una componente sólo en la dirección z, podemos obtener las integrales de línea $\int_C N\,dy$ y $\int_C P\,dz$. Al expresar todo en términos del parámetro t a lo largo de la curva C, tenemos las siguientes fórmulas de estas integrales:

$$\int_C M(x, y, z)\,dx = \int_a^b M(g(t), h(t), k(t))\,g'(t)\,dt \tag{1}$$

$$\int_C N(x, y, z)\,dy = \int_a^b N(g(t), h(t), k(t))\,h'(t)\,dt \tag{2}$$

$$\int_C P(x, y, z)\,dz = \int_a^b P(g(t), h(t), k(t))\,k'(t)\,dt \tag{3}$$

A menudo sucede que estas integrales de línea se usan en combinación, así que abreviamos la notación escribiendo

$$\int_C M(x, y, z)\,dx + \int_C N(x, y, z)\,dy + \int_C P(x, y, z)\,dz = \int_C M\,dx + N\,dy + P\,dz.$$

EJEMPLO 3 Evalúe la integral de línea $\int_C -y\,dx + z\,dy + 2x\,dz$, donde C es la hélice $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$.

Solución Expresamos todo en términos del parámetro t, de manera que $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = t$ y $dx = -\operatorname{sen} t\,dt$, $dy = \cos t\,dt$, $dz = dt$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
\int_C -y\,dx + z\,dy + 2x\,dz &= \int_0^{2\pi} [\,(-\operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t) + t\cos t + 2\cos t\,]\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} [\,2\cos t + t\cos t + \operatorname{sen}^2 t\,]\,dt \\
&= \left[\,2\operatorname{sen} t + (t\operatorname{sen} t + \cos t) + \left(\frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right)\right]_0^{2\pi} \\
&= [\,0 + (0 + 1) + (\pi - 0)\,] - [\,0 + (0 + 1) + (0 - 0)\,] \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

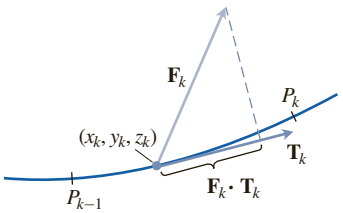


FIGURA 16.16 El trabajo realizado a lo largo del subarco que se muestra aquí es aproximadamente $\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{T}_k \Delta s_k$, donde $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}(x_k, y_k, z_k)$ y $\mathbf{T}_k = \mathbf{T}(x_k, y_k, z_k)$.

Trabajo realizado por una fuerza sobre una curva en el espacio

Suponga que el campo vectorial $\mathbf{F} = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$ representa una fuerza a través de una región en el espacio (puede ser la fuerza de gravedad o una fuerza electromagnética), y también que

$$\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}, \qquad a \le t \le b,$$

es una curva suave en la misma región. Para obtener la fórmula del trabajo realizado por la fuerza al mover un objeto a lo largo de la curva se aplica el mismo razonamiento que usamos en el capítulo 6 para deducir la integral ordinaria del trabajo realizado por una fuerza continua de magnitud $F(x)$, dirigida a lo largo de un intervalo en el eje x. En el caso de una curva C en el espacio, definimos el trabajo realizado por un campo de fuerza continuo $\mathbf{F}$ para mover un objeto a lo largo de C de un punto A a un punto B de la siguiente manera.

Dividimos la curva C en pequeños subarcos $P_{k-1}P_k$ con longitudes Δs_k, iniciando en A y terminando en B. Elegimos cualquier punto (x_k, y_k, z_k) en el subarco $P_{k-1}P_k$ y hacemos que $\mathbf{T}(x_k, y_k, z_k)$ sea el vector tangente unitario en el punto seleccionado. El trabajo W_k realizado para mover el objeto a lo largo del subarco $P_{k-1}P_k$ se aproxima mediante la componente tangencial de la fuerza $\mathbf{F}(x_k, y_k, z_k)$ multiplicada por la longitud de arco Δs_k que aproxima la distancia que se mueve el objeto a lo largo del subarco (figura 16.16). El trabajo total realizado al mover el objeto desde el punto A hasta el punto B se aproxima sumando el trabajo realizado a lo largo de cada uno de los subarcos, de manera que

$$W \approx \sum_{k=1}^{n} W_k \approx \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}(x_k, y_k, z_k) \cdot \mathbf{T}(x_k, y_k, z_k)\, \Delta s_k.$$

Para cualquier subdivisión de C en n subarcos y para cualquier elección de los puntos (x_k, y_k, z_k) dentro de cada subarco, cuando $n \to \infty$ y $\Delta s_k \to 0$, estas sumas se aproximan a la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds.$$

Ésta es exactamente la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de C, la cual se define como el trabajo total realizado.

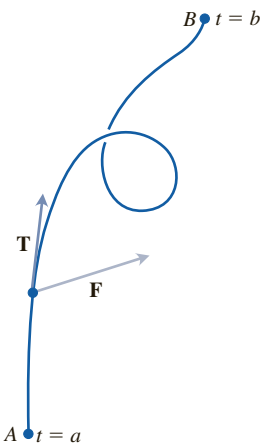


FIGURA 16.17 El trabajo realizado por una fuerza $\mathbf{F}$ es la integral de línea de la componente escalar $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ sobre la curva suave que va de A a B.

DEFINICIÓN Sean C una curva suave parametrizada por $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$, y $\mathbf{F}$ un campo de fuerza continuo sobre una región que contiene a C. De esta forma, el **trabajo** realizado al mover un objeto desde el punto $A = \mathbf{r}(a)$ hasta el punto $B = \mathbf{r}(b)$ a lo largo de C es

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt. \tag{4}$$

El signo del número calculado mediante esta integral depende de la dirección en que se recorra la curva. Si invertimos la dirección del movimiento, también invertimos la dirección de $\mathbf{T}$ en la figura 16.17 y cambiamos el signo de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ y, por lo tanto, de su integral.

Al usar las notaciones aquí presentadas, expresamos la integral de trabajo de diferentes maneras, de acuerdo con lo que más nos convenga en cada caso. La tabla 16.2 indica cinco formas de escribir la integral de trabajo de la ecuación (4). En la tabla, las componentes del campo M, N y P son funciones de las variables intermedias x, y y z, las cuales, a la vez, son funciones de la variable independiente t a lo largo de la curva C en el campo vectorial. Es decir, a lo largo de la curva, $x = g(t)$, $y = h(t)$ y $z = k(t)$ con $dx = g'(t)dt$, $dy = h'(t)dt$ y $dz = k'(t)dt$.

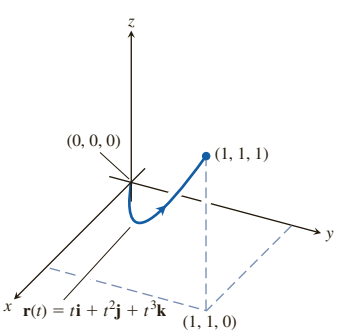


FIGURA 16.18 La curva del ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerza $\mathbf{F} = (y - x^2)\mathbf{i} + (z - y^2)\mathbf{j} + (x - z^2)\mathbf{k}$ a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$, desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 1, 1)$ (figura 16.18).

TABLA 16.2 Distintas maneras de escribir la integral de trabajo para $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ sobre la curva C: $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$, $a \le t \le b$.

$W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$	La definición
$= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$	Forma diferencial vectorial
$= \int_a^b \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt$	Evaluación vectorial paramétrica
$= \int_a^b \big(Mg'(t) + Nh'(t) + Pk'(t)\big)\, dt$	Evaluación escalar paramétrica
$= \int_C M\, dx + N\, dy + P\, dz$	Forma diferencial escalar

Solución En primer lugar, evaluamos $\mathbf{F}$ sobre la curva $\mathbf{r}(t)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= (y - x^2)\mathbf{i} + (z - y^2)\mathbf{j} + (x - z^2)\mathbf{k} \\ &= \underbrace{(t^2 - t^2)}_{0}\mathbf{i} + (t^3 - t^4)\mathbf{j} + (t - t^6)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Al sustituir $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

Luego, calculamos $d\mathbf{r}/dt$,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}.$$

Por último, encontramos $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}/dt$ e integramos desde $t = 0$ hasta $t = 1$:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= [\,(t^3 - t^4)\mathbf{j} + (t - t^6)\mathbf{k}\,] \cdot (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}) \\ &= (t^3 - t^4)(2t) + (t - t^6)(3t^2) = 2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\text{Trabajo} &= \int_0^1 (2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8)\, dt \\ &= \left[\frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{6}t^6 + \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{9}t^9\right]_0^1 = \frac{29}{60}.\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 5 Calcule el trabajo realizado por el campo de fuerza $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ al mover un objeto a lo largo de la curva C parametrizada por $\mathbf{r}(t) = \cos(\pi t)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \operatorname{sen}(\pi t)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$.

Solución Comenzamos por escribir $\mathbf{F}$ a lo largo de C como una función de t,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \cos(\pi t)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \operatorname{sen}(\pi t)\mathbf{k}.$$

A continuación, calculamos $d\mathbf{r}/dt$,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\pi \operatorname{sen}(\pi t)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + \pi \cos(\pi t)\mathbf{k}.$$

Luego calculamos el producto punto,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\pi \operatorname{sen}(\pi t)\cos(\pi t) + 2t^3 + \pi \operatorname{sen}(\pi t)\cos(\pi t) = 2t^3.$$

El trabajo realizado es la integral de línea

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt = \int_0^1 2t^3\, dt = \frac{t^4}{2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

■

Integrales de flujo y de circulación para campos de velocidad

Suponga que $\mathbf{F}$ representa el campo de velocidad de un fluido que fluye a través de una región en el espacio (un dique de marea o la cámara de una turbina en un generador hidroeléctrico, por ejemplo). En estas circunstancias, la integral de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ a lo largo de una curva en la región nos da el flujo del fluido a lo largo de la curva, o la *circulación* alrededor de esta última. Por ejemplo, el campo vectorial en la figura 16.11 da circulación cero alrededor de la circunferencia unitaria en el plano. Por ejemplo, el campo vectorial en la figura 16.12 da una circulación distinta de cero alrededor de la circunferencia unitaria.

DEFINICIÓN Si $\mathbf{r}(t)$ parametriza una curva suave C en el dominio de un campo continuo de velocidad $\mathbf{F}$, el **flujo** a lo largo de la curva desde $A = \mathbf{r}(a)$ hasta $B = \mathbf{r}(b)$ es

$$\text{Flujo} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds. \tag{5}$$

La integral se llama **integral de flujo**. Si la curva comienza y termina en el mismo punto, de forma que $A = B$, entonces, el flujo se llama **circulación** alrededor de la curva.

La dirección en que se recorre C es importante. Si la invertimos, entonces, $\mathbf{T}$ se sustituye por $-\mathbf{T}$ y el signo de la integral cambia. Calculamos las integrales de flujo de la misma manera que las integrales de trabajo.

EJEMPLO 6 El campo de velocidad de un fluido es $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$. Encuentre el flujo a lo largo de la hélice $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \le t \le \pi/2$.

Solución Evaluamos $\mathbf{F}$ sobre la curva

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k} = (\cos t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{k} \qquad \text{Se sustituye } x = \cos t,\ z = t,\ y = \operatorname{sen} t.$$

y después encontramos $d\mathbf{r}/dt$:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Después, integramos $\mathbf{F} \cdot (d\mathbf{r}/dt)$ desde $t = 0$ hasta $t = \dfrac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= (\cos t)(-\operatorname{sen} t) + (t)(\cos t) + (\operatorname{sen} t)(1) \\ &= -\operatorname{sen} t \cos t + t\cos t + \operatorname{sen} t.\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\text{Flujo} &= \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt = \int_0^{\pi/2} (-\operatorname{sen} t \cos t + t\cos t + \operatorname{sen} t)\, dt \\ &= \left[\frac{\cos^2 t}{2} + t \operatorname{sen} t\right]_0^{\pi/2} = \left(0 + \frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + 0\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

■

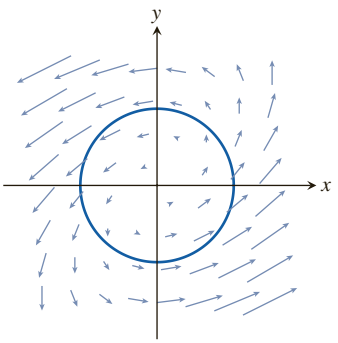


FIGURA 16.19 El campo vectorial **F** y la curva **r**(*t*) del ejemplo 7.

EJEMPLO 7 Determine la circulación del campo $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ a lo largo de la circunferencia $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$ (figura 16.19).

Solución En la circunferencia, $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j} = (\cos t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}$, y

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}.$$

Entonces,

$$\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\operatorname{sen} t \cos t + \underbrace{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}_{1}$$

da como resultado

$$\text{Circulación} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt = \int_0^{2\pi} (1 - \operatorname{sen} t \cos t)\, dt$$

$$= \left[t - \frac{\operatorname{sen}^2 t}{2} \right]_0^{2\pi} = 2\pi.$$

Como sugiere la figura 16.19, un fluido con este campo de velocidad circula en *sentido contrario al de las manecillas del reloj* alrededor de la circunferencia, así que la circulación es positiva. ■

Flujo a través de una curva plana cerrada simple

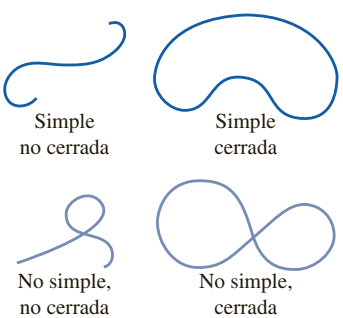


FIGURA 16.20 Distintas curvas simples o cerradas. Las curvas cerradas también se conocen como lazos.

Una curva en el plano *xy* es **simple** si no se cruza a sí misma (figura 16.20). Cuando una curva inicia y termina en el mismo punto, es una **curva cerrada** o un **lazo**. Para encontrar la razón a la que un fluido entra o sale de una región encerrada por una curva suave, simple y cerrada *C* en el plano *xy*, calculamos la integral de línea sobre *C* de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$, la componente escalar del campo de velocidad del fluido en la dirección del vector normal a la curva, que apunta hacia fuera. Utilizamos sólo la componente normal de **F**, e ignoramos la componente tangencial, porque aquélla conduce al flujo a través de *C*. El valor de la integral es el *flujo* de **F** a través de *C*. *Flujo* es la expresión latina que significa *fluir*, pero muchos cálculos de flujo no implican movimiento. Si **F** fuera un campo eléctrico o un campo magnético, la integral de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ continuaría siendo el flujo del campo a través de *C*.

DEFINICIÓN Si *C* es una curva simple, cerrada y suave en el dominio de un campo vectorial continuo $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ en el plano, y si **n** es el vector unitario normal a *C* que apunta hacia fuera, el **flujo** de **F** a través de *C* es

$$\text{Flujo de } \mathbf{F} \text{ a través de } C = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds. \tag{6}$$

Observe la diferencia entre el flujo y la circulación. El flujo de **F** a través de *C* es la integral de línea con respecto a la longitud de arco de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$, es decir, la componente escalar de **F** en la dirección del vector normal saliente. La circulación de **F** alrededor de *C* es la integral de línea con respecto a la longitud de arco de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$, es decir, la componente escalar de **F** en la dirección del vector tangente unitario. El flujo es la integral de la componente normal de **F**, y la circulación es la integral de la componente tangencial de **F**. En la sección 16.6 definimos flujo a través de una superficie.

Para evaluar la integral para el flujo en la ecuación (6), iniciamos con una parametrización suave

$$x = g(t), \qquad y = h(t), \qquad a \le t \le b,$$

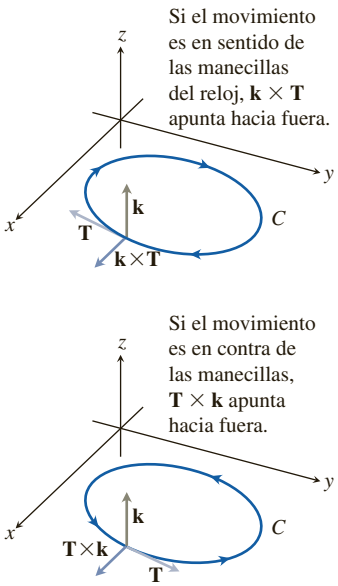


FIGURA 16.21 Para encontrar un vector normal unitario que apunte hacia fuera de una curva C simple y suave en el plano xy, la cual se recorre en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando t crece, tomamos $\mathbf{n} = \mathbf{T} \times \mathbf{k}$. Cuando el movimiento es en sentido de las manecillas del reloj, tomamos $\mathbf{n} = \mathbf{k} \times \mathbf{T}$.

que traza la curva C exactamente una vez cuando t crece de a a b. Encontramos el vector unitario normal $\mathbf{n}$ que apunta hacia fuera, calculando el producto cruz del vector unitario tangente a la curva $\mathbf{T}$ con el vector $\mathbf{k}$. Pero, ¿cuál orden debemos elegir? ¿$\mathbf{T} \times \mathbf{k}$ o $\mathbf{k} \times \mathbf{T}$? ¿Cuál apunta hacia fuera? Esto depende de la forma de recorrer C cuando t crece. Si el movimiento es en el sentido de las manecillas del reloj, $\mathbf{k} \times \mathbf{T}$ apunta hacia fuera; si el movimiento es en contra de las manecillas, $\mathbf{T} \times \mathbf{k}$ apunta hacia fuera (figura 16.21). La elección usual es $\mathbf{n} = \mathbf{T} \times \mathbf{k}$, lo que supone que el movimiento es en contra de las manecillas del reloj. Así, aunque el valor de la integral en la ecuación (6) no depende de la manera en que se recorra C, las fórmulas que estamos a punto de deducir para calcular $\mathbf{n}$ y evaluar la integral suponen que el movimiento es en contra de las manecillas del reloj.

En términos de componentes,

$$\mathbf{n} = \mathbf{T} \times \mathbf{k} = \left(\frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j}\right) \times \mathbf{k} = \frac{dy}{ds}\mathbf{i} - \frac{dx}{ds}\mathbf{j}.$$

Si $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$, entonces,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = M(x, y)\frac{dy}{ds} - N(x, y)\frac{dx}{ds}.$$

Por lo tanto,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_C \left(M\frac{dy}{ds} - N\frac{dx}{ds}\right) ds = \oint_C M\, dy - N\, dx.$$

Colocamos una circunferencia dirigida $\circlearrowleft$ en la última integral, para recordar que la integración en la curva cerrada C es en contra de las manecillas del reloj. Para evaluar esta integral, expresamos M, dy, N y dx en términos del parámetro t e integramos desde $t = a$ hasta $t = b$. No necesitamos conocer $\mathbf{n}$ ni ds explícitamente para determinar el flujo.

Cálculo del flujo a través de una curva suave y cerrada en el plano

$$(\text{Flujo de } \mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} \text{ a través de } C) = \oint M\, dy - N\, dx \qquad (7)$$

La integral se evalúa con cualquier parametrización suave $x = g(t)$, $y = h(t)$, $a \le t \le b$, que recorra C en sentido contrario al de las manecillas del reloj, exactamente una vez.

EJEMPLO 8 Determine el flujo de $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ a través de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el plano xy. (El campo vectorial y la curva se mostraron antes en la figura 16.19).

Solución La parametrización $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$, recorre la circunferencia en sentido contrario al de las manecillas del reloj exactamente una vez. Entonces, usamos esta parametrización en la ecuación (7). Con

$$M = x - y = \cos t - \operatorname{sen} t, \qquad dy = d(\operatorname{sen} t) = \cos t\, dt$$
$$N = x = \cos t, \qquad dx = d(\cos t) = -\operatorname{sen} t\, dt,$$

obtenemos

$$\text{Flujo} = \oint_C M\, dy - N\, dx = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \operatorname{sen} t \cos t + \cos t \operatorname{sen} t)\, dt \qquad \text{Ecuación (7)}$$
$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi.$$

El flujo de $\mathbf{F}$ a través de la circunferencia es π. Como la respuesta es positiva, el flujo neto a través de la curva es hacia fuera. Un flujo neto hacia dentro daría un flujo negativo. ■

Ejercicios 16.2

Campos vectoriales

Determine el campo gradiente de las funciones de los ejercicios 1 a 4.

1. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$
2. $f(x, y, z) = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
3. $g(x, y, z) = e^z - \ln(x^2 + y^2)$
4. $g(x, y, z) = xy + yz + xz$
5. Dé una fórmula $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ para el campo vectorial en el plano con la propiedad de que $\mathbf{F}$ apunte hacia el origen con una magnitud inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de (x, y) al origen. [El campo no está definido en $(0, 0)$].
6. Dé una fórmula $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ para el campo vectorial en el plano con la propiedad de que $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ en $(0, 0)$, y que en cualquier otro punto (a, b), $\mathbf{F}$ sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ y apunte en la dirección de las manecillas del reloj con una magnitud $|\mathbf{F}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Integrales de línea de campos vectoriales

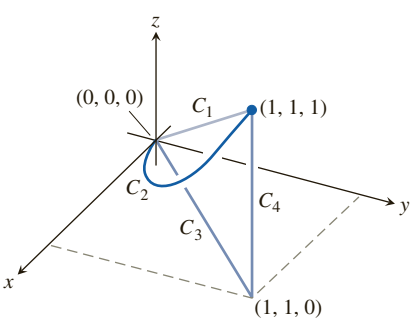
En los ejercicios 7 a 12, encuentre las integrales de línea de $\mathbf{F}$ desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 1, 1)$ sobre cada una de las siguientes trayectorias en la figura anexa.

a) La trayectoria en línea recta C_1: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$

b) La trayectoria curva C_2: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$

c) La trayectoria $C_3 \cup C_4$ formada por el segmento de recta desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 1, 0)$ seguido por el segmento desde $(1, 1, 0)$ hasta $(1, 1, 1)$

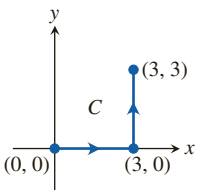
7. $\mathbf{F} = 3y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$
8. $\mathbf{F} = [1/(x^2 + 1)]\mathbf{j}$
9. $\mathbf{F} = \sqrt{z}\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + \sqrt{y}\mathbf{k}$
10. $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$
11. $\mathbf{F} = (3x^2 - 3x)\mathbf{i} + 3z\mathbf{j} + \mathbf{k}$
12. $\mathbf{F} = (y + z)\mathbf{i} + (z + x)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$



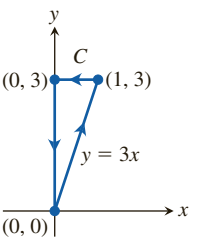
Integrales de línea con respecto a *x*, *y* y *z*

En los ejercicios 13 a 16, calcule las integrales de línea a lo largo de la trayectoria C que se indica.

13. $\displaystyle\int_C (x - y)\,dx$, donde C: $x = t$, $y = 2t + 1$, para $0 \le t \le 3$
14. $\displaystyle\int_C \frac{x}{y}\,dy$, donde C: $x = t$, $y = t^2$, para $1 \le t \le 2$
15. $\displaystyle\int_C (x^2 + y^2)\,dy$, donde C está dada en la siguiente figura



16. $\displaystyle\int_C \sqrt{x + y}\,dx$, donde C está dada en la siguiente figura



17. Evalúe cada una de las siguientes integrales a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - \mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$.

a) $\displaystyle\int_C (x + y - z)\,dx$ *b)* $\displaystyle\int_C (x + y - z)\,dy$

c) $\displaystyle\int_C (x + y - z)\,dz$

18. Evalúe cada una de las siguientes integrales a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j} - (\cos t)\mathbf{k}$, $0 \le t \le \pi$.

a) $\displaystyle\int_C xz\,dx$ *b)* $\displaystyle\int_C xz\,dy$ *c)* $\displaystyle\int_C xyz\,dz$

Trabajo

En los ejercicios 19 a 22, determine el trabajo realizado por una fuerza $\mathbf{F}$ sobre la curva en la dirección creciente de t.

19. $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + y\mathbf{j} - yz\mathbf{k}$
    $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$
20. $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$
    $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + (t/6)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$
21. $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$
    $\mathbf{r}(t) = (\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$
22. $\mathbf{F} = 6z\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + 12x\mathbf{k}$
    $\mathbf{r}(t) = (\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + (t/6)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

Integrales de línea en el plano

23. Evalúe $\int_C xy\,dx + (x + y)\,dy$ a lo largo de la curva $y = x^2$ desde $(-1, 1)$ hasta $(2, 4)$.
24. Evalúe $\int_C (x + y)\,dx + (x + y)\,dy$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj, a lo largo del triángulo con vértices en $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$.
25. Evalúe $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds$ para el campo vectorial $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ a lo largo de la curva $x = y^2$, desde $(4, 2)$ hasta $(1, -1)$.
26. Evalúe $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,d\mathbf{r}$ para el campo vectorial $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, a lo largo de la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$ desde $(1, 0)$ hasta $(0, 1)$.

Trabajo, circulación y flujo en el plano

27. Trabajo Determine el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j}$ en la línea recta desde (1, 1) hasta (2, 3).

28. Trabajo Determine el trabajo realizado por el gradiente de $f(x, y) = (x + y)^2$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj, a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ desde (2, 0) hasta regresar al mismo punto.

29. Circulación y flujo Encuentre la circulación y el flujo de los campos

$$\mathbf{F}_1 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{F}_2 = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

alrededor y a través de las siguientes curvas.

a) La circunferencia $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\text{sen } t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$

b) La elipse $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (4 \text{ sen } t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$

30. Flujo a través de una circunferencia Encuentre el flujo de los campos

$$\mathbf{F}_1 = 2x\mathbf{i} - 3y\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{F}_2 = 2x\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$$

a través de la circunferencia

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \text{ sen } t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

En los ejercicios 31 a 34, determine la circulación y el flujo del campo $\mathbf{F}$ alrededor y a través de una trayectoria semicircular cerrada que consta del arco de circunferencia $\mathbf{r}_1(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \text{ sen } t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le \pi$, seguido por el segmento de recta $\mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{i}$, $-a \le t \le a$.

31. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

32. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$

33. $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

34. $\mathbf{F} = -y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$

35. Integrales de flujo Calcule el flujo del campo de velocidades $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} - (x^2 + y^2)\mathbf{j}$ a lo largo de cada una de las trayectorias desde (1, 0) hasta (−1, 0) en el plano xy.

a) La mitad superior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$

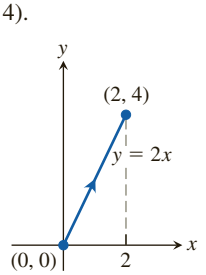
b) El segmento de recta desde (1, 0) hasta (−1, 0)

c) El segmento de recta desde (1, 0) hasta (0, −1), seguido por el segmento de recta desde (0, −1) hasta (−1, 0).

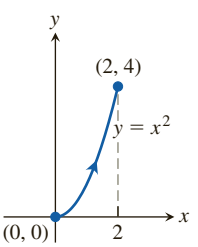
36. Flujo a través de un triángulo Encuentre el flujo del campo $\mathbf{F}$ del ejercicio 35, hacia fuera a través del triángulo con vértices en (1, 0), (0, 1), (−1, 0).

37. Calcule el flujo del campo de velocidades $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$ a lo largo de cada una de las siguientes trayectorias desde (0, 0) hasta (2, 4).

a)



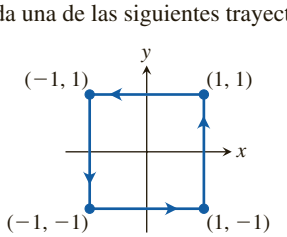
b)



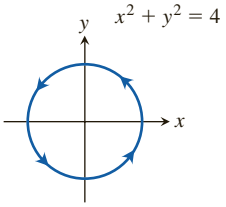
c) Considere una trayectoria diferente a las de los incisos *a*) y *b*), desde (0, 0) hasta (2, 4).

38. Obtenga la circulación del campo $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + (x + 2y)\mathbf{j}$ alrededor de cada una de las siguientes trayectorias cerradas.

a)



b)



c) Considere una trayectoria diferente de las de los incisos *a*) y *b*).

Campos vectoriales en el plano

39. Campo de rotación Trace el campo de rotación

$$\mathbf{F} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{j}$$

(vea la figura 16.12) junto con sus componentes horizontal y vertical, en un conjunto representativo de puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.

40. Campo radial Trace el campo radial

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

(vea la figura 16.11) junto con sus componentes horizontal y vertical, en un conjunto representativo de puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

41. Un campo de vectores tangentes

a) Encuentre un campo $\mathbf{G} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ en el plano xy, con la propiedad de que para todo punto $(a, b) \neq (0, 0)$, $\mathbf{G}$ sea un vector de magnitud $\sqrt{a^2 + b^2}$ tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ y que apunte en sentido contrario al de las manecillas del reloj. [El campo no está definido en (0, 0)].

b) ¿Cuál es la relación de $\mathbf{G}$ con el campo de rotación $\mathbf{F}$ de la figura 16.12?

42. Un campo de vectores tangentes

a) Encuentre un campo $\mathbf{G} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ en el plano xy, con la propiedad de que para todo punto $(a, b) \neq (0, 0)$, $\mathbf{G}$ sea un vector unitario tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ y que apunte en el sentido de las manecillas del reloj.

b) ¿Cuál es la relación de $\mathbf{G}$ con el campo de rotación $\mathbf{F}$ de la figura 16.12?

43. Vectores unitarios que apuntan hacia el origen Encuentre un campo $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ en el plano xy, con la propiedad de que en cada punto $(x, y) \neq (0, 0)$, $\mathbf{F}$ sea un vector unitario que apunte hacia el origen. [El campo no está definido en (0, 0)].

44. Dos campos "centrales" Encuentre un campo $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ en el plano xy, con la propiedad de que para cada punto $(x, y) \neq (0, 0)$, $\mathbf{F}$ sea un vector que apunte hacia el origen y $|\mathbf{F}|$ sea ***a)*** la distancia desde (x, y) hasta el origen, ***b)*** inversamente proporcional a la distancia desde (x, y) hasta el origen. [El campo no está definido en (0, 0)].

45. Trabajo y área Suponga que $f(t)$ es diferenciable y positiva para $a \le t \le b$. Sea C la trayectoria $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + f(t)\mathbf{j}$, $a \le t \le b$, y $\mathbf{F} = y\mathbf{i}$. ¿Hay alguna relación entre el valor de la integral de trabajo

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

y el área de la región acotada por el eje t, la gráfica de f y las rectas $t = a$ y $t = b$? Justifique su respuesta.

46. Trabajo realizado por una fuerza radial de magnitud constante Una partícula se desplaza a lo largo de una curva suave

$y = f(x)$ desde $(a, f(a))$ hasta $(b, f(b))$. La fuerza que mueve a la partícula tiene una magnitud constante k, y siempre apunta lejos del origen. Demuestre que el trabajo realizado por la fuerza es

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = k\left[(b^2 + (f(b))^2)^{1/2} - (a^2 + (f(a))^2)^{1/2}\right].$$

Integrales de flujo en el espacio

En los ejercicios 47 a 50, **F** es el campo de velocidad de un fluido que fluye a través de una región en el espacio. Encuentre el flujo a lo largo de la curva dada, en la dirección creciente de t.

47. $\mathbf{F} = -4xy\mathbf{i} + 8y\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 2$

48. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$

$\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$

49. $\mathbf{F} = (x - z)\mathbf{i} + x\mathbf{k}$

$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi$

50. $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

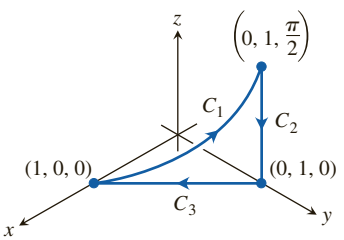
$\mathbf{r}(t) = (-2\cos t)\mathbf{i} + (2\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

51. Circulación Encuentre la circulación de $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 2z\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$ alrededor de la trayectoria cerrada formada por las tres curvas siguientes, recorridas en la dirección creciente de t.

C_1: $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi/2$

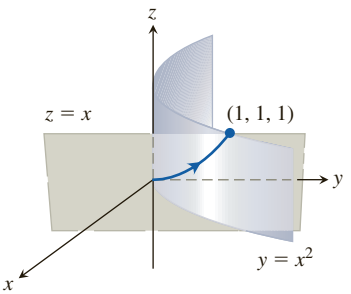
C_2: $\mathbf{r}(t) = \mathbf{j} + (\pi/2)(1 - t)\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1$

C_3: $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1 - t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1$



52. Circulación nula Sea C la elipse en que el plano $2x + 3y - z = 0$ corta al cilindro $x^2 + y^2 = 12$. Demuestre, sin evaluar la integral de línea directamente, que la circulación del campo $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ alrededor de C, en cualquier dirección, es igual a cero.

53. Flujo a lo largo de una curva El campo $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + y\mathbf{j} - yz\mathbf{k}$ es el campo de velocidades de un fluido en el espacio. Calcule el flujo desde (0, 0, 0) hasta (1, 1, 1) a lo largo de la curva de intersección del cilindro $y = x^2$ y el plano $z = x$. (*Sugerencia:* Use $t = x$ como parámetro).



54. Flujo de un campo gradiente Encuentre el flujo del campo $\mathbf{F} = \nabla(xy^2z^3)$:

a) Una vez a lo largo de la curva C del ejercicio 52, en el sentido de las manecillas del reloj, visto desde arriba.

b) A lo largo del segmento de recta desde (1, 1, 1) hasta (2, 1, −1).

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 55 a 60, utilice un software matemático para calcular el trabajo realizado por una fuerza **F** sobre la trayectoria dada:

a) Encuentre $d\mathbf{r}$ para la trayectoria $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$.

b) Evalúe la fuerza **F** a lo largo de la trayectoria.

c) Evalúe $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

55. $\mathbf{F} = xy^6\mathbf{i} + 3x(xy^5 + 2)\mathbf{j}$; $\mathbf{r}(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$

56. $\mathbf{F} = \dfrac{3}{1 + x^2}\mathbf{i} + \dfrac{2}{1 + y^2}\mathbf{j}$; $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le \pi$

57. $\mathbf{F} = (y + yz\cos xyz)\mathbf{i} + (x^2 + xz\cos xyz)\mathbf{j} + (z + xy\cos xyz)\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (3\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

58. $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + ze^x\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(t) = -t\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$, $1 \le t \le 4$

59. $\mathbf{F} = (2y + \operatorname{sen} x)\mathbf{i} + (z^2 + (1/3)\cos y)\mathbf{j} + x^4\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(t) = (\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + (\operatorname{sen} 2t)\mathbf{k}$, $-\pi/2 \le t \le \pi/2$

60. $\mathbf{F} = (x^2y)\mathbf{i} + \frac{1}{3}x^3\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + (2\operatorname{sen}^2 t - 1)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

16.3 Independencia de la trayectoria, campos conservativos y funciones potenciales

Un **campo gravitacional G** es un campo vectorial que representa el efecto de la gravedad en un punto del espacio debido a la presencia de un objeto de gran masa. La fuerza gravitacional sobre un cuerpo de masa m que se encuentra en el campo está dada por $\mathbf{F} = m\mathbf{G}$. De manera similar, un **campo eléctrico E** es un campo vectorial en el espacio que representa el efecto de las fuerzas eléctricas sobre una partícula cargada que se encuentra dentro de él. La fuerza sobre un cuerpo de carga q ubicado en el campo está dada por $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. En los campos eléctricos y gravitacionales, la cantidad de trabajo necesario para mover una masa o una carga desde un punto hasta otro depende de la posición inicial y la final del objeto, y no de la trayectoria elegida entre los dos puntos. En esta sección analizaremos los campos vectoriales que tienen esta propiedad y cómo se efectúa el cálculo de las integrales de trabajo asociadas con ellos.

Independencia de la trayectoria

Si A y B son dos puntos de una región abierta D en el espacio, la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de C desde A hasta B para el campo $\mathbf{F}$ definido sobre D, por lo regular, depende de la trayectoria de C, como vimos en la sección 16.1. Sin embargo, para algunos campos especiales, el valor de la integral de línea es el mismo para todas las trayectorias desde A hasta B.

DEFINICIONES Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial definido en una región abierta D en el espacio, y supongamos que para cualesquiera dos puntos A y B en D, la integral de línea $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de la trayectoria C desde A hasta B en D es la misma sobre todas las trayectorias desde A hasta B. Entonces, la integral $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ es **independiente de la trayectoria en D** y el campo $\mathbf{F}$ es **conservativo sobre D**.

La palabra *conservativo* proviene de la física, donde se usa para hacer referencia a los campos donde se cumple el principio de conservación de la energía. Cuando una integral de línea es independiente de la trayectoria C desde el punto A hasta el punto B, representamos la integral de línea por el símbolo $\int_A^B$ en vez de utilizar el símbolo habitual de la integral de línea $\int_C$. Esta sustitución nos ayuda a recordar la propiedad de independencia de la trayectoria.

En condiciones de diferenciabilidad, que por lo regular se cumplen en la práctica, demostraremos que un campo $\mathbf{F}$ es conservativo si y sólo si es el campo gradiente de una función escalar f, es decir, si y sólo si $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguna f. La función f toma entonces un nombre especial.

DEFINICIÓN Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial definido en D y $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguna función escalar f en D, entonces, f recibe el nombre de **función potencial de $\mathbf{F}$**.

Un potencial gravitacional es una función escalar cuyo campo gradiente es un campo gravitacional, un potencial eléctrico es una función escalar cuyo campo gradiente es un campo eléctrico, y así sucesivamente. Como veremos, una vez que hayamos encontrado la función potencial f para el campo $\mathbf{F}$, podemos evaluar todas las integrales de línea en el dominio de $\mathbf{F}$ para cualquier trayectoria entre A y B mediante

$$\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \nabla f\cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A). \tag{1}$$

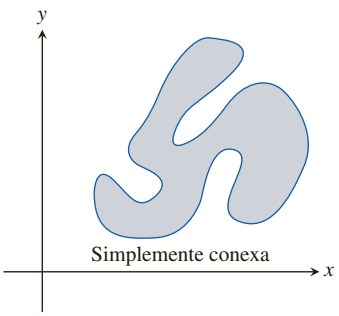
Si se considera una función ∇f para funciones de varias variables como algo similar a la derivada de f' para funciones de una sola variable, entonces, se observa que la ecuación (1) es la interpretación vectorial de la fórmula del teorema fundamental de cálculo (también llamado teorema del cambio neto)

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

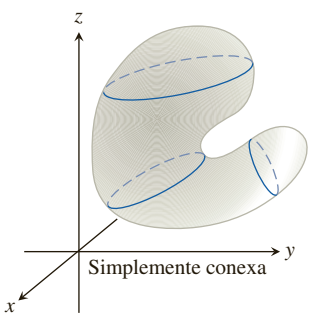
Los campos conservativos tienen otras propiedades notables. Por ejemplo, decir que $\mathbf{F}$ es conservativo en D equivale a decir que la integral de $\mathbf{F}$ en cada trayectoria cerrada en D es igual a cero. Es lógico que deban cumplirse ciertas condiciones por parte de las curvas, los campos y los dominios para que la ecuación (1) sea válida. A continuación estudiaremos esas condiciones.

Supuestos sobre curvas, campos vectoriales y dominios

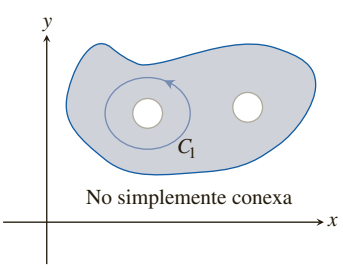
Para que los cálculos y resultados que vamos a deducir sean válidos, debemos suponer ciertas propiedades de las curvas, las superficies, los dominios y los campos vectoriales con los que estemos tratando. Estos supuestos se presentan en los enunciados de teoremas y se aplican en los ejemplos y ejercicios a menos que se especifique lo contrario.



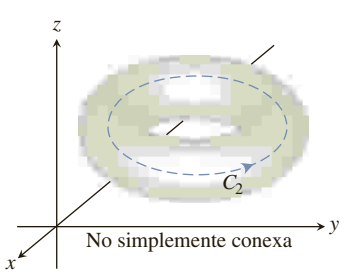
a)



b)



c)



d)

FIGURA 16.22 Cuatro regiones conexas. En *a*) y *b*), las regiones son simplemente conexas. En *c*) y *d*) las regiones no son simplemente conexas porque las curvas C_1 y C_2 no se contraen hasta formar un punto dentro de las regiones que las contienen.

Supongamos que todas las curvas son **suaves por tramos**; es decir, están formadas por un número finito de partes suaves unidas por los extremos, como explicamos en la sección 13.1. Suponemos también que los campos vectoriales $\mathbf{F}$ de las componentes tienen sus primeras derivadas parciales continuas.

Suponemos que los dominios D son **conexos**. Esto significa, en una región abierta, que dos puntos en D se pueden unir por medio de una curva suave que se encuentra en la región. Por último, suponemos que D es **simplemente conexa**, lo que significa que todo lazo en D se contrae hasta formar un punto sin salir de D. El plano que se obtiene al remover un disco es una región bidimensional que *no* es simplemente conexa; un lazo en el plano que rodea el disco no se puede contraer sin que salga por el "orificio" que se forma al remover el disco (vea la figura 16.22*c*). De manera similar, si removemos un segmento de recta del espacio, la región resultante D *no* es simplemente conexa. No hay forma de contraer un lazo alrededor de un segmento de recta hasta un punto, sin salir de D.

La conexidad y la conexidad simple no son lo mismo, y una no implica a la otra. Consideramos a las regiones conexas como de "una sola pieza" y a las regiones simplemente conexas como regiones "sin orificio alguno que atrape lazos". Todo el espacio es conexo y simplemente conexo. La figura 16.22 ilustra algunas de estas propiedades.

¡Cuidado! Algunos resultados de este capítulo pueden fallar si los aplicamos en situaciones que no cumplan estas condiciones. Por ejemplo, el criterio de las componentes para campos conservativos, que veremos después en esta sección, no es válido en dominios que no sean simplemente conexos (vea el ejemplo 5). No siempre se requiere que un dominio sea simplemente conexo, por lo que la condición se establecerá cuando se necesite.

Integrales de línea en campos conservativos

Los campos gradiente $\mathbf{F}$ se obtienen al diferenciar una función escalar f. Un teorema similar al teorema fundamental del cálculo ofrece una manera de evaluar las integrales de línea de los campos gradiente.

TEOREMA 1 El teorema fundamental de las integrales de línea Sea C una curva suave que une el punto A con el punto B en el plano o en el espacio, parametrizada por $\mathbf{r}(t)$. Sea f una función diferenciable con un vector gradiente continuo $\mathbf{F} = \nabla f$ en el dominio D que contiene a C. Así,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A).$$

Como el teorema fundamental, el teorema 1 nos ofrece una manera de evaluar las integrales de línea sin tener que aplicar los límites de las sumas de Riemann o calcular la integral de línea por el procedimiento utilizado en la sección 16.2. Antes de demostrar el teorema 1, presentamos un ejemplo.

EJEMPLO 1 Suponga que el campo de fuerza $\mathbf{F} = \nabla f$ es el gradiente de la función

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Determine el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ al mover un objeto a lo largo de una curva suave C que une $(1, 0, 0)$ con $(0, 0, 2)$ sin pasar por el origen.

Solución Una aplicación del teorema 1 indica que el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ a lo largo de cualquier curva suave C que une dos puntos sin pasar por el origen es

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(0, 0, 2) - f(1, 0, 0) = -\frac{1}{4} - (-1) = \frac{3}{4}. \quad \blacksquare$$

La fuerza gravitacional debida a un planeta y la fuerza eléctrica asociada con una partícula cargada pueden modelarse mediante el campo $\mathbf{F}$ descrito en el ejemplo 1 hasta una constante que depende de las unidades de medición.

Demostración del teorema 1 Suponga que A y B son dos puntos en la región D, y que C: $\mathbf{r}(t) = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j} + k(t)\mathbf{k}$, $a \le t \le b$, es una curva suave en D que une A y B. En la sección 14.5 encontramos que la derivada de una función escalar f a lo largo de una trayectoria C es el producto punto $\nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)$, así que tenemos

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_A^B \nabla f \cdot d\mathbf{r} && \mathbf{F} = \nabla f \\
&= \int_{t=a}^{t=b} \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t))\, dt && \text{Ecuación (7) de la sección 14.5} \\
&= f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)) && \text{Teorema del cambio neto} \\
&= f(B) - f(A). && \mathbf{r}(a) = A,\ \mathbf{r}(b) = B
\end{aligned}$$

■

Vemos entonces por el teorema 1 que la integral de línea del campo gradiente $\mathbf{F} = \nabla f$ es fácil de calcular una vez que conocemos la función f. Muchos campos vectoriales importantes en las aplicaciones son campos gradiente. El siguiente resultado, que proviene del teorema 1, muestra también que cualquier campo conservativo es de este tipo.

TEOREMA 2 Los campos conservativos son campos gradiente Sea $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ un campo vectorial cuyas componentes son continuas en una región conexa abierta D en el espacio. Entonces, $\mathbf{F}$ es un campo conservativo si y sólo si $\mathbf{F}$ es un campo gradiente ∇f para una función diferenciable f.

El teorema 2 afirma que $\mathbf{F} = \nabla f$ si y sólo si para dos puntos cualesquiera A y B en la región D, el valor de la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria C que une A y B en D.

Demostración del teorema 2 Si $\mathbf{F}$ es un campo gradiente, entonces, $\mathbf{F} = \nabla f$ para una función diferenciable f, y el teorema 1 indica que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A)$. El valor de la integral de línea no depende de C, sino sólo de sus extremos A y B. De esta manera, la integral de línea es independiente de la trayectoria y $\mathbf{F}$ satisface la definición de un campo conservativo.

Por otro lado, suponga que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo y que deseamos encontrar una función f en D que satisfaga $\nabla f = \mathbf{F}$. Primero, seleccionamos un punto A en D y establecemos $f(A) = 0$. Para cualquier otro punto B en D, definimos $f(B)$ como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde C es *cualquier* trayectoria suave en D desde A hasta B. El valor de $f(B)$ no depende de la selección de C, puesto que $\mathbf{F}$ es conservativo. Para demostrar que $\nabla f = \mathbf{F}$, necesitamos demostrar que $\partial f/\partial x = M$, $\partial f/\partial y = N$ y $\partial f/\partial z = P$.

Suponga que B tiene las coordenadas (x, y, z). Por definición, el valor de la función f en un punto cercano B_0 localizado en (x_0, y, z) es $\int_{C_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde C_0 es cualquier trayectoria desde A hasta B_0. Seleccionamos una trayectoria $C = C_0 \cup L$ desde A hasta B formada por el primer recorrido a lo largo de C_0 para llegar a B_0 y, luego, por el recorrido a lo largo del segmento de recta L desde B_0 hasta B (figura 16.23). Cuando B_0 está cerca de B, el segmento L está en D y, puesto que el valor $f(B)$ es independiente de la trayectoria desde A hasta B,

$$f(x, y, z) = \int_{C_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Al diferenciar, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{C_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \right).$$

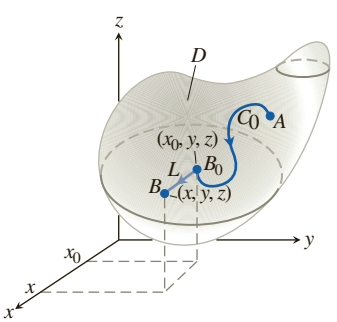


FIGURA 16.23 La función $f(x, y, z)$ en la demostración del teorema 2 se calcula mediante la integral de línea $\int_{C_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(B_0)$ desde A hasta B_0, más la integral de línea $\int_{C_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ a lo largo del segmento de recta L paralelo al eje x que une B_0 con B localizado en (x, y, z). El valor de f en A es $f(A) = 0$.

Sólo el último término de la derecha depende de x, por lo que

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Ahora parametrizamos L como $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $x_0 \le t \le x$. Así, $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{i}$, $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}/dt = M$ y $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{x_0}^{x} M(t, y, z)\, dt$. Entonces, al diferenciar, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_0}^{x} M(t, y, z)\, dt = M(x, y, z)$$

de acuerdo con el teorema fundamental del cálculo. Las derivadas parciales $\partial f/\partial y = N$ y $\partial f/\partial z = P$ se obtienen de manera similar, demostrando que $\mathbf{F} = \nabla f$. ■

EJEMPLO 2 Calcule el trabajo realizado por el campo conservativo

$$\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k} = \nabla f, \quad \text{donde} \quad f(x, y, z) = xyz,$$

a lo largo de cualquier curva suave C que una el punto $A(-1, 3, 9)$ con el punto $B(1, 6, -4)$.

Solución Con $f(x, y, z) = xyz$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_A^B \nabla f \cdot d\mathbf{r} && \mathbf{F} = \nabla f \text{ sin importar la trayectoria} \\ &= f(B) - f(A) && \text{Teorema 1} \\ &= xyz\big|_{(1,6,-4)} - xyz\big|_{(-1,3,9)} \\ &= (1)(6)(-4) - (-1)(3)(9) \\ &= -24 + 27 = 3. \end{aligned}$$

■

Una propiedad muy útil de las integrales de línea de los campos conservativos entra en juego cuando la trayectoria de integración es una curva cerrada o lazo. Usamos la notación $\oint_C$ para la integración alrededor de una trayectoria cerrada (que estudiaremos con más detalle en la siguiente sección).

TEOREMA 3 Propiedad de los lazos en campos conservativos Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ alrededor de todo lazo (esto es, una curva cerrada C) en D.
2. El campo $\mathbf{F}$ es conservativo sobre D.

Demostración de que el inciso 1 ⇒ inciso 2 Queremos demostrar que para dos puntos cualesquiera A y B en D, la integral de $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ tiene el mismo valor sobre dos trayectorias cualesquiera C_1 y C_2, desde A hasta B. Invertimos la dirección en C_2 para obtener una trayectoria $-C_2$ desde B hasta A (figura 16.24). Juntas, C_1 y $-C_2$ forman un lazo cerrado C, y por hipótesis,

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Así, las integrales sobre C_1 y C_2 dan el mismo valor. Observe que la definición de $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ indica que, al cambiar la dirección a lo largo de la curva, se invierte el signo de la integral de línea.

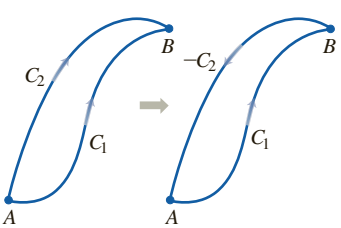


FIGURA 16.24 Si tenemos dos trayectorias desde A hasta B, podemos invertir una de ellas para formar un lazo.

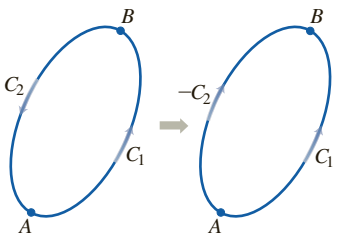


FIGURA 16.25 Si A y B están en un lazo, podemos invertir parte de este último para formar dos trayectorias desde A hasta B.

Demostración de que el inciso 2 ⇒ inciso 1 Queremos demostrar que la integral de $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ es cero sobre cualquier lazo cerrado C. Elegimos dos puntos, A y B, sobre C y los usamos para dividir C en dos partes: C_1 desde A hasta B, seguido por C_2 desde B hasta A (figura 16.25). Entonces,

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0. \quad \blacksquare$$

El siguiente diagrama resume los resultados de los teoremas 2 y 3.

$$\mathbf{F} = \nabla f \text{ en } D \quad \overset{\text{Teorema 2}}{\Leftrightarrow} \quad \mathbf{F} \text{ conservativo en } D \quad \overset{\text{Teorema 3}}{\Leftrightarrow} \quad \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0 \text{ sobre cualquier lazo en } D$$

Ahora surgen dos preguntas:

1. ¿Cómo sabemos si un campo vectorial $\mathbf{F}$ es conservativo?
2. Si $\mathbf{F}$ es un campo conservativo, ¿cómo encontramos la función potencial f (de manera que $\mathbf{F} = \nabla f$)?

Búsqueda de potenciales en campos conservativos

El criterio para que un campo vectorial sea conservativo implica la equivalencia de ciertas primeras derivadas parciales de las componentes del campo.

Criterio de las componentes para campos conservativos

Sea $\mathbf{F} = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$ un campo en un dominio abierto simplemente conexo, cuyas funciones componentes tienen sus primeras derivadas parciales continuas. De esta forma, $\mathbf{F}$ es conservativo si y sólo si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}. \tag{2}$$

Demostración de que las ecuaciones (2) se cumplen si F es conservativo Hay una función potencial f tal que

$$\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y} \qquad \text{Teorema de las derivadas mixtas, sección 14.3}$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial z}.$$

Las otras igualdades en las ecuaciones (2) se demuestran de forma similar. $\blacksquare$

La segunda parte de la demostración, referente a que las ecuaciones (2) implican que $\mathbf{F}$ es conservativo, es una consecuencia del teorema de Stokes, que revisaremos en la sección 16.7, y requiere que el dominio de $\mathbf{F}$ sea simplemente conexo.

Una vez que sabemos que $\mathbf{F}$ es conservativo, con frecuencia deseamos encontrar una función potencial para $\mathbf{F}$. Para ello, hay que resolver la ecuación $\nabla f = \mathbf{F}$ o

$$\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$$

con la finalidad de despejar f. Logramos esto integrando las tres ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = P,$$

como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Demuestre que $\mathbf{F} = (e^x \cos y + yz)\mathbf{i} + (xz - e^x \operatorname{sen} y)\mathbf{j} + (xy + z)\mathbf{k}$ es conservativo en su dominio natural y determine una función potencial para él.

Solución El dominio natural de $\mathbf{F}$ es todo el espacio, el cual es abierto y simplemente conexo. Aplicamos el criterio de las ecuaciones (2) para

$$M = e^x \cos y + yz, \qquad N = xz - e^x \operatorname{sen} y, \qquad P = xy + z$$

y calculamos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x = \frac{\partial N}{\partial z}, \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = y = \frac{\partial P}{\partial x}, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -e^x \operatorname{sen} y + z = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Las derivadas parciales son continuas, de manera que estas igualdades nos dicen que $\mathbf{F}$ es conservativo, por lo que existe una función f con $\nabla f = \mathbf{F}$ (teorema 2).

Encontramos f integrando las ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y + yz, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xz - e^x \operatorname{sen} y, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = xy + z. \tag{3}$$

Integramos la primera ecuación con respecto a x, manteniendo fijas a y y z, para obtener

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + g(y, z).$$

Escribimos la constante de integración como función de y y z, pues su valor puede depender de y y z aunque no de x. Después, calculamos $\partial f/\partial y$ a partir de esta ecuación y la igualamos con la expresión $\partial f/\partial y$ en las ecuaciones (3). Esto nos da

$$-e^x \operatorname{sen} y + xz + \frac{\partial g}{\partial y} = xz - e^x \operatorname{sen} y,$$

de manera que $\partial f/\partial y = 0$. Por lo tanto, g es función sólo de z, y

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + h(z).$$

Ahora calculamos $\partial f/\partial z$ a partir de esta ecuación e igualamos con la fórmula para $\partial f/\partial z$ de las ecuaciones (3). Esto nos da

$$xy + \frac{dh}{dz} = xy + z, \qquad \text{o} \qquad \frac{dh}{dz} = z,$$

por lo que

$$h(z) = \frac{z^2}{2} + C.$$

Por lo tanto,

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + C.$$

Tenemos un número infinito de funciones potenciales de $\mathbf{F}$, una por cada valor de C. ■

EJEMPLO 4 Demuestre que $\mathbf{F} = (2x - 3)\mathbf{i} - z\mathbf{j} + (\cos z)\mathbf{k}$ no es conservativo.

Solución Aplicamos el criterio de las componentes en las ecuaciones (2) y vemos de inmediato que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\cos z) = 0, \qquad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(-z) = -1.$$

Como son diferentes, $\mathbf{F}$ no es conservativo. No requerimos más verificaciones. ■

EJEMPLO 5 Demuestre que el campo vectorial

$$\mathbf{F} = \frac{-y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

satisface las ecuaciones del criterio de las componentes, pero no es conservativo sobre su dominio natural. Explique por qué esto es posible.

Solución Tenemos que $M = -y/(x^2 + y^2)$, $N = x/(x^2 + y^2)$ y $P = 0$. Si aplicamos el criterio de las componentes, encontramos que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial z}, \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = 0 = \frac{\partial M}{\partial z} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Así, parece que el campo $\mathbf{F}$ aprueba el criterio de las componentes. Sin embargo, el criterio supone que el dominio de $\mathbf{F}$ es simplemente conexo, pero éste no es el caso. Como $x^2 + y^2$ no puede ser cero, el dominio natural es el complemento del eje z que contiene lazos que no se contraen en un punto. Un lazo como éste es la circunferencia unitaria C en el plano xy. La circunferencia es parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$. Este lazo rodea al eje z y no se puede contraer en un punto mientras esté dentro del complemento del eje z.

Para demostrar que $\mathbf{F}$ no es conservativo, calculamos la integral de línea $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ alrededor del lazo C. En primer lugar, expresamos el campo en términos del parámetro t:

$$\mathbf{F} = \frac{-y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j} = \frac{-\operatorname{sen} t}{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}\mathbf{i} + \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}\mathbf{j} = (-\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}.$$

A continuación, calculamos $d\mathbf{r}/dt = (-\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}$, y luego calculamos la integral de línea como

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt = \int_0^{2\pi} \left(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t\right) dt = 2\pi.$$

Como la integral de línea de $\mathbf{F}$ alrededor del lazo C no es cero, el campo $\mathbf{F}$ no es conservativo, de acuerdo con el teorema 3. En la siguiente sección (figura 16.28*d*) se presenta el campo $\mathbf{F}$. ■

El ejemplo 5 indica que el criterio de las componentes no se aplica cuando el dominio del campo no es simplemente conexo. Sin embargo, si modificamos el dominio de forma que esté restringido a la esfera de radio 1 con centro en el punto (2, 2, 2), o a cualquier región de forma esférica que no contenga una parte del eje z, entonces, este nuevo dominio C es simplemente conexo. Ahora, la derivada parcial de las ecuaciones (2) y los supuestos del criterio de las componentes quedan satisfechos. En esta nueva situación, el campo $\mathbf{F}$ del ejemplo 5 es conservativo en D. Así como debemos ser cuidadosos cuando tratamos de

determinar si una función satisface una propiedad a través de su dominio (como la continuidad o la propiedad del valor intermedio), también debemos tener cuidado al identificar las propiedades que un campo vectorial debe o no tener en su dominio.

Formas diferenciables exactas

A menudo es conveniente expresar las integrales de trabajo y circulación en la forma diferencial

$$\int_C M\,dx + N\,dy + P\,dz$$

analizada en la sección 16.2. Estas integrales de línea son relativamente fáciles de evaluar si $M\,dx + N\,dy + P\,dz$ es la diferencial total de una función f, y C es cualquier trayectoria que une los dos puntos desde A hasta B. A partir de esto,

$$\begin{aligned}\int_C M\,dx + N\,dy + P\,dz &= \int_C \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \\ &= \int_A^B \nabla f \cdot d\mathbf{r} && \nabla f \text{ es conservativo} \\ &= f(B) - f(A). && \text{Teorema 1}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_A^B df = f(B) - f(A),$$

justo como sucede con las funciones diferenciables de una sola variable.

DEFINICIONES Cualquier expresión $M(x, y, z)dx + N(x, y, z)dy + P(x, y, z)\,dz$ es una **forma diferencial**. Una forma diferencial es **exacta** en un dominio D en el espacio si

$$M\,dx + N\,dy + P\,dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = df$$

para alguna función escalar f a través de D.

Observe que si $M\,dx + N\,dy + P\,dz = df$ en D, entonces, $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es el campo gradiente de f en D; de manera recíproca, si $\mathbf{F} = \nabla f$, entonces, la forma $M\,dx + N\,dy + P\,dz$ es exacta. Por lo tanto, el criterio para determinar si la forma es exacta es el mismo que se usa para determinar si $\mathbf{F}$ es conservativo.

Criterio de las componentes para determinar si $M\,dx + N\,dy + P\,dz$ es exacta

La forma diferencial $M\,dx + N\,dy + P\,dz$ es exacta en un dominio abierto y simplemente conexo si y sólo si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Esto equivale a decir que el campo $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es conservativo.

EJEMPLO 6 Demuestre que $y\,dx + x\,dy + 4\,dz$ es exacta y evalúe la integral

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-1)} y\,dx + x\,dy + 4\,dz$$

sobre cualquier trayectoria desde (1, 1, 1) hasta (2, 3, −1).

Solución Sean $M = y$, $N = x$, $P = 4$, y aplicamos el criterio para ver si la forma es exacta:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial z}, \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Estas igualdades nos dicen que $y\,dx + x\,dy + 4\,dz$ es exacta, de manera que

$$y\,dx + x\,dy + 4\,dz = df$$

para cierta función f, y el valor de la integral es $f(2, 3, -1) - f(1, 1, 1)$.

Determinamos f hasta obtener una constante, integrando las ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 4. \tag{4}$$

De la primera ecuación obtenemos

$$f(x, y, z) = xy + g(y, z).$$

La segunda ecuación nos dice que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{\partial g}{\partial y} = x, \qquad \text{o} \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

Por lo tanto, g es una función sólo de z y

$$f(x, y, z) = xy + h(z).$$

La tercera de las ecuaciones (4) nos dice que

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 + \frac{dh}{dz} = 4, \qquad \text{o} \qquad h(z) = 4z + C.$$

Por lo tanto,

$$f(x, y, z) = xy + 4z + C.$$

El valor de la integral de línea es independiente de la trayectoria tomada desde (1, 1, 1) hasta (2, 3, −1), y es igual a

$$f(2, 3, -1) - f(1, 1, 1) = 2 + C - (5 + C) = -3. \qquad \blacksquare$$

Ejercicios 16.3

Criterios para campos conservativos

¿Cuáles de los campos de los ejercicios 1 a 6 son conservativos, y cuáles no?

1. $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$
2. $\mathbf{F} = (y \operatorname{sen} z)\mathbf{i} + (x \operatorname{sen} z)\mathbf{j} + (xy \cos z)\mathbf{k}$
3. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} - y\mathbf{k}$
4. $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
5. $\mathbf{F} = (z + y)\mathbf{i} + z\mathbf{j} + (y + x)\mathbf{k}$
6. $\mathbf{F} = (e^x \cos y)\mathbf{i} - (e^x \operatorname{sen} y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

Determinación de las funciones potenciales

En los ejercicios 7 a 12, encuentre una función potencial f para el campo $\mathbf{F}$.

7. $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$
8. $\mathbf{F} = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$
9. $\mathbf{F} = e^{y+2z}(\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2x\mathbf{k})$
10. $\mathbf{F} = (y \operatorname{sen} z)\mathbf{i} + (x \operatorname{sen} z)\mathbf{j} + (xy \cos z)\mathbf{k}$
11. $\mathbf{F} = (\ln x + \sec^2(x + y))\mathbf{i} + \left(\sec^2(x + y) + \dfrac{y}{y^2 + z^2}\right)\mathbf{j} + \dfrac{z}{y^2 + z^2}\mathbf{k}$
12. $\mathbf{F} = \dfrac{y}{1 + x^2y^2}\mathbf{i} + \left(\dfrac{x}{1 + x^2y^2} + \dfrac{z}{\sqrt{1 - y^2z^2}}\right)\mathbf{j} + \left(\dfrac{y}{\sqrt{1 - y^2z^2}} + \dfrac{1}{z}\right)\mathbf{k}$

Formas diferenciales exactas

En los ejercicios 13 a 17, demuestre que las formas diferenciales en las integrales son exactas. Después, evalúe las integrales.

13. $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(2,3,-6)} 2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz$

14. $\displaystyle\int_{(1,1,2)}^{(3,5,0)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$

15. $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} 2xy\,dx + (x^2 - z^2)\,dy - 2yz\,dz$

16. $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(3,3,1)} 2x\,dx - y^2\,dy - \frac{4}{1+z^2}dz$

17. $\displaystyle\int_{(1,0,0)}^{(0,1,1)} \operatorname{sen} y\cos x\,dx + \cos y \operatorname{sen} x\,dy + dz$

Determinación de funciones potenciales para evaluar integrales de línea

Aunque no están definidos en todo el espacio R^3, los campos asociados con los ejercicios 18 a 22 son conservativos. Encuentre una función potencial para cada campo y evalúe las integrales como en el ejemplo 6.

18. $\displaystyle\int_{(0,2,1)}^{(1,\pi/2,2)} 2\cos y\,dx + \left(\frac{1}{y} - 2x\operatorname{sen} y\right)dy + \frac{1}{z}dz$

19. $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(1,2,3)} 3x^2\,dx + \frac{z^2}{y}dy + 2z\ln y\,dz$

20. $\displaystyle\int_{(1,2,1)}^{(2,1,1)} (2x\ln y - yz)\,dx + \left(\frac{x^2}{y} - xz\right)dy - xy\,dz$

21. $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \frac{1}{y}dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)dy - \frac{y}{z^2}dz$

22. $\displaystyle\int_{(-1,-1,-1)}^{(2,2,2)} \frac{2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz}{x^2+y^2+z^2}$

Aplicaciones y ejemplos

23. Revisión del ejemplo 6 Evalúe la integral

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-1)} y\,dx + x\,dy + 4\,dz$$

del ejemplo 6 determinando ecuaciones paramétricas para el segmento de recta desde (1, 1, 1) hasta (2, 3, −1) y evaluando la integral de línea de $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ a lo largo del segmento. Como $\mathbf{F}$ es conservativo, la integral es independiente de la trayectoria.

24. Evalúe

$$\int_C x^2\,dx + yz\,dy + (y^2/2)\,dz$$

a lo largo del segmento de recta C que une a (0, 0, 0) con (0, 3, 4).

Independencia de la trayectoria Demuestre que los valores de las integrales de los ejercicios 25 y 26 no dependen de la trayectoria desde A hasta B.

25. $\displaystyle\int_A^B z^2\,dx + 2y\,dy + 2xz\,dz$ **26.** $\displaystyle\int_A^B \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

En los ejercicios 27 y 28, encuentre una función potencial para $\mathbf{F}$.

27. $\mathbf{F} = \dfrac{2x}{y}\mathbf{i} + \left(\dfrac{1-x^2}{y^2}\right)\mathbf{j}, \quad \{(x, y): y > 0\}$

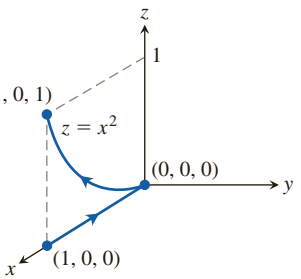
28. $\mathbf{F} = (e^x \ln y)\mathbf{i} + \left(\dfrac{e^x}{y} + \operatorname{sen} z\right)\mathbf{j} + (y\cos z)\mathbf{k}$

29. Trabajo a lo largo de diferentes trayectorias Determine el trabajo realizado por $\mathbf{F} = (x^2 + y)\mathbf{i} + (y^2 + x)\mathbf{j} + ze^z\mathbf{k}$ sobre las siguientes trayectorias desde (1, 0, 0) hasta (1, 0, 1).

a) El segmento de recta $x = 1, y = 0, 0 \le z \le 1$

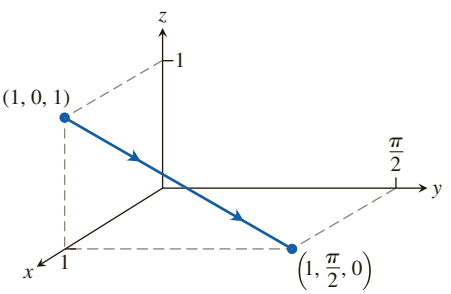
b) La hélice $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + (t/2\pi)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$

c) El eje x desde (1, 0, 0) hasta (0, 0, 0) seguido de la parábola $z = x^2$, $y = 0$ desde (0, 0, 0) hasta (1, 0, 1).

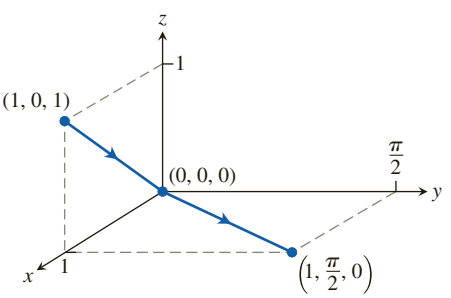


30. Trabajo a lo largo de trayectorias diferentes Determine el trabajo realizado por $\mathbf{F} = e^{yz}\mathbf{i} + (xze^{yz} + z\cos y)\mathbf{j} + (xye^{yz} + \operatorname{sen} y)\mathbf{k}$ sobre las siguientes trayectorias, desde (1, 0, 1) hasta $(1, \pi/2, 0)$.

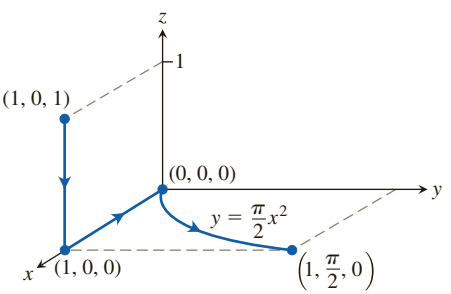
a) El segmento de recta $x = 1, y = \pi t/2, z = 1 - t, 0 \le t \le 1$



b) El segmento de recta desde (1, 0, 1) hasta el origen, seguido del segmento de recta desde el origen hasta el punto $(1, \pi/2, 0)$



c) El segmento de recta desde (1, 0, 1) hasta (1, 0, 0), seguido por el eje x de (1, 0, 0) al origen, seguido por la parábola $y = \pi x^2/2$, $z = 0$ desde allí hasta $(1, \pi/2, 0)$



31. Dos maneras de evaluar una integral de trabajo Sea $\mathbf{F} = \nabla(x^3y^2)$ y sea C la trayectoria en el plano xy, que va desde $(-1, 1)$ hasta $(1, 1)$, y que consiste en el segmento de recta desde $(-1, 1)$ hasta $(0, 0)$, seguido del segmento de recta desde $(0, 0)$ hasta $(1, 1)$. Evalúe $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ de dos maneras.

a) Encuentre parametrizaciones para los segmentos que conforman C y evalúe la integral.

b) Use $f(x, y) = x^3y^2$ como una función potencial para $\mathbf{F}$.

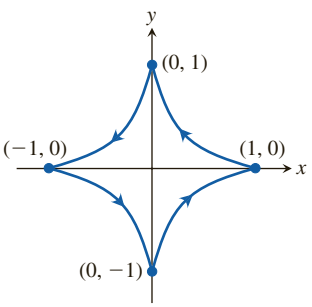
32. Integración a lo largo de distintas trayectorias Evalúe la integral de línea $\int_C 2x \cos y\, dx - x^2 \operatorname{sen} y\, dy$ a lo largo de las siguientes trayectorias C, en el plano xy.

a) La parábola $y = (x - 1)^2$ desde $(1, 0)$ hasta $(0, 1)$

b) El segmento de recta desde $(-1, \pi)$ hasta $(1, 0)$

c) El eje x, desde $(-1, 0)$ hasta $(1, 0)$

d) La astroide $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}^3 t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$, recorrida en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, desde $(1, 0)$ hasta regresar a $(1, 0)$



33. ***a)*** **Forma diferencial exacta** ¿Cuál debe ser la relación entre las constantes a, b y c para que la siguiente forma diferencial sea exacta?

$$(ay^2 + 2czx)\,dx + y(bx + cz)\,dy + (ay^2 + cx^2)\,dz$$

b) **Campo gradiente** ¿Para cuales valores de b y c

$$\mathbf{F} = (y^2 + 2czx)\mathbf{i} + y(bx + cz)\mathbf{j} + (y^2 + cx^2)\mathbf{k}$$

será un campo gradiente?

34. Gradiente de una integral de línea Suponga que $\mathbf{F} = \nabla f$ es un campo vectorial conservativo y

$$g(x, y, z) = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Demuestre que $\nabla g = \mathbf{F}$.

35. Trayectoria de menor trabajo Se le pide determinar la trayectoria a lo largo de la cual un campo de fuerza $\mathbf{F}$ desarrollará el menor trabajo al mover una partícula entre dos posiciones. Un cálculo rápido indica que $\mathbf{F}$ es conservativo. ¿Qué debe responder? Justifique su respuesta.

36. Un experimento revelador Mediante un experimento, se observa que un campo de fuerza $\mathbf{F}$ desarrolla sólo la mitad de trabajo al mover un objeto a lo largo de una trayectoria C_1 desde A hasta B, en comparación con el trabajo realizado al mover el objeto a lo largo de la trayectoria C_2, la cual también va desde A hasta B. ¿Qué concluiría acerca de $\mathbf{F}$? Justifique su respuesta.

37. Trabajo realizado por una fuerza constante Demuestre que el trabajo realizado por un campo de fuerza constante $\mathbf{F} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ al mover una partícula a lo largo de cualquier trayectoria desde A hasta B es $W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$.

38. Campo gravitacional

a) Encuentre una función potencial para el campo gravitacional

$$\mathbf{F} = -GmM\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

(G, m y M son constantes).

b) Sean P_1 y P_2 puntos que se encuentran a distancias s_1 y s_2 desde el origen. Demuestre que el trabajo realizado por el campo gravitacional del inciso *a)*, para mover una partícula desde P_1 hasta P_2, es

$$GmM\left(\frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1}\right).$$

16.4 Teorema de Green en el plano

Si $\mathbf{F}$ es un campo conservativo, entonces, sabemos que $\mathbf{F} = \nabla f$ para una función diferenciable f, y podemos calcular la integral de línea de $\mathbf{F}$ sobre cualquier trayectoria C que une el punto A al punto B como $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A)$. En esta sección deduciremos un método para calcular la integral de flujo o de trabajo sobre una curva *cerrada* C en el plano cuando el campo $\mathbf{F}$ *no* es conservativo. Este método, que es consecuencia del teorema de Green, nos permite convertir la integral de línea en una integral doble sobre la región encerrada por C.

Haremos el análisis en términos de campos de velocidad o de flujo de fluidos (un fluido es un líquido o un gas) porque son fáciles de imaginar. Sin embargo, el teorema de Green se aplica a cualquier campo vectorial, sin importar cualquier interpretación del campo, siempre que satisfaga ciertas condiciones. Presentaremos dos ideas nuevas para el teorema de Green: *densidad de circulación* alrededor de un eje perpendicular al plano y *divergencia* (o *densidad de flujo*).

Giro alrededor de un eje: la componente k del rotacional

Suponga que $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ es el campo de velocidad del flujo de un fluido en el plano y que las primeras derivadas parciales de M y N son continuas en cada punto de una

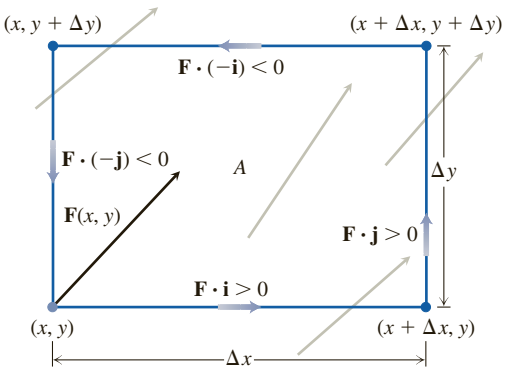


FIGURA 16.26 La razón o tasa a la que el fluido sale del rectángulo A a través de la orilla inferior en la dirección $\mathbf{i}$ es aproximadamente $\mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{i}\, \Delta x$, la cual es positiva para el campo vectorial $\mathbf{F}$ mostrado aquí. Para aproximar la razón del flujo en el punto (x, y), calculamos las razones (aproximadas) del flujo a través de cada lado en la dirección de las flechas sombreadas, sumamos esas razones y luego dividimos el resultado entre el área de A. Tomando el límite cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$, obtenemos la razón del flujo por unidad de área.

región R. Sea (x, y) un punto en R, y A un pequeño rectángulo con una esquina en (x, y) que, junto con su interior, está contenido por completo en R. Los lados del rectángulo son paralelos a los ejes de coordenadas y tienen longitudes Δx y Δy. Suponga que las componentes M y N no cambian de signo a través de la pequeña región que contiene al rectángulo A. La primera idea que necesitamos para establecer el teorema de Green tiene que ver con la forma de medir la tasa en un punto del giro de una rueda con paletas, cuyo eje es perpendicular al plano, en un fluido que se mueve en una región plana. Esto nos da una idea de la forma en que circula un fluido con respecto a los ejes, localizados en diferentes puntos, perpendiculares a la región. En ocasiones, los físicos se refieren a esto como la *densidad de circulación* de un campo vectorial $\mathbf{F}$ en un punto. Para obtenerlo, consideremos al campo de velocidades

$$\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

y al rectángulo A de la figura 16.26 (donde suponemos que ambas componentes de $\mathbf{F}$ son positivas).

La razón de circulación de $\mathbf{F}$ alrededor de la frontera A es la suma de las razones de flujo a lo largo de los lados en dirección tangencial. Para la orilla inferior, la razón de flujo es aproximadamente

$$\mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{i}\, \Delta x = M(x, y)\Delta x.$$

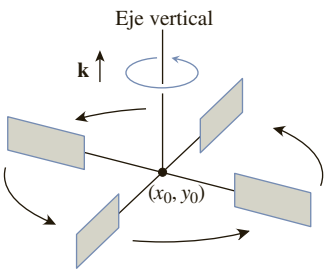
Esto es la componente escalar de la velocidad $\mathbf{F}(x, y)$ en la dirección del vector tangente $\mathbf{i}$ multiplicada por la longitud del segmento. Las razones de flujo son positivas o negativas dependiendo de las componentes de $\mathbf{F}$. Aproximamos la razón de circulación neta alrededor de la frontera rectangular de A sumando las razones de flujo a lo largo de los cuatro lados, como lo indican los siguientes productos punto.

Arriba:	$\mathbf{F}(x, y + \Delta y) \cdot (-\mathbf{i})\, \Delta x = -M(x, y + \Delta y)\Delta x$
Abajo:	$\mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{i}\, \Delta x = M(x, y)\Delta x$
Derecha:	$\mathbf{F}(x + \Delta x, y) \cdot \mathbf{j}\, \Delta y = N(x + \Delta x, y)\Delta y$
Izquierda:	$\mathbf{F}(x, y) \cdot (-\mathbf{j})\, \Delta y = -N(x, y)\Delta y$

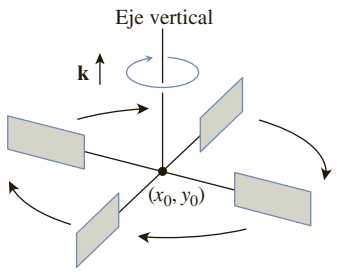
Sumamos los pares opuestos para obtener

$$\text{Arriba y abajo:} \quad -(M(x, y + \Delta y) - M(x, y))\Delta x \approx -\left(\frac{\partial M}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x$$

$$\text{Derecha e izquierda:} \quad (N(x + \Delta x, y) - N(x, y))\Delta y \approx \left(\frac{\partial N}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y.$$



Rotacional $\mathbf{F}(x_0, y_0) \cdot \mathbf{k} > 0$
Circulación en contra
de las manecillas del reloj



Rotacional $\mathbf{F}(x_0, y_0) \cdot \mathbf{k} < 0$
Circulación en el sentido
de las manecillas del reloj

FIGURA 16.27 En el flujo de un fluido incompresible sobre una región plana, la componente **k** del rotacional mide la razón de giro del fluido en un punto. La componente **k** del rotacional es positiva en los puntos donde la rotación va en sentido contrario al de las manecillas del reloj, y negativa donde la rotación es en el sentido de las manecillas.

Al sumar estas dos últimas ecuaciones, obtenemos la razón de circulación neta con orientación en el sentido contrario al de las manecillas del reloj,

$$\text{Razón de circulación alrededor del rectángulo} \approx \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\Delta x\, \Delta y.$$

Ahora dividimos entre $\Delta x\, \Delta y$, para obtener una estimación de la razón de circulación por unidad de área o *densidad de circulación* para el rectángulo:

$$\frac{\text{Circulación alrededor de un rectángulo}}{\text{área del rectángulo}} \approx \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Consideramos que Δx y Δy tienden a cero para definir la *densidad de circulación* de **F** en el punto (x, y).

Si vemos que la rotación es en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando observamos el plano xy hacia abajo desde la punta del vector unitario **k** (figura 16.27), entonces, la densidad de circulación es positiva. El valor de la densidad de circulación es la componente **k** de un campo vectorial de circulación más general que definiremos en la sección 16.7, llamado el *rotacional* del campo vectorial **F**. Para el teorema de Green sólo necesitamos la componente **k**, que se obtiene al tomar el producto punto del rotacional de **F** con **k**.

DEFINICIÓN La **densidad de circulación** de un campo vectorial $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ en el punto (x, y) es la expresión escalar

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}. \tag{1}$$

Esta expresión también se denomina **la componente k del rotacional**, y se denota con $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}$.

Si el agua se mueve sobre una región del plano xy en una capa delgada, entonces, la componente **k** del rotacional en el punto (x_0, y_0) nos brinda una forma de medir la rapidez y dirección de giro de una pequeña rueda con paletas colocada en el agua en (x_0, y_0) con su eje perpendicular al plano, paralelo a **k** (figura 16.27). Viendo hacia abajo sobre el plano xy, la rueda gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}$ es positivo, y en el sentido de las manecillas del reloj cuando la componente **k** es negativa.

EJEMPLO 1 Los siguientes campos vectoriales representan la velocidad de un gas que fluye en el plano xy. Determine la densidad de circulación de cada campo vectorial e interprete su significado físico. En la figura 16.28 se representan los campos vectoriales.

a) *Expansión o compresión uniforme:* $\mathbf{F}(x, y) = cx\mathbf{i} + cy\mathbf{j}$

b) *Rotación uniforme:* $\mathbf{F}(x, y) = -cy\mathbf{i} + cx\mathbf{j}$

c) *Flujo cortante:* $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i}$

d) *Efecto remolino:* $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$

Solución

a) *Expansión uniforme:* $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \dfrac{\partial}{\partial k}(cy) - \dfrac{\partial}{\partial y}(cx) = 0$. El gas no circula a escalas muy pequeñas.

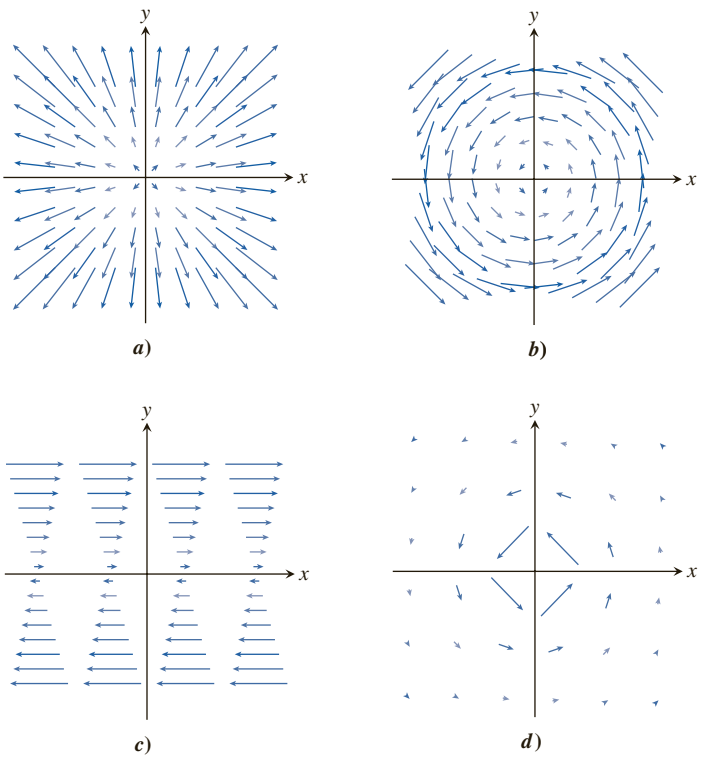


FIGURA 16.28 Campos de velocidad de un gas que fluye en el plano (ejemplo 1).

b) *Rotación:* $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \dfrac{\partial}{\partial x}(cx) - \dfrac{\partial}{\partial y}(-cy) = 2c$. La densidad de circulación constante indica rotación en todos los puntos. Si $c > 0$, la rotación es en sentido contrario al de las manecillas del reloj; si $c < 0$, la rotación es en el sentido de las manecillas del reloj.

c) *Flujo cortante:* $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = -\dfrac{\partial}{\partial y}(y) = -1$. La densidad de circulación es constante y negativa, de manera que un disco que flota en el agua experimenta algo como un flujo cortante en giros en el sentido de las manecillas del reloj. La tasa de rotación es la misma en cada punto. El efecto promedio del flujo del fluido es empujar el fluido en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de cada uno de los pequeños círculos mostrados en la figura 16.29.

d) *Remolino:*

$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

La densidad de circulación es 0 en todos los puntos lejanos al origen (donde el campo vectorial es indefinido y tiene lugar el efecto remolino), y el gas no está circulando en los puntos donde el campo vectorial está definido. ■

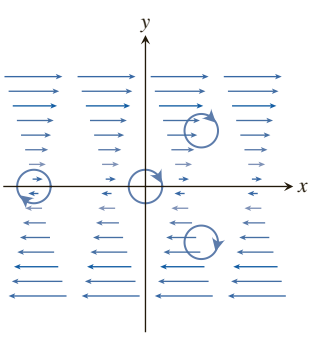


FIGURA 16.29 Un flujo cortante empuja el fluido en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de cada punto (ejemplo 1*c*).

Una forma del teorema de Green nos dice cómo la densidad de circulación se puede usar para calcular la integral de línea para el flujo en el plano xy. (La integral de flujo se definió en la sección 16.2). Una segunda forma del teorema nos indica cómo calcular la integral de flujo a partir de la *densidad de flujo*. A continuación definimos esta idea, y después presentamos ambas versiones del teorema.

Divergencia

Considere de nuevo el campo de velocidad $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ en un dominio que contiene al rectángulo A, como se muestra en la figura 16.30. Como antes, se supone

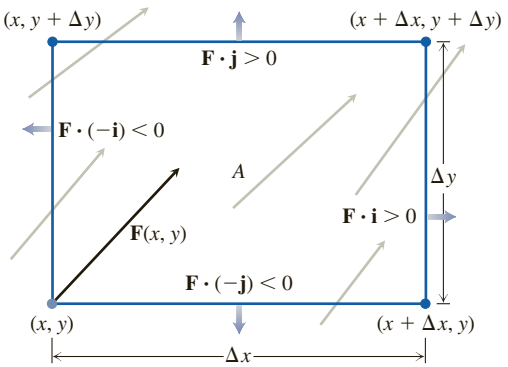


FIGURA 16.30 La razón a la que el fluido sale del rectángulo A a través de la orilla inferior en la dirección de la normal hacia fuera $-\mathbf{j}$ es aproximadamente $\mathbf{F}(x, y) \cdot (-\mathbf{j})\Delta x$, la cual es negativa para el campo vectorial $\mathbf{F}$ mostrado aquí. Para aproximar la razón del flujo en el punto (x, y), calculamos las razones (aproximadas) del flujo a través de cada lado en la dirección de las flechas sombreadas, sumamos esas razones y luego dividimos el resultado entre el área de A. Tomando el límite cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$, obtenemos la razón del flujo por unidad de área.

que las componentes del campo no cambian de signo en toda la pequeña región que contiene al rectángulo A. Ahora queremos determinar la razón con la que el fluido sale de A.

La razón a la que el fluido sale del rectángulo por la orilla inferior es aproximadamente (figura 16.30)

$$\mathbf{F}(x, y) \cdot (-\mathbf{j})\ \Delta x = -N(x, y)\Delta x.$$

Ésta es la componente escalar de la velocidad en (x, y) en la dirección normal hacia fuera multiplicada por la longitud del segmento. Si la velocidad se expresa en metros por segundo, por ejemplo, la razón del flujo se determinará en metros por segundo por metros, o metros cuadrados por segundo. Las razones a las cuales el fluido cruza los otros tres lados en las direcciones de sus normales hacia fuera se calculan de manera similar. Las razones del flujo serían positivas o negativas, dependiendo de los signos de las componentes de $\mathbf{F}$. Aproximamos la razón del flujo neto a través de la frontera rectangular de A sumando las razones de flujo a través de los cuatro lados, como se muestra en los siguientes productos punto.

Razones de flujo de salida:

Arriba:	$\mathbf{F}(x, y + \Delta y) \cdot \mathbf{j}\ \Delta x = N(x, y + \Delta y)\Delta x$
Abajo:	$\mathbf{F}(x, y) \cdot (-\mathbf{j})\ \Delta x = -N(x, y)\Delta x$
Derecha:	$\mathbf{F}(x + \Delta x, y) \cdot \mathbf{i}\ \Delta y = M(x + \Delta x, y)\Delta y$
Izquierda:	$\mathbf{F}(x, y) \cdot (-\mathbf{i})\ \Delta y = -M(x, y)\Delta y$

Sumando los lados opuestos, se obtiene:

$$\text{Arriba y abajo:} \qquad (N(x, y + \Delta y) - N(x, y))\Delta x \approx \left(\frac{\partial N}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x$$

$$\text{Izquierda y derecha:} \qquad (M(x + \Delta x, y) - M(x, y))\Delta y \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y.$$

Al sumar las dos últimas ecuaciones, obtenemos el efecto neto de las razones del flujo, o el

$$\text{Flujo a través de la frontera del rectángulo} \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)\Delta x \Delta y.$$

Ahora dividimos entre $\Delta x \Delta y$ para estimar el flujo total por unidad de área o *densidad de flujo* para el rectángulo:

$$\frac{\text{Flujo a través de la frontera del rectángulo}}{\text{área del rectángulo}} \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right).$$

Por último, hacemos que Δx y Δy tiendan a cero para definir la densidad de flujo de $\mathbf{F}$ en el punto (x, y). En matemáticas, la densidad del flujo se conoce como la *divergencia* de $\mathbf{F}$. La notación para esto es div $\mathbf{F}$, que se lee "divergencia de $\mathbf{F}$" o "div $\mathbf{F}$".

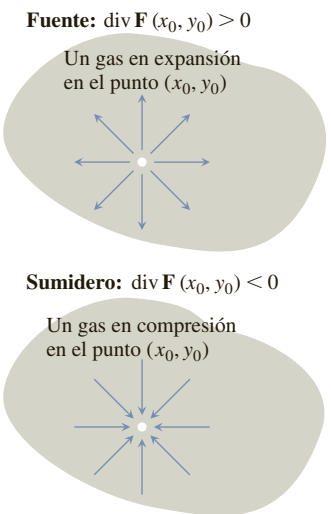


FIGURA 16.31 Si un gas se expande en el punto (x_0, y_0), las líneas de flujo tienen divergencia positiva; si el gas se comprime, la divergencia es negativa.

DEFINICIÓN La **divergencia (densidad de flujo)** de un campo vectorial $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ en el punto (x, y) es

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}. \tag{2}$$

A diferencia de un líquido, un gas es compresible, y la divergencia de su campo de velocidad mide cuánto se expande o se comprime en cada punto. De forma intuitiva, sabemos que si un gas se expande en el punto (x_0, y_0), las líneas de flujo divergen en ese punto (de ahí su nombre), y como el gas está saliendo de un rectángulo pequeño alrededor de (x_0, y_0), la divergencia de $\mathbf{F}$ en (x_0, y_0) es positiva. Si el gas se comprime en vez de expandirse, la divergencia será negativa (figura 16.31).

EJEMPLO 2 Determine la divergencia e interprete su significado para cada campo vectorial del ejemplo 1 que represente la velocidad de un gas que fluye en el plano xy.

Solución

a) $\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(cx) + \frac{\partial}{\partial y}(cy) = 2c$: Si $c > 0$, el gas está sujeto a una expansión uniforme; si $c < 0$, experimenta una compresión uniforme.

b) $\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(-cy) + \frac{\partial}{\partial y}(cx) = 0$: El gas no se expande ni se comprime.

c) $\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(y) = 0$: El gas no se expande ni se comprime.

d) $\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{x^2 + y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0$: Otra vez, la divergencia es cero en todos los puntos del dominio del campo de velocidad. ■

Los casos *b)*, *c)* y *d)* de la figura 16.28 son modelos posibles para los flujos bidimensionales de líquidos. En la dinámica de fluidos, cuando el campo de velocidad de un líquido que fluye siempre tiene una divergencia igual a cero, como en esos casos, se dice que el líquido es **incompresible**.

Dos formas del teorema de Green

En la sección 16.3 introdujimos la notación $\oint_C$ para la integración alrededor de una curva cerrada. Aquí daremos una explicación adicional acerca de la notación. Una curva cerrada simple C se puede atravesar en dos direcciones posibles. (Recordemos que una curva simple no se cruza a sí misma). La circulación en una curva cerrada simple C se da en dos direccio-

nes. La curva es atravesada en el sentido contrario al de las manecillas del reloj y se dice que está *positivamente orientada*, si la región que encierra se encuentra siempre a la izquierda de un objeto cuando éste se desplaza a lo largo de la trayectoria. De lo contrario, la curva se recorre en el sentido de las manecillas del reloj y está *negativamente orientada*. La integral de línea de un campo vectorial $\mathbf{F}$ a lo largo de C invierte su signo si cambiamos la orientación. Usamos la notación

$$\oint_C \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{r}$$

para la integral de línea cuando la curva cerrada simple C es atravesada en contra del movimiento de las manecillas del reloj, con su orientación positiva.

En una de sus formas, el teorema de Green afirma que la circulación en sentido contrario al de las manecillas del reloj de un campo vectorial alrededor de una curva cerrada simple es la doble integral de la componente $\mathbf{k}$ del rotacional del campo sobre la región encerrada por la curva. Recordemos la ecuación (5) que define la circulación en la sección 16.2.

TEOREMA 4 Teorema de Green (circulación rotacional o forma tangencial) Sea C una curva suave por tramos, cerrada y simple que encierra una región R en el plano. Sea $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ un campo vectorial donde M y N tienen primeras derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a R. Entonces, la circulación en contra de las manecillas del reloj de $\mathbf{F}$ alrededor de C es la doble integral de $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}$ sobre la región R.

$$\underbrace{\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds}_{\substack{\text{Circulación en sentido contrario} \\ \text{al de las manecillas del reloj}}} = \oint_C M\, dx + N\, dy = \underbrace{\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\, dy}_{\text{Integral del rotacional}} \tag{3}$$

Una segunda forma del teorema de Green afirma que, en condiciones adecuadas, el flujo hacia fuera de un campo vectorial a través de una curva cerrada simple en el plano es igual a la doble integral de la divergencia del campo sobre la región encerrada por la curva. Recordemos las fórmulas para el flujo de las ecuaciones (6) y (7) de la sección 16.2.

TEOREMA 5 Teorema de Green (divergencia de flujo o forma normal) Sea C una curva suave por tramos, cerrada y simple que encierra una región R en el plano. Sea $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ un campo vectorial donde M y N tienen primeras derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a R. Entonces, el flujo hacia fuera de $\mathbf{F}$ a través de C es igual a la doble integral de div $\mathbf{F}$ sobre la región R encerrada por C.

$$\underbrace{\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds}_{\text{Flujo hacia fuera}} = \oint_C M\, dy - N\, dx = \underbrace{\iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\, dy}_{\text{Integral de divergencia}} \tag{4}$$

Las dos formas del teorema de Green son equivalentes. Al aplicar la ecuación (3) al campo $\mathbf{G}_1 = -N\mathbf{i} + M\mathbf{j}$ se obtiene la ecuación (4), y al aplicar la ecuación (4) a $\mathbf{G}_2 = N\mathbf{i} - M\mathbf{j}$ se obtiene la ecuación (3).

Ambas formas del teorema de Green se consideran como dos generalizaciones bidimensionales del teorema del cambio neto de la sección 5.4. La circulación en sentido con-

trario al de las manecillas del reloj de $\mathbf{F}$ alrededor de C, definida por la integral de línea del lado izquierdo de la ecuación (3), es la integral de su razón de cambio (densidad de circulación) sobre la región R encerrada por C, la cual es la doble integral del lado derecho de la ecuación (3). Asimismo, el flujo hacia fuera de $\mathbf{F}$ a través de C, definido por la integral de línea del lado izquierdo de la ecuación (4), es la integral de línea de su razón de cambio (densidad de flujo) sobre la región R encerrada por C, la cual es la doble integral del lado derecho de la ecuación (4).

EJEMPLO 3 Verifique las dos formas del teorema de Green para el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

y la región R acotada por la circunferencia unitaria

$$C: \quad \mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Solución Al evaluar $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ y calculando las derivadas parciales de las componentes de $\mathbf{F}$, obtenemos

$$\begin{aligned} M &= \cos t - \operatorname{sen} t, & dx &= d(\cos t) = -\operatorname{sen} t\, dt, \\ N &= \cos t, & dy &= d(\operatorname{sen} t) = \cos t\, dt, \\ \frac{\partial M}{\partial x} &= 1, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -1, & \frac{\partial N}{\partial x} &= 1, \quad \frac{\partial N}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Los dos lados de la ecuación (3) son

$$\begin{aligned} \oint_C M\,dx + N\,dy &= \int_{t=0}^{t=2\pi} (\cos t - \operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t\, dt) + (\cos t)(\cos t\, dt) \\ &= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t \cos t + 1)\, dt = 2\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\, dy &= \iint_R (1 - (-1))\, dx\, dy \\ &= 2 \iint_R dx\, dy = 2\,(\text{área dentro de la circunferencia unitaria}) = 2\pi \end{aligned}$$

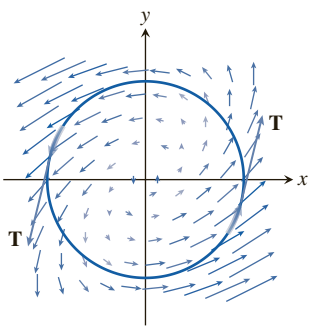


FIGURA 16.32 El campo vectorial del ejemplo 3 tiene una circulación en el sentido contrario al de las manecillas del reloj de 2π alrededor de la circunferencia unitaria.

La figura 16.32 ilustra el campo vectorial y la circulación alrededor de C.

Los dos lados de la ecuación (4) son

$$\begin{aligned} \oint_C M\,dy - N\,dx &= \int_{t=0}^{t=2\pi} (\cos t - \operatorname{sen} t)(\cos t\, dt) - (\cos t)(-\operatorname{sen} t\, dt) \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\, dy &= \iint_R (1 + 0)\, dx\, dy \\ &= \iint_R dx\, dy = \pi. \end{aligned}$$

■

Uso del teorema de Green para evaluar integrales de línea

Si construimos una curva cerrada C uniendo varias curvas por sus extremos, el proceso de evaluación de la integral de línea sobre C es laborioso, ya que habría que evaluar varias integrales. Sin embargo, si C acota una región R para la que se aplica el teorema de Green, podemos usar este teorema para cambiar la integral de línea alrededor de C por una doble integral sobre R.

EJEMPLO 4 Evalúe la integral de línea

$$\oint_C xy\,dy - y^2\,dx,$$

donde C es el cuadrado delimitado en el primer cuadrante por las rectas $x = 1$ y $y = 1$.

Solución Podemos usar cualquier forma del teorema de Green para cambiar la integral de línea por una doble integral sobre el cuadrado, donde C es la frontera del cuadrado y R es su interior.

1. *Con la forma normal*, ecuación (3): Si $M = -y^2$ y $N = xy$, se obtiene el resultado:

$$\oint_C -y^2\,dx + xy\,dy = \iint_R (y - (-2y))\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^1 3y\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \Big[3xy\Big]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 3y\,dy = \frac{3}{2}y^2\Big]_0^1 = \frac{3}{2}.$$

2. *Con la forma tangencial*, ecuación (4): Si $M = xy$ y $N = y^2$, obtenemos el mismo resultado:

$$\oint_C xy\,dy - y^2\,dx = \iint_R (y + 2y)\,dx\,dy = \frac{3}{2}.$$ ■

EJEMPLO 5 Calcule el flujo hacia fuera del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = 2e^{xy}\mathbf{i} + y^3\mathbf{j}$ a través del cuadrado acotado por las rectas $x = \pm 1$ y $y = \pm 1$.

Solución El cálculo del flujo con una integral de línea requiere de cuatro integraciones, una por cada lado del cuadrado. Con el teorema de Green, es posible cambiar la integral de línea por una integral doble. Si $M = 2e^{xy}$, $N = y^3$, C es el cuadrado y R su interior, tenemos que

$$\text{Flujo} = \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \oint_C M\,dy - N\,dx$$

$$= \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\,dy \qquad \text{Teorema de Green, ecuación (4)}$$

$$= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (2ye^{xy} + 3y^2)\,dx\,dy = \int_{-1}^1 \Big[2e^{xy} + 3xy^2\Big]_{x=-1}^{x=1} dy$$

$$= \int_{-1}^1 (2e^y + 6y^2 - 2e^{-y})\,dy = \Big[2e^y + 2y^3 + 2e^{-y}\Big]_{-1}^1 = 4.$$ ■

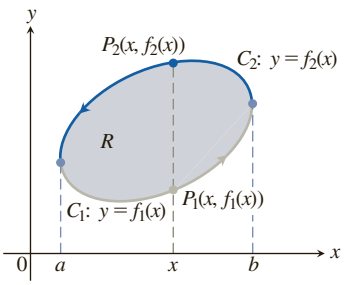


FIGURA 16.33 La curva frontera C está formada por C_1, la gráfica de $y = f_1(x)$, y C_2, la gráfica de $y = f_2(x)$.

Demostración del teorema de Green para regiones especiales

Sea C una curva suave, cerrada y simple en el plano xy, con la propiedad de que unas rectas paralelas a los ejes la cortan en no más de dos puntos. Sea R la región encerrada por C y supongamos que M, N y sus primeras derivadas parciales son continuas en todo punto de alguna región abierta que contiene tanto a C como a R. Queremos demostrar la forma de la circulación rotacional del teorema de Green,

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy. \tag{5}$$

La figura 16.33 indica que C está formada por dos partes dirigidas:

$$C_1: \quad y = f_1(x), \quad a \le x \le b, \qquad C_2: \quad y = f_2(x), \quad b \ge x \ge a.$$

Para cualquier x entre a y b, integramos $\partial M/\partial y$ con respecto a y desde $y = f_1(x)$ hasta $y = f_2(x)$, para obtener

$$\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\,dy = M(x, y)\Big]_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} = M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x)).$$

Luego, integramos con respecto a x desde a hasta b:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\,dy\,dx &= \int_a^b \left[\, M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x)) \,\right] dx \\
&= -\int_b^a M(x, f_2(x))\,dx - \int_a^b M(x, f_1(x))\,dx \\
&= -\int_{C_2} M\,dx - \int_{C_1} M\,dx \\
&= -\oint_C M\,dx.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, al invertir el orden de las ecuaciones, tenemos

$$\oint_C M\,dx = \iint_R \left(-\frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy. \tag{6}$$

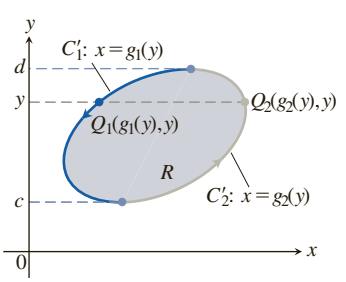


FIGURA 16.34 La curva frontera C está formada por C_1', la gráfica de $x = g_1(y)$, y C_2', la gráfica de $x = g_2(y)$.

La ecuación (6) es la mitad del resultado que necesitamos para la ecuación (5). Deducimos la otra mitad integrando $\partial N/\partial x$ primero con respecto a x y luego con respecto a y, como sugiere la figura 16.34. Esta figura muestra a la curva C de la figura 16.33 descompuesta en las dos partes dirigidas C_1': $x = g_1(y)$, $d \ge y \ge c$ y C_2': $x = g_2(y)$, $c \le y \le d$. El resultado de la doble integración es:

$$\oint_C N\,dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x}\,dx\,dy. \tag{7}$$

Al sumar las ecuaciones (6) y (7), obtenemos la ecuación (5) y esto concluye la demostración. ■

El teorema de Green también se aplica a otras regiones más generales, como las que se ilustran en la figura 16.35, pero aquí no se hará la demostración. Observe que la región de la figura 16.35*c*) no es simplemente conexa. Las curvas C_1 y C_h en su frontera están orientadas

de manera que la región R está siempre del lado izquierdo cuando las curvas se recorren en las direcciones que se indican, y se presenta la cancelación sobre los arcos frontera comunes atravesados en direcciones opuestas. Con esta convención, el teorema de Green es válido para regiones que no son simplemente conexas.

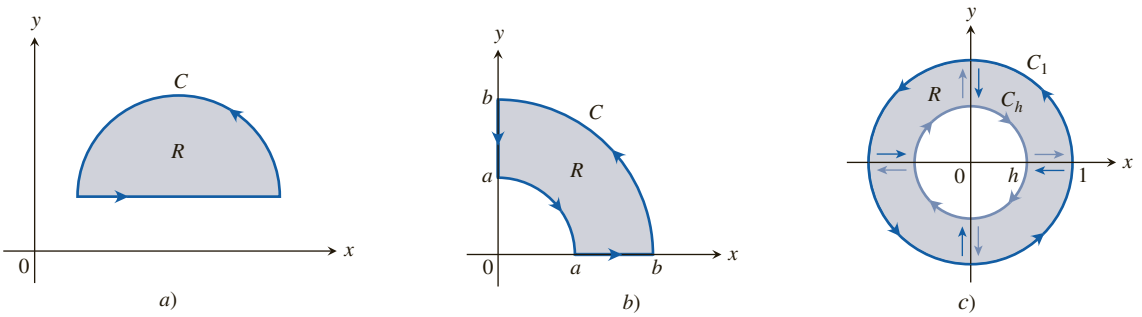


FIGURA 16.35 Otras regiones en las que se aplica el teorema de Green. En *c*) los ejes convierten la región en cuatro regiones simplemente conexas, y sumamos las integrales de línea a lo largo de las fronteras orientadas.

Ejercicios 16.4

Verificación del teorema de Green

En los ejercicios 1 a 4, verifique la conclusión del teorema de Green, evaluando los dos lados de las ecuaciones (3) y (4) para el campo $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$. En cada caso, considere como dominio de integración al disco R dado por $x^2 + y^2 \le a^2$ y a su circunferencia frontera C dada por $\mathbf{r} = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \operatorname{sen} t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$.

1. $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
2. $\mathbf{F} = y\mathbf{i}$
3. $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} - 3y\mathbf{j}$
4. $\mathbf{F} = -x^2y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j}$

Circulación y flujo

En los ejercicios 5 a 14, use el teorema de Green para calcular la circulación en sentido contrario al de las manecillas del reloj y el flujo hacia fuera para el campo $\mathbf{F}$ y la curva C.

5. $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j}$

   C: El cuadrado acotado por $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$

6. $\mathbf{F} = (x^2 + 4y)\mathbf{i} + (x + y^2)\mathbf{j}$

   C: El cuadrado acotado por $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$

7. $\mathbf{F} = (y^2 - x^2)\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j}$

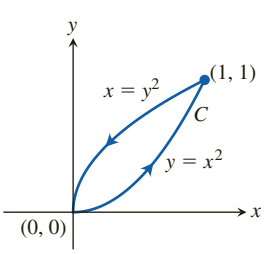
   C: El triángulo acotado por $y = 0$, $x = 3$, $y = x$

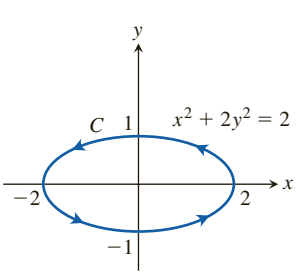
8. $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} - (x^2 + y^2)\mathbf{j}$

   C: El triángulo acotado por $y = 0$, $x = 1$, $y = x$

9. $\mathbf{F} = (xy + y^2)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$

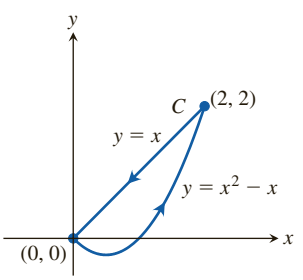
10. $\mathbf{F} = (x + 3y)\mathbf{i} + (2x - y)\mathbf{j}$

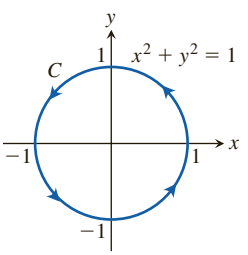




11. $\mathbf{F} = x^3y^2\mathbf{i} + \frac{1}{2}x^4y\,\mathbf{j}$

12. $\mathbf{F} = \dfrac{x}{1 + y^2}\mathbf{i} + \left(\tan^{-1} y\right)\mathbf{j}$





13. $\mathbf{F} = (x + e^x \operatorname{sen} y)\mathbf{i} + (x + e^x \cos y)\mathbf{j}$

    C: El lazo a la derecha de la lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$

14. $\mathbf{F} = \left(\tan^{-1}\dfrac{y}{x}\right)\mathbf{i} + \ln\left(x^2 + y^2\right)\mathbf{j}$

    C: La frontera de la región definida por las desigualdades en coordenadas polares $1 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le \pi$

15. Calcule la circulación en sentido contrario al de las manecillas del reloj y el flujo hacia fuera del campo $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$, alrededor y sobre la frontera de la región encerrada por las curvas $y = x^2$ y $y = x$ en el primer cuadrante.

16. Calcule la circulación en sentido contrario al de las manecillas del reloj y el flujo hacia fuera del campo $\mathbf{F} = (-\operatorname{sen} y)\mathbf{i} + (x \cos y)\mathbf{j}$ alrededor y sobre el cuadrado delimitado en el primer cuadrante por las rectas $x = \pi/2$ y $y = \pi/2$.

17. Calcule el flujo hacia fuera del campo

$$\mathbf{F} = \left(3xy - \frac{x}{1 + y^2}\right)\mathbf{i} + \left(e^x + \tan^{-1} y\right)\mathbf{j}$$

a través de la cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$, $a > 0$.

18. Calcule la circulación en sentido contrario al de las manecillas del reloj de $\mathbf{F} = (y + e^x \ln y)\mathbf{i} + (e^x/y)\mathbf{j}$ alrededor de la frontera de la región que está acotada arriba por la curva $y = 3 - x^2$ y abajo por la curva $y = x^4 + 1$.

Trabajo

En los ejercicios 19 y 20, determine el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ al mover una vez una partícula en sentido contrario al de las manecillas del reloj, alrededor de la curva dada.

19. $\mathbf{F} = 2xy^3\mathbf{i} + 4x^2y^2\mathbf{j}$

C: La frontera de la región "triangular" en el primer cuadrante encerrada por el eje x, la recta $x = 1$ y la curva $y = x^3$.

20. $\mathbf{F} = (4x - 2y)\mathbf{i} + (2x - 4y)\mathbf{j}$

C: La circunferencia $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$

Uso del teorema de Green

Aplique el teorema de Green para evaluar las integrales de los ejercicios 21 a 24.

21. $\oint_C (y^2\,dx + x^2\,dy)$

C: El triángulo acotado por $x = 0$, $x + y = 1$, $y = 0$

22. $\oint_C (3y\,dx + 2x^2\,dy)$

C: La frontera de $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \operatorname{sen} x$

23. $\oint_C (6y + x)\,dx + (y + 2x)\,dy$

C: La circunferencia $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$

24. $\oint_C (2x + y^2)\,dx + (2xy + 3y)\,dy$

C: Cualquier curva cerrada simple en el plano, para el cual se cumple el teorema de Green.

Cálculo de áreas con el teorema de Green Si una curva cerrada simple C en el plano y la región R que encierra satisfacen las hipótesis del teorema de Green, el área de R está dada por

Fórmula del área con el teorema de Green

$$\text{Área de } R = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

La razón es que por la ecuación (4), utilizada hacia atrás,

$$\text{Área de } R = \iint_R dy\,dx = \iint_R \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) dy\,dx$$

$$= \oint_C \frac{1}{2}x\,dy - \frac{1}{2}y\,dx.$$

Use la fórmula del área del teorema de Green, que acabamos de presentar, para determinar el área de las regiones encerradas por las curvas de los ejercicios 25 a 28.

25. La circunferencia $\mathbf{r}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \operatorname{sen} t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$

26. La elipse $\mathbf{r}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (b \operatorname{sen} t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$

27. La astroide $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}^3 t)\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$

28. Un arco de la cicloide $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$

29. Sea C la frontera de una región sobre la cual se cumple el teorema de Green. Use este último para calcular

a) $\oint_C f(x)\,dx + g(y)\,dy$

b) $\oint_C ky\,dx + hx\,dy$ (k y h son constantes).

30. Integral que sólo depende del área Demuestre que el valor de

$$\oint_C xy^2\,dx + (x^2y + 2x)\,dy$$

alrededor de cualquier cuadrado sólo depende del área del cuadrado y no de su localización en el plano.

31. Evalúe la integral

$$\oint_C 4x^3y\,dx + x^4\,dy$$

para cualquier trayectoria cerrada C.

32. Evalúe la integral

$$\oint_C -y^3\,dy + x^3\,dx$$

para cualquier trayectoria cerrada C.

33. Área como una integral de línea Demuestre que si R es una región en el plano, acotada por una curva C simple, cerrada y suave por tramos, entonces,

$$\text{Área de } R = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx.$$

34. Integral definida como una integral de línea Suponga que una función no negativa $y = f(x)$ tiene una primera derivada continua en $[a, b]$. Sea C la frontera de la región en el plano xy acotada abajo por el eje x, arriba por la gráfica de la función f y a los lados por las rectas $x = a$ y $x = b$. Demuestre que

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\oint_C y\,dx.$$

35. Área y centroide Sea A el área y $\bar{x}$ la coordenada x del centroide de la región R acotada por una curva C simple, cerrada y suave por tramos en el plano xy. Demuestre que

$$\frac{1}{2}\oint_C x^2\,dy = -\oint_C xy\,dx = \frac{1}{3}\oint_C x^2\,dy - xy\,dx = A\bar{x}.$$

36. Momento de inercia Sea I_y el momento de inercia con respecto al eje y de la región del ejercicio 35. Demuestre que

$$\frac{1}{3}\oint_C x^3\,dy = -\oint_C x^2y\,dx = \frac{1}{4}\oint_C x^3\,dy - x^2y\,dx = I_y.$$

37. Teorema de Green y ecuación de Laplace Suponiendo que todas las derivadas necesarias existen y son continuas, demuestre que si $f(x, y)$ satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

entonces,

$$\oint_C \frac{\partial f}{\partial y}dx - \frac{\partial f}{\partial x}dy = 0$$

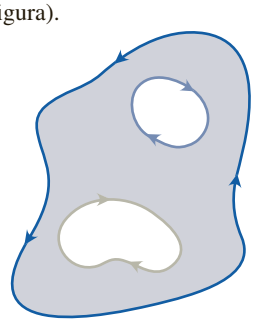
para todas las curvas cerradas C a las cuales se aplica el teorema de Green. (Lo contrario también es verdadero: si la integral de línea siempre se anula, entonces, f satisface la ecuación de Laplace).

38. Maximización del trabajo Entre todas las curvas simples, cerradas y suaves en el plano, orientadas en sentido contrario al de las manecillas del reloj, encuentre aquélla para la cual el trabajo dado por

$$\mathbf{F} = \left(\frac{1}{4}x^2y + \frac{1}{3}y^3\right)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

es el mayor. [*Sugerencia:* Pregúntese dónde es positivo (rot $\mathbf{F}$)$\cdot\mathbf{k}$].

39. Regiones con muchos orificios El teorema de Green se cumple para una región R con un número finito de orificios, siempre que las curvas de la frontera sean simples, cerradas y suaves, y que integremos sobre cada componente de la frontera en la dirección en que R se mantiene a la izquierda mientras avanzamos (vea la siguiente figura).



a) Sean $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ y C la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$. Evalúe la integral de flujo

$$\oint_K \nabla f \cdot \mathbf{n}\, ds$$

b) Sea K una curva arbitraria suave, simple y cerrada en el plano, que no pase por el punto (0, 0). Utilice el teorema de Green para demostrar que

$$\oint_C \nabla f \cdot \mathbf{n}\, ds.$$

tiene dos posibles valores, dependiendo de que (0, 0) esté adentro o afuera de K.

40. El criterio de Bendixson Las *líneas de corriente* de un flujo plano son las curvas suaves trazadas por las partículas individuales del fluido. Los vectores $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ del campo de velocidad del flujo son los vectores tangentes a las líneas de corriente del flujo. Demuestre que si el flujo ocurre en una región R simplemente conexa (sin orificios ni puntos faltantes) y si $M_x + N_y \neq 0$ en toda R, entonces, ninguna de las líneas de flujo en R es cerrada. En otras palabras, ninguna partícula del fluido tiene una trayectoria cerrada en R. El criterio $M_x + N_y \neq 0$ es el **criterio de Bendixson** para la no existencia de trayectorias cerradas.

41. Demuestre la ecuación (7) para concluir la demostración del caso especial del teorema de Green.

42. Componente del rotacional para campos conservativos ¿Se puede decir algo acerca de la componente del rotacional para un campo vectorial conservativo de dos dimensiones? Justifique su respuesta.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 43 a 46, utilice un software matemático y el teorema de Green para calcular la circulación del campo $\mathbf{F}$ en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, alrededor de una curva cerrada simple C. Realice los siguientes pasos:

a) Grafique C en el plano xy.

b) Determine el integrando $(\partial N/\partial x) - (\partial M/\partial y)$ para la forma tangencial del teorema de Green.

c) Determine los límites de integración (de la integral doble) a partir de la gráfica del inciso *a*), y evalúe la integral del rotacional para la circulación.

43. $\mathbf{F} = (2x - y)\mathbf{i} + (x + 3y)\mathbf{j}$, C: La elipse $x^2 + 4y^2 = 4$

44. $\mathbf{F} = (2x^3 - y^3)\mathbf{i} + (x^3 + y^3)\mathbf{j}$, C: La elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

45. $\mathbf{F} = x^{-1}e^y\mathbf{i} + (e^y \ln x + 2x)\mathbf{j}$,

C: La frontera de la región definida por $y = 1 + x^4$ (abajo) y $y = 2$ (arriba)

46. $\mathbf{F} = xe^y\mathbf{i} + (4x^2 \ln y)\mathbf{j}$,

C: El triángulo con vértices en (0, 0), (2, 0) y (0, 4)

16.5 Superficies y áreas

Hemos definido de tres maneras las curvas en el plano:

Forma explícita: $y = f(x)$

Forma implícita: $F(x, y) = 0$

Forma vectorial paramétrica: $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, $a \geq t \geq b$.

Tenemos definiciones análogas para superficies en el espacio:

Forma explícita: $z = f(x, y)$

Forma implícita: $F(x, y, z) = 0$.

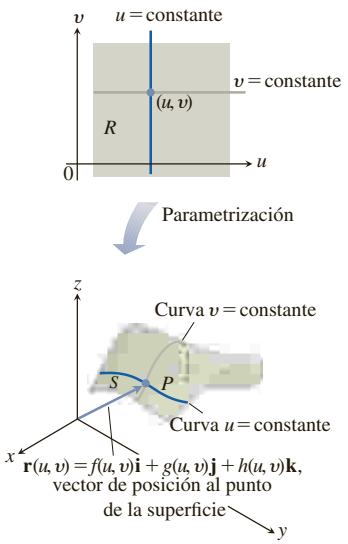


FIGURA 16.36 Una superficie parametrizada S expresada como una función vectorial de dos variables definidas en la región R.

Existe también una forma paramétrica para superficies que da la posición de un punto sobre una superficie como una función vectorial de dos variables. En esta sección estudiaremos esta nueva forma y la usaremos para obtener el área de una superficie mediante una integral doble. Las fórmulas de integrales dobles para áreas de superficies dadas de manera implícita o explícita se obtienen como casos especiales de la fórmula paramétrica más general.

Parametrizaciones de superficies

Suponga que

$$\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k} \tag{1}$$

es una función vectorial continua definida en una región R en el plano uv y uno a uno en el interior de R (figura 16.36). El rango de $\mathbf{r}$ es la **superficie** S definida o trazada por $\mathbf{r}$. La ecuación (1), junto con el dominio R, constituye una **parametrización** de la superficie. Las variables u y v son los **parámetros**, y R es el **dominio de los parámetros**. Para simplificar nuestro análisis, tomemos a R como el rectángulo definido por desigualdades de la forma $a \le u \le b$, $c \le v \le d$. El hecho de que $\mathbf{r}$ sea uno a uno en el interior de R, garantiza que S no se cruce a sí misma. Observe que la ecuación (1) es el equivalente vectorial de las *tres* ecuaciones paramétricas:

$$x = f(u, v), \qquad y = g(u, v), \qquad z = h(u, v).$$

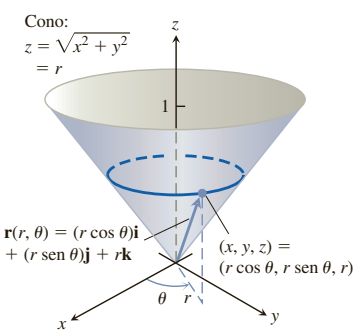


FIGURA 16.37 El cono del ejemplo 1 se puede parametrizar usando coordenadas cilíndricas.

EJEMPLO 1 Determine una parametrización del cono

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad 0 \le z \le 1.$$

Solución En este caso, las coordenadas cilíndricas dan una parametrización. Un punto cualquiera (x, y, z) en el cono (figura 16.37) tiene a $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ y $z = \sqrt{x^2 + y^2} = r$, con $0 \le r \le 1$ y $0 \le \theta \le 2\pi$. Al considerar $u = r$ y $v = \theta$ en la ecuación (1), se obtiene la parametrización

$$\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}, \qquad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

La parametrización es uno a uno en el interior del dominio de R, no así en la frontera de la punta del cono, donde $r = 0$. ■

EJEMPLO 2 Determine una parametrización para la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Solución Las coordenadas esféricas nos brindan lo que necesitamos. Un punto cualquiera (x, y, z) sobre la esfera (figura 16.38) tiene a $x = a\,\text{sen}\,\phi\cos\theta$, $y = a\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta$ y $z = a\cos\phi$, $0 \le \phi \le \pi$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Al considerar $u = \phi$ y $v = \theta$ en la ecuación (1), se obtiene la parametrización

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = (a\,\text{sen}\,\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (a\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{j} + (a\cos\phi)\mathbf{k}, \qquad 0 \le \phi \le \pi, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Otra vez, la parametrización es uno a uno en el interior del dominio R, aun cuando no lo es en los "polos" frontera donde $\phi = 0$ o $\phi = \pi$. ■

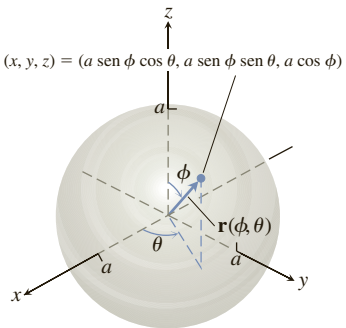


FIGURA 16.38 La esfera del ejemplo 2 se puede parametrizar usando coordenadas esféricas.

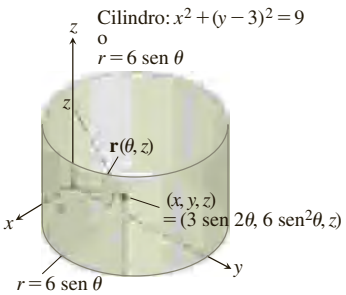


FIGURA 16.39 El cilindro del ejemplo 3 se puede parametrizar usando coordenadas cilíndricas.

EJEMPLO 3 Determine una parametrización para el cilindro

$$x^2 + (y - 3)^2 = 9, \qquad 0 \le z \le 5.$$

Solución En coordenadas cilíndricas, un punto (x, y, z) tiene $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ y $z = z$. Para los puntos del cilindro $x^2 + (y - 3)^2 = 9$ (figura 16.39), la ecuación es la misma que la ecuación polar de la base del cilindro en el plano xy:

$$\begin{aligned} x^2 + (y^2 - 6y + 9) &= 9 \\ r^2 - 6r\,\text{sen}\,\theta &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{matrix} x^2 + y^2 = r^2, \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{matrix}$$

o

$$r = 6\,\text{sen}\,\theta, \qquad 0 \le \theta \le \pi.$$

Por lo tanto, un punto típico del cilindro tiene

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta = 6\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = 3\,\text{sen}\,2\theta \\ y &= r\,\text{sen}\,\theta = 6\,\text{sen}^2\theta \\ z &= z. \end{aligned}$$

Si consideramos $u = \theta$ y $v = z$ en la ecuación (1), obtenemos la parametrización uno a uno

$$\mathbf{r}(\theta, z) = (3\,\text{sen}\,2\theta)\mathbf{i} + (6\,\text{sen}^2\theta)\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le z \le 5. \qquad \blacksquare$$

Área de una superficie

Nuestro objetivo es encontrar una integral doble para calcular el área de una superficie curva S, con base en la parametrización

$$\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}, \quad a \le u \le b, \quad c \le v \le d.$$

Necesitamos que S sea suave para la construcción que realizaremos. La definición de suavidad involucra las derivadas parciales de $\mathbf{r}$ con respecto a u y v:

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial h}{\partial u}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial h}{\partial v}\mathbf{k}.$$

DEFINICIÓN Una superficie parametrizada $\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}$ es **suave**, si $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$ son continuas y $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ nunca se anula en el interior del dominio de los parámetros.

En la definición de suavidad, la condición de que $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ nunca se anule significa que ambos vectores $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$ son diferentes de cero y que jamás se encuentran en la misma recta, de manera que siempre determinan un plano tangente a la superficie. En la frontera del dominio esta condición se vuelve más flexible, pero no afecta al cálculo del área.

Ahora considere un rectángulo pequeño ΔA_{uv} en R, con lados sobre las rectas $u = u_0$, $u = u_0 + \Delta u$, $v = v_0$, $v = v_0 + \Delta v$ (figura 16.40). Cada lado de ΔA_{uv} se transforma bajo la parametrización en una curva sobre la superficie S, y las cuatro curvas juntas acotan un "elemento de área curva" $\Delta\sigma_{uv}$. En la notación de la figura, el lado $v = v_0$ se transforma en la curva C_1, el lado $u = u_0$ en C_2, y su vértice común (u_0, v_0) se transforma en el punto P_0.

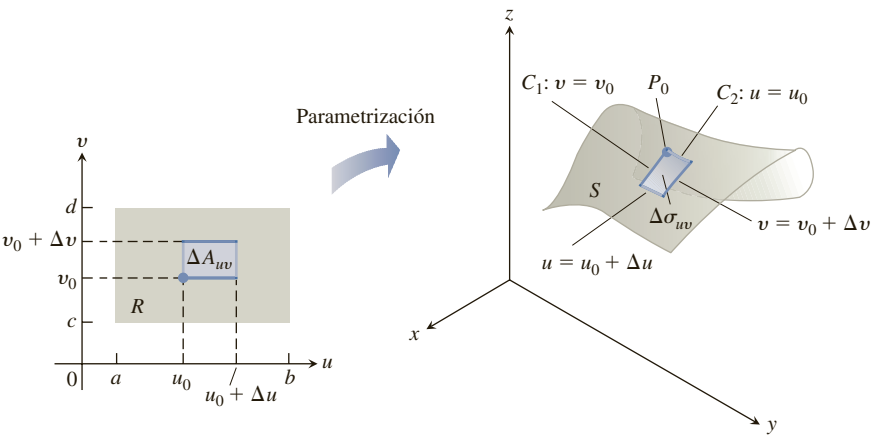


FIGURA 16.40 Un elemento de área rectangular ΔA_{uv} en el plano uv se transforma en un elemento de área curvado $\Delta\sigma_{uv}$ sobre S.

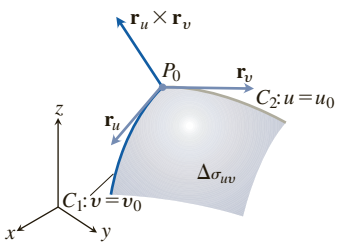


FIGURA 16.41 Una vista ampliada de un elemento de área de superficie $\Delta\sigma_{uv}$.

La figura 16.41 presenta una vista ampliada de $\Delta\sigma_{uv}$. El vector de la derivada parcial $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ es tangente a C_1 en P_0. Asimismo, $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ es tangente a C_2 en P_0. El producto cruz $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ es normal a la superficie en P_0. (Aquí comenzamos a utilizar la hipótesis de que S es suave. Queremos asegurarnos de que $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$).

Ahora aproximamos el elemento de superficie $\Delta\sigma_{uv}$ con el paralelogramo en el plano tangente, cuyos lados están determinados por los vectores $\Delta u\mathbf{r}_u$ y $\Delta v\mathbf{r}_v$ (figura 16.42). El área de este paralelogramo es

$$|\Delta u\mathbf{r}_u \times \Delta v\mathbf{r}_v| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,\Delta u\,\Delta v. \tag{2}$$

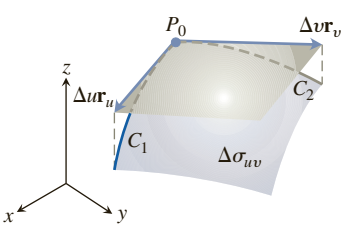


FIGURA 16.42 El área de un paralelogramo determinado por los vectores $\Delta u\mathbf{r}_u$ y $\Delta v\mathbf{r}_v$ se aproxima al área del elemento de área de superficie $\Delta\sigma_{uv}$.

Una partición de la región R en el plano uv por regiones rectangulares ΔA_{uv} genera una partición de la superficie S en elementos de área de superficie $\Delta\sigma_{uv}$. Aproximamos el área de cada elemento de superficie $\Delta\sigma_{uv}$ como el área del paralelogramo de la ecuación (2) y sumamos todas estas áreas para calcular una aproximación del área de la superficie S:

$$\sum_n |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,\Delta u\,\Delta v. \tag{3}$$

Cuando Δu y Δv tienden a cero de manera independiente, el número de elementos de área n tiende a ∞ y la continuidad de $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$ garantiza que la suma de la ecuación (3) se aproxime a la integral doble $\int_c^d \int_a^b |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,du\,dv$. Esta integral doble sobre la región R define el área de la superficie S.

DEFINICIÓN El **área** de la superficie suave

$$\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}, \qquad a \le u \le b, \quad c \le v \le d$$

es

$$A = \iint_R |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,dA = \int_c^d \int_a^b |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,du\,dv. \tag{4}$$

Abreviamos la integral de la ecuación (4) si escribimos $d\sigma$ en lugar de $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_u|\,du\,dv$. La diferencial de área de superficie $d\sigma$ es análoga a la diferencial de la longitud de arco ds de la sección 13.3.

Diferencial del área de una superficie para una superficie parametrizada

$$d\sigma = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,du\,dv \qquad \iint_S d\sigma \tag{5}$$

Diferencial del área de superficie — Fórmula diferencial del área de superficie

EJEMPLO 4 Determine el área de la superficie del cono del ejemplo 1 (figura 16.37).

Solución En el ejemplo 1, obtuvimos la parametrización

$$\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}, \qquad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Para aplicar la ecuación (4), primero determinamos $\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta$:

$$\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \text{sen}\,\theta & 1 \\ -r\,\text{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(r\cos\theta)\mathbf{i} - (r\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{j} + \underbrace{(r\cos^2\theta + r\,\text{sen}^2\theta)}_{r}\mathbf{k}.$$

Así, $|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\,\text{sen}^2\theta + r^2} = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r$. El área del cono es

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^1 |\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta|\,dr\,d\theta \qquad \text{Ecuación (4) con } u = r,\ v = \theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{2}\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{2}}{2}d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(2\pi) = \pi\sqrt{2}\ \text{unidades cuadradas.}$$ ■

EJEMPLO 5 Determine el área de la superficie de una esfera de radio a.

Solución Utilizamos la parametrización del ejemplo 2:

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = (a\,\text{sen}\,\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (a\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{j} + (a\cos\phi)\mathbf{k},$$
$$0 \le \phi \le \pi, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Para $\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta$, obtenemos

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a\cos\phi\cos\theta & a\cos\phi\,\text{sen}\,\theta & -a\,\text{sen}\,\phi \\ -a\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta & a\,\text{sen}\,\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (a^2\,\text{sen}^2\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (a^2\,\text{sen}^2\phi\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{j} + (a^2\,\text{sen}\,\phi\cos\phi)\mathbf{k}.$$

Por lo tanto,

$$|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{a^4\,\text{sen}^4\phi\cos^2\theta + a^4\,\text{sen}^4\phi\,\text{sen}^2\theta + a^4\,\text{sen}^2\phi\cos^2\phi}$$

$$= \sqrt{a^4\,\text{sen}^4\phi + a^4\,\text{sen}^2\phi\cos^2\phi} = \sqrt{a^4\,\text{sen}^2\phi(\text{sen}^2\phi + \cos^2\phi)}$$

$$= a^2\sqrt{\text{sen}^2\phi} = a^2\,\text{sen}\,\phi,$$

puesto que sen $\phi \geq 0$ cuando $0 \leq \phi \leq \pi$. Por consiguiente, el área de la esfera es

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} a^2 \operatorname{sen} \phi \, d\phi \, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \Big[-a^2 \cos \phi \Big]_0^{\pi} d\theta = \int_0^{2\pi} 2a^2 \, d\theta = 4\pi a^2 \quad \text{unidades cuadradas.}$$

Esto concuerda con la fórmula conocida para el área de la superficie de una esfera. ■

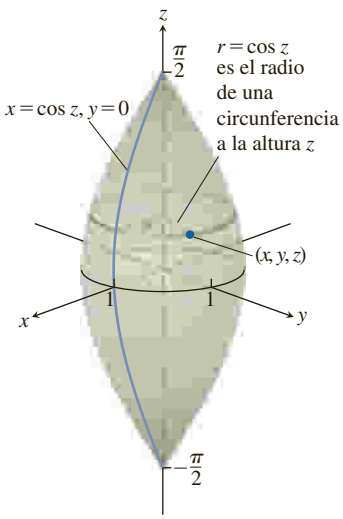


FIGURA 16.43 La superficie de un "balón de fútbol americano" del ejemplo 6 obtenida por la rotación de la curva $x = \cos z$ alrededor del eje z.

EJEMPLO 6 Sea S la superficie de un "balón de fútbol americano" formada por la rotación de la curva $x = \cos z$, $y = 0$, $-\pi/2 \leq z \leq \pi/2$, alrededor del eje z (figura 16.43). Determine una parametrización para S y calcule el área de su superficie.

Solución El ejemplo 2 sugiere la obtención de una parametrización de S con base en su rotación alrededor del eje z. Si hacemos girar un punto $(x, 0, z)$ de la curva $x = \cos z$, $y = 0$ alrededor del eje z, obtenemos una circunferencia a la altura z por encima del plano xy que tiene su centro en el eje z y un radio $r = \cos z$ (figura 16.43). El punto barre la circunferencia a través de un ángulo de rotación θ, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Sea (x, y, z) un punto arbitrario sobre la circunferencia y definimos los parámetros $u = z$ y $v = \theta$. Así, tenemos que $x = r \cos \theta = \cos u \cos v$, $y = r \operatorname{sen} \theta = \cos u \operatorname{sen} v$ y $z = u$, lo que nos da una parametrización de S

$$\mathbf{r}(u, v) = \cos u \cos v \mathbf{i} + \cos u \operatorname{sen} v \mathbf{j} + u\mathbf{k}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

A continuación usamos la ecuación (5) para obtener el área de la superficie S. La diferenciación de la parametrización nos da

$$\mathbf{r}_u = -\operatorname{sen} u \cos v \, \mathbf{i} - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \, \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{r}_v = -\cos u \operatorname{sen} v \, \mathbf{i} + \cos u \cos v \, \mathbf{j}.$$

Al calcular el producto cruz, obtenemos

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\operatorname{sen} u \cos v & -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v & 1 \\ -\cos u \operatorname{sen} v & \cos u \cos v & 0 \end{vmatrix}$$
$$= -\cos u \cos v \, \mathbf{i} - \cos u \operatorname{sen} v \, \mathbf{j} - (\operatorname{sen} u \cos u \cos^2 v + \cos u \operatorname{sen} u \operatorname{sen}^2 v)\mathbf{k}.$$

Al considerar la magnitud del producto cruz, tenemos

$$|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = \sqrt{\cos^2 u \, (\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) + \operatorname{sen}^2 u \cos^2 u}$$
$$= \sqrt{\cos^2 u \, (1 + \operatorname{sen}^2 u)}$$
$$= \cos u \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 u}. \qquad \cos u \geq 0 \text{ para } -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$$

De acuerdo con la ecuación (4), el área de la superficie está dada por la integral

$$A = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos u \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 u} \, du \, dv.$$

Para evaluar la integral, sustituimos $w = \operatorname{sen} u$ y $dw = \cos u\, du$, $-1 \le w \le 1$. Como la superficie S es simétrica con respecto al plano xy, sólo necesitamos integrar con respecto a w de 0 a 1, y multiplicar el resultado por 2. En resumen, tenemos

$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+w^2}\, dw\, dv \\ &= 2\int_0^{2\pi}\left[\frac{w}{2}\sqrt{1+w^2} + \frac{1}{2}\ln\left(w+\sqrt{1+w^2}\right)\right]_0^1 dv \quad \text{Fórmula 35 de la tabla de integrales} \\ &= \int_0^{2\pi} 2\left[\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right] dv \\ &= 2\pi\left[\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

■

Superficies implícitas

A menudo las superficies se presentan como conjuntos de niveles de una función, descritas por una ecuación como

$$F(x, y, z) = c,$$

para alguna constante c. Esta superficie de nivel no tiene una parametrización explícita y se conoce como una *superficie definida implícitamente.* Las superficies implícitas se presentan, por ejemplo, como superficies equipotenciales en los campos eléctricos o gravitacionales. La figura 16.44 muestra una porción de una superficie de este tipo. Sería difícil encontrar fórmulas explícitas para las funciones f, g y h que describen la superficie en la forma $\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}$. Ahora mostraremos cómo calcular la diferencial de área $d\sigma$ para superficies implícitas.

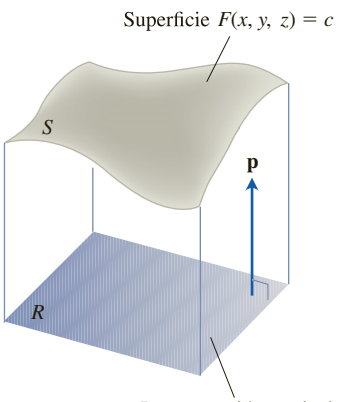


FIGURA 16.44 Como pronto veremos, el área de una superficie S en el espacio se calcula evaluando una integral doble relacionada sobre la proyección vertical o "sombra" de S en un plano coordenado. El vector unitario $\mathbf{p}$ es normal al plano.

La figura 16.44 muestra parte de una superficie implícita S que se encuentra arriba de su "sombra" R en el plano debajo de ella. La superficie está definida por la ecuación $F(x, y, z) = c$, y $\mathbf{p}$ es un vector unitario normal a la región plana R. Suponemos que la superficie es **suave** (F es diferenciable y ∇F es no nula y continua en S) y que $\nabla F \cdot \mathbf{p} \neq 0$, de manera que la superficie nunca se pliega sobre sí misma.

Suponga que el vector normal $\mathbf{p}$ es el vector unitario $\mathbf{k}$, por lo que la región R de la figura 16.44 está en el plano xy. Por deducción, tenemos que $\nabla F \cdot \mathbf{p} = \nabla F \cdot \mathbf{k} = F_z \neq 0$ en S. El teorema de la función implícita (vea la sección 14.4) supone que S es entonces la gráfica de una función diferenciable $z = h(x, y)$, aun cuando la función $h(x, y)$ no se conozca de manera explícita. Definimos los parámetros u y v como $u = x$ y $v = y$. De esta forma, $z = h(u, v)$, y

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k} \tag{6}$$

nos da una parametrización de la superficie S. Empleamos la ecuación (4) para encontrar el área de S.

Al calcular las derivadas parciales de $\mathbf{r}$, tenemos

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{i} + \frac{\partial h}{\partial u}\mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r}_v = \mathbf{j} + \frac{\partial h}{\partial v}\mathbf{k}.$$

Si se aplica la regla de la cadena para la diferenciación implícita [vea la ecuación (2) de la sección 14.4] para $F(x, y, z) = c$, donde $x = u$, $y = v$ y $z = h(u, v)$, obtenemos las derivadas parciales

$$\frac{\partial h}{\partial u} = -\frac{F_x}{F_z} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial h}{\partial v} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

La sustitución de estas derivadas en las derivadas de $\mathbf{r}$ nos da

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{i} - \frac{F_x}{F_z}\mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r}_v = \mathbf{j} - \frac{F_y}{F_z}\mathbf{k}.$$

A partir de un cálculo de rutina de producto cruz, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \frac{F_x}{F_z}\mathbf{i} + \frac{F_y}{F_z}\mathbf{j} + \mathbf{k} && F_z \neq 0\\ &= \frac{1}{F_z}(F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k})\\ &= \frac{\nabla F}{F_z} = \frac{\nabla F}{\nabla F \cdot \mathbf{k}}\\ &= \frac{\nabla F}{\nabla F \cdot \mathbf{p}}. && \mathbf{p} = \mathbf{k}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la diferencial de área de la superficie está dada por

$$d\sigma = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, du\, dv = \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \mathbf{p}|}dx\, dy. \qquad u = x \text{ y } v = y$$

Obtenemos cálculos similares si, en vez de ello, el vector $\mathbf{p} = \mathbf{j}$ es normal al plano xz cuando $F_y \neq 0$ sobre S, o si el vector $\mathbf{p} = \mathbf{i}$ es normal al plano yz cuando $F_x \neq 0$ en S. La combinación de estos resultados con la ecuación (4) nos da la fórmula general.

Fórmula para el área de una superficie considerando una superficie implícita

El área de la superficie $F(x, y, z) = c$ sobre una región plana, cerrada y acotada R es

$$\text{Área de la superficie} = \iint_R \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \mathbf{p}|}dA, \tag{7}$$

donde $\mathbf{p} = \mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ o $\mathbf{k}$ es normal a R y $\nabla F \cdot \mathbf{p} \neq 0$.

Así, el área es la integral doble sobre R de la magnitud de ∇F, dividida entre la magnitud de la componente escalar de ∇F normal a R.

Considerando la hipótesis de que $\nabla F \cdot \mathbf{p} \neq 0$ en R y de que ∇F es continua, obtuvimos la ecuación (7). Sin embargo, mientras exista la integral, definimos su valor como el área de la porción de la superficie $F(x, y, z) = c$ que está sobre R. (Recuerde que la proyección se supone como uno a uno).

EJEMPLO 7 Determine el área de la superficie de la parte inferior del paraboloide $x^2 + y^2 - z = 0$ cortada por el plano $z = 4$.

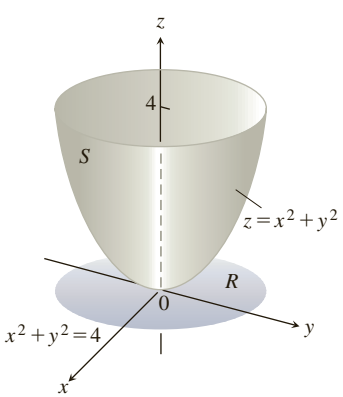


FIGURA 16.45 El área de esta superficie parabólica se calcula en el ejemplo 7.

Solución Trazamos la superficie S y la región R debajo del paraboloide en el plano xy (figura 16.45). La superficie S es parte de la superficie de nivel $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$ y R es el disco $x^2 + y^2 \leq 4$ en el plano xy. Para encontrar un vector unitario normal al plano de R, podemos tomar $\mathbf{p} = \mathbf{k}$.

En cualquier punto (x, y, z) sobre la superficie, tenemos

$$\begin{aligned}F(x, y, z) &= x^2 + y^2 - z\\ \nabla F &= 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - \mathbf{k}\\ |\nabla F| &= \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (-1)^2}\\ &= \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\\ |\nabla F \cdot \mathbf{p}| &= |\nabla F \cdot \mathbf{k}| = |-1| = 1.\end{aligned}$$

En la región R, $dA = dx\,dy$. Por lo tanto,

$$\text{Área de la superficie} = \iint_R \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \mathbf{p}|}\,dA \qquad \text{Ecuación (7)}$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 4} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{4r^2 + 1}\,r\,dr\,d\theta \qquad \text{Coordenadas polares}$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{12}(4r^2 + 1)^{3/2}\right]_0^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{1}{12}(17^{3/2} - 1)\,d\theta = \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 1\right). \quad \blacksquare$$

El ejemplo 7 muestra cómo se encuentra el área de la superficie para una función $z = f(x, y)$ sobre una región R en el plano xy. En realidad, la diferencial de área de la superficie se puede calcular de dos maneras, las cuales se describen en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8 Deduzca la diferencial de área de superficie $d\sigma$ de la superficie $z = f(x, y)$ sobre una región R en el plano xy ***a)*** paramétricamente, usando la ecuación (5), y ***b)*** de forma implícita, como en la ecuación (7).

Solución

a) Parametrizamos la superficie tomando $x = u$, $y = v$ y $z = f(x, y)$ sobre R. Esto nos da la parametrización

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + f(u, v)\mathbf{k}.$$

Al calcular las derivadas parciales, tenemos $\mathbf{r}_u = \mathrm{i} + f_u\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_v = \mathbf{j} + f_v\mathbf{k}$ y

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = -f_u\mathbf{i} - f_v\mathbf{j} + \mathbf{k}. \qquad \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{vmatrix}$$

De esta forma, $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,du\,dv = \sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}\,du\,dv$. Al sustituir u y v, tenemos la diferencial de área de superficie

$$d\sigma = \sqrt{f_x{}^2 + f_y{}^2 + 1}\,dx\,dy.$$

b) Definimos la función implícita $F(x, y, z) = f(x, y) - z$. Como (x, y) pertenece a la región R, el vector normal unitario al plano de R es $\mathbf{p} = \mathbf{k}$. Entonces, $\nabla F = f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j} - \mathbf{k}$, de manera que $|\nabla F \cdot \mathbf{p}| = |-1| = 1$. $|\nabla F| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$ y $|\nabla F|/|\nabla F \cdot \mathbf{p}| = |\nabla F|$. La diferencial de área de superficie está dada otra vez por

$$d\sigma = \sqrt{f_x{}^2 + f_y{}^2 + 1}\,dx\,dy. \quad \blacksquare$$

La diferencial de área de superficie deducida en el ejemplo (8) nos da la siguiente fórmula para calcular el área de la superficie de la gráfica de una función definida explícitamente como $z = f(x, y)$.

Fórmula para el área de la superficie de una gráfica $z = f(x, y)$

Para una gráfica $z = f(x, y)$ sobre una región R en el plano xy, la fórmula del área de la superficie es

$$A = \iint_R \sqrt{f_x{}^2 + f_y{}^2 + 1}\,dx\,dy. \qquad (8)$$

Ejercicios 16.5

Determinación de parametrizaciones

En los ejercicios 1 a 16, determine una parametrización para la superficie. (Hay muchas formas correctas de lograrlo, así que sus respuestas tal vez no coincidan con las que se indican al final del libro).

1. El paraboloide $z = x^2 + y^2$, $z \le 4$
2. El paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$, $z \ge 0$
3. **Cono truncado** La porción en el primer octante del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}/2$ entre los planos $z = 0$ y $z = 3$
4. **Cono truncado** La porción del cono $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ entre los planos $z = 2$ y $z = 4$
5. **Región esférica** La región de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ cortada por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
6. **Región esférica** La región de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ en el primer octante, entre el plano xy y el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
7. **Banda esférica** La porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ entre los planos y $z = \sqrt{3}/2$ y $z = -\sqrt{3}/2$
8. **Región esférica** La porción superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ cortada por el plano $z = -2$
9. **Cilindro parabólico entre planos** La superficie del cilindro parabólico $z = 4 - y^2$ cortada por los planos $x = 0$, $x = 2$ y $z = 0$
10. **Cilindro parabólico entre planos** La superficie del cilindro parabólico $y = x^2$ cortada por los planos $z = 0$, $z = 3$ y $y = 2$
11. **Banda cilíndrica circular** La porción del cilindro $y^2 + z^2 = 9$ entre los planos $x = 0$ y $x = 3$
12. **Banda cilíndrica circular** La porción del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ por encima del plano xy, entre los planos $y = -2$ y $y = 2$
13. **Plano inclinado dentro de un cilindro** La porción del plano $x + y + z = 1$
    a) Dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 9$
    b) Dentro del cilindro $y^2 + z^2 = 9$
14. **Plano inclinado dentro de un cilindro** La porción del plano $x - y + 2z = 2$
    a) Dentro del cilindro $x^2 + z^2 = 3$
    b) Dentro del cilindro $y^2 + z^2 = 2$
15. **Banda cilíndrica circular** La porción del cilindro $(x - 2)^2 + z^2 = 4$ entre los planos $y = 0$ y $y = 3$
16. **Banda cilíndrica circular** La porción del cilindro $y^2 + (z - 5)^2 = 25$ entre los planos $x = 0$ y $x = 10$

Áreas de superficies parametrizadas

En los ejercicios 17 a 26, utilice una parametrización para expresar el área de la superficie como una integral doble. Después, evalúe la integral. (Hay muchas formas correctas de establecer las integrales, así que éstas tal vez no sean iguales a las que aparecen al final del libro. Sin embargo, deben tener el mismo valor).

17. **Plano inclinado dentro de un cilindro** La porción del plano $y + 2z = 2$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$
18. **Plano dentro de un cilindro** La porción del plano $z = -x$ dentro del cilindro $x^2 + z^2 = 4$
19. **Cono truncado** La porción del cono $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ entre los planos $z = 2$ y $z = 6$
20. **Cono truncado** La porción del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}/3$ entre los planos $z = 1$ y $z = 4/3$
21. **Banda cilíndrica circular** La porción del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ entre los planos $z = 1$ y $z = 4$
22. **Banda cilíndrica circular** La porción del cilindro $x^2 + z^2 = 10$ entre los planos $y = -1$ y $y = 1$
23. **Región parabólica** La porción del paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$ cortada por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
24. **Banda parabólica** La porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ entre los planos $z = 1$ y $z = 4$
25. **Esfera rebanada** La porción inferior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ cortada por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
26. **Banda esférica** La porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ entre los planos $z = -1$ y $z = \sqrt{3}$

Planos tangentes a superficies parametrizadas

El plano tangente en el punto $P_0(f(u_0, v_0), g(u_0, v_0), h(u_0, v_0))$ a una superficie parametrizada $\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}$ es el plano que pasa por P_0 normal al vector $\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)$, el producto cruz de los vectores tangentes $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ y $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ en P_0. En los ejercicios 27 a 30, encuentre una ecuación para el plano tangente a la superficie en P_0. Después, encuentre una ecuación cartesiana para la superficie y dibuje juntos la superficie y el plano tangente.

27. **Cono** $\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r \operatorname{sen}\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}$, $r \ge 0$, $0 \le \theta \le 2\pi$, en el punto $P_0(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$ correspondiente a $(r, \theta) = (2, \pi/4)$
28. **Hemisferio** La superficie hemisférica $\mathbf{r}(\phi, \theta) = (4 \operatorname{sen}\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (4 \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta)\mathbf{j} + (4\cos\phi)\mathbf{k}$, $0 \le \phi \le \pi/2$, $0 \le \theta \le 2\pi$, en el punto $P_0(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{3})$(correspondiente a $(\phi, \theta) = (\pi/6, \pi/4)$
29. **Cilindro circular** El cilindro circular $\mathbf{r}(\theta, z) = (3 \operatorname{sen} 2\theta)\mathbf{i} + (6 \operatorname{sen}^2\theta)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $0 \le \theta \le \pi$, en el punto $P_0(3\sqrt{3}/2, 9/2, 0)$ correspondiente a $(\theta, z) = (\pi/3, 0)$ (vea el ejemplo 3)
30. **Cilindro parabólico** La superficie del cilindro parabólico $\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$, $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, en el punto $P_0(1, 2, -1)$ correspondiente a $(x, y) = (1, 2)$.

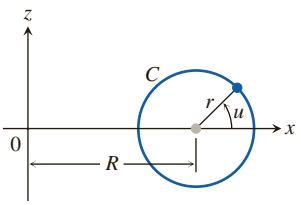
Más ejemplos de parametrizaciones de superficies

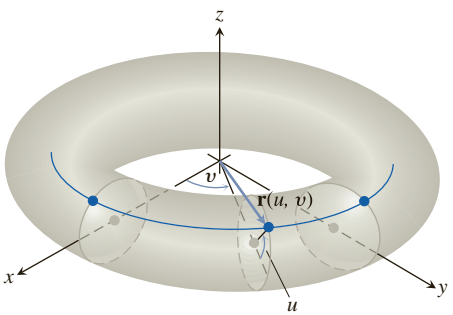
31. *a*) Un *toro de revolución* (en forma de rosquilla) se obtiene al hacer girar una circunferencia C en el plano xz alrededor del eje z en el espacio. (Vea la siguiente figura). Si C tiene un radio $r > 0$ y su centro es $(R, 0, 0)$, demuestre que una parametrización del toro es

$$\mathbf{r}(u, v) = ((R + r\cos u)\cos v)\mathbf{i} + ((R + r\cos u)\operatorname{sen} v)\mathbf{j} + (r \operatorname{sen} u)\mathbf{k},$$

donde $0 \le u \le 2\pi$ y $0 \le v \le 2\pi$ son los ángulos en la figura.

b) Demuestre que el área de la superficie del toro es $A = 4\pi^2 Rr$.



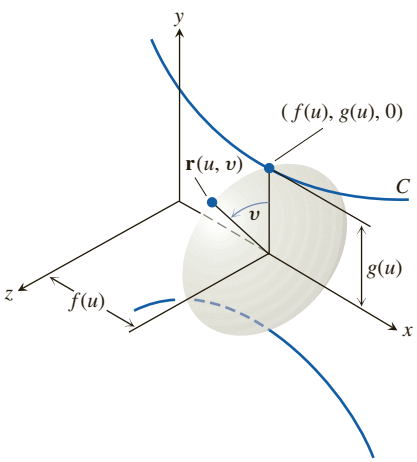


32. Parametrización de una superficie de revolución Suponga que la curva parametrizada C: $(f(u), g(u))$ gira alrededor del eje x, donde $g(u) > 0$ para $a \le u \le b$.

a) Demuestre que

$$\mathbf{r}(u, v) = f(u)\mathbf{i} + (g(u)\cos v)\mathbf{j} + (g(u)\operatorname{sen} v)\mathbf{k}$$

es una parametrización de la superficie de revolución resultante, donde $0 \le v \le 2\pi$ es el ángulo del plano xy al punto $\mathbf{r}(u, v)$ sobre la superficie. (Vea la figura). Observe que $f(u)$ mide la distancia *a lo largo* del eje de revolución y $g(u)$ mide la distancia *desde* el eje de revolución.



b) Encuentre una parametrización para la superficie obtenida al hacer girar la curva $x = y^2$, $y \ge 0$, alrededor del eje x.

33. ***a)*** **Parametrización de un elipsoide** La parametrización $x = a\cos\theta$, $y = b\operatorname{sen}\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$ da la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$. Con base en los ángulos θ y ϕ en coordenadas esféricas, demuestre que

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = (a\cos\theta\cos\phi)\mathbf{i} + (b\operatorname{sen}\theta\cos\phi)\mathbf{j} + (c\operatorname{sen}\phi)\mathbf{k}$$

es una parametrización del elipsoide $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) = 1$.

b) Escriba una integral para el área de la superficie del elipsoide, pero no evalúe la integral.

34. Hiperboloide de una hoja

a) Encuentre una parametrización para el hiperboloide de una hoja $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ en términos del ángulo θ asociado con la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ y el parámetro hiperbólico u asociado con la función hiperbólica $r^2 - z^2 = 1$. (*Sugerencia:* Considere que $\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1$).

b) Generalice el resultado del inciso *a)* al hiperboloide $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) - (z^2/c^2) = 1$.

35. (*Continuación del ejercicio 34*). Encuentre una ecuación cartesiana para el plano tangente al hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 25$ en el punto $(x_0, y_0, 0)$, donde $x_0^2 + y_0^2 = 25$.

36. Hiperboloide de dos hojas Encuentre una parametrización del hiperboloide de dos hojas $(z^2/c^2) - (x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$.

Área de una superficie para formas explícitas e implícitas

37. Calcule el área de la superficie de la porción del paraboloide $x^2 + y^2 - z = 0$ cortada por el plano $z = 2$.

38. Calcule el área de la banda del paraboloide $x^2 + y^2 - z = 0$ cortada por los planos $z = 2$ y $z = 6$.

39. Calcule el área de la región del plano $x + 2y + 2z = 5$ cortada por el cilindro cuyas paredes son $x = y^2$ y $x = 2 - y^2$.

40. Obtenga el área de la porción de la superficie $x^2 - 2z = 0$ que está sobre el triángulo acotado por las rectas $x = \sqrt{3}$, $y = 0$ y $y = x$ en el plano xy.

41. Calcule el área de la superficie $x^2 - 2y - 2z = 0$ que está sobre el triángulo acotado por las rectas $x = 2$, $y = 0$ y $y = 3x$ en el plano xy.

42. Calcule la superficie de la región cortada de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ por el cono $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$.

43. Calcule el área de la elipse cortada del plano $z = cx$ (donde c es una constante) por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

44. Encuentre el área de la porción superior del cilindro $x^2 + z^2 = 1$ que está entre los planos $x = \pm 1/2$ y $y = \pm 1/2$.

45. Calcule el área de la porción del paraboloide $x = 4 - y^2 - z^2$ que está arriba del anillo $1 \le y^2 + z^2 \le 4$ en el plano yz.

46. Calcule el área de la superficie cortada del paraboloide $x^2 + y + z^2 = 2$ por el plano $y = 0$.

47. Calcule el área de la superficie $x^2 - 2\ln x + \sqrt{15}y - z = 0$ arriba del cuadrado R: $1 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$, en el plano xy.

48. Calcule el área de la superficie $2x^{3/2} + 2y^{3/2} - 3z = 0$ arriba del cuadrado R: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, en el plano xy.

Calcule el área de las superficies en los ejercicios 49 a 54.

49. La superficie cortada de la parte inferior del paraboloide $z = x^2 + y^2$ por el plano $z = 3$.

50. La superficie cortada de la "nariz" del paraboloide $x = 1 - y^2 - z^2$ por el plano yz.

51. La porción del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ que está en la región entre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ en el plano xy. (*Sugerencia:* Utilice fórmulas geométricas para calcular el área de la región).

52. El triángulo cortado del plano $2x + 6y + 3z = 6$ por los planos frontera del primer octante. Calcule el área de tres maneras, aplicando formas explícitas diferentes.

53. La superficie en el primer octante cortada del cilindro $y = (2/3)z^{3/2}$ por los planos $x = 1$ y $y = 16/3$.

54. La porción del plano $y + z = 4$ que está arriba de la región cortada del primer cuadrante del plano xz por la parábola $x = 4 - z^2$.

55. Use la parametrización

$$\mathbf{r}(x, z) = x\mathbf{i} + f(x, z)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

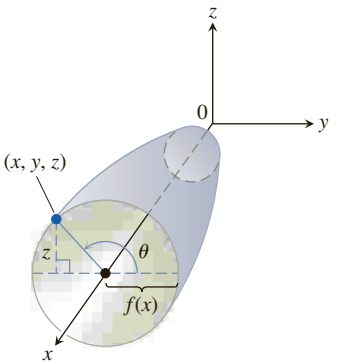
y la ecuación (5) para deducir la fórmula de $d\sigma$ asociada con la forma explícita $y = f(x, z)$.

56. Sea S la superficie obtenida por la rotación de la curva suave $y = f(x)$, $a \le x \le b$, alrededor del eje x, donde $f(x) \ge 0$.

a) Demuestre que la función vectorial

$$\mathbf{r}(x, \theta) = x\mathbf{i} + f(x)\cos\theta\mathbf{j} + f(x)\,\text{sen}\,\theta\mathbf{k}$$

es una parametrización de S, donde θ es el ángulo de rotación alrededor del eje x (vea la siguiente figura).



b) Utilice la ecuación (4) para demostrar que el área de la superficie de esta superficie de revolución está dada por

$$A = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

16.6 Integrales de superficie

Para calcular la masa de una superficie, la cantidad del flujo de líquido que pasa a través de una membrana curva o la carga eléctrica total sobre una superficie, necesitamos integrar una función sobre una superficie curva en el espacio. El concepto de *integral de superficie* es una ampliación del concepto de integral de línea que se emplea para integrar sobre una curva unidimensional. Al igual que las integrales de línea, las integrales de superficie surgen de dos formas. Una de ellas se presenta cuando integramos una función escalar sobre una superficie, como cuando se integra la función densidad de masa definida en una superficie para determinar su masa total. Esta forma corresponde a las integrales de línea de las funciones escalares definidas en la sección 16.1, que usamos para encontrar la masa de un alambre delgado. La segunda forma es para las integrales de superficie de los campos vectoriales, similares a las integrales de línea para campos vectoriales definidas en la sección 16.2. Un ejemplo de esta forma se presenta cuando queremos medir el flujo neto de un fluido que pasa a través de una superficie sumergida en el fluido (de la misma manera que antes definimos el flujo $\mathbf{F}$ a través de una curva). En esta sección investigamos estas ideas y algunas de sus aplicaciones.

Integrales de superficie

Supongamos que la función $G(x, y, z)$ nos indica la *densidad de masa* (masa por unidad de área) en cada punto de la superficie S. Calculamos, como una integral, la masa total en S de la siguiente manera.

Suponga, como en la sección 16.5, que la superficie S está definida paramétricamente en una región R en el plano uv,

$$\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}, \qquad (u, v) \in R.$$

En la figura 16.46, vemos cómo una subdivisión de R (por sencillez, considerada como un rectángulo) divide la superficie S en los correspondientes elementos curvos de la superficie, o porciones, de área

$$\Delta\sigma_{uv} \approx |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,du\,dv.$$

Como hicimos en el caso de las subdivisiones de la definición de las integrales dobles de la sección 15.2, numeramos los elementos de superficie en algún orden como $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2, \ldots,$ $\Delta\sigma_n$. Para formar una suma de Riemann sobre S, elegimos un punto (x_k, y_k, z_k) en la k-ésima porción, multiplicando el valor de la función G en ese punto por el área $\Delta\sigma_k$, y sumamos todos los productos:

$$\sum_{k=1}^{n} G(x_k, y_k, z_k)\,\Delta\sigma_k.$$

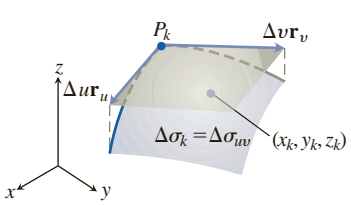


FIGURA 16.46 El área de la superficie $\Delta\sigma_k$ es aproximada por el área del paralelogramo tangente determinado por los vectores $\Delta u\,\mathbf{r}_u$ y $\Delta v\,\mathbf{r}_v$. El punto (x_k, y_k, z_k) está sobre la superficie, debajo del paralelogramo ilustrado aquí.

Dependiendo de la elección de (x_k, y_k, z_k) en la k-ésima porción, obtenemos diferentes valores para la suma de Riemann. De esta forma, tomamos el límite conforme el número de porciones de área se incrementa, sus áreas tienden a cero y tanto $\Delta u \to 0$ como $\Delta v \to 0$. Este límite, siempre que exista de manera independiente a las opciones elegidas, define la **integral de superficie de G sobre la superficie de S** como

$$\iint_S G(x, y, z)\, d\sigma = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} G(x_k, y_k, z_k)\, \Delta\sigma_k. \tag{1}$$

Observe la analogía con la definición de integral doble (sección 15.2) y con la integral de línea (sección 16.1). Si S es una superficie suave por tramos y G es continua en S, entonces, se demuestra que la integral de superficie definida por la ecuación (1) existe.

La fórmula para evaluar la integral de superficie depende de la manera como se describa S, ya sea en forma paramétrica, implícita o explícita, como se estudió en la sección 16.5.

Fórmulas para una integral de superficie de una función escalar

1. Para una superficie suave S definida **paramétricamente** como $\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}$, $(u, v) \in R$, y una función continua $G(x, y, z)$ definida en S, la integral de superficie de G sobre S está dada por la doble integral sobre R,

$$\iint_S G(x, y, z)\, d\sigma = \iint_R G(f(u, v), g(u, v), h(u, v))\, |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, du\, dv. \tag{2}$$

2. Para una superficie S definida **implícitamente** por $F(x, y, z) = c$, donde F es una función diferenciable continua, con S colocada arriba de su sombra cerrada y acotada en la región R en el plano coordenado debajo de ella, la integral de superficie de la función continua G en S está dada por la doble integral en R,

$$\iint_S G(x, y, z)\, d\sigma = \iint_R G(x, y, z)\, \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \mathbf{p}|}\, dA, \tag{3}$$

donde $\mathbf{p}$ es el vector unitario normal a R y $\nabla F \cdot \mathbf{p} \neq 0$.

3. Para una superficie S definida **explícitamente** como la gráfica $z = f(x, y)$, donde f es una función diferenciable continua sobre una región R del plano xy, la integral de superficie de la función continua G sobre S está dada por la integral doble sobre R,

$$\iint_S G(x, y, z)\, d\sigma = \iint_R G(x, y, f(x, y))\, \sqrt{f_x{}^2 + f_y{}^2 + 1}\, dx\, dy. \tag{4}$$

La integral de superficie de la ecuación (1) tiene diferentes significados dependiendo de las aplicaciones. Si G tiene un valor constante de 1, la integral nos da el área de S. Si G es la densidad de masa de una carcasa delgada de material modelada por S, la integral nos da la masa de la carcasa. Si G es la densidad de carga de una carcasa delgada, la integral nos da la carga total.

EJEMPLO 1 Integre $G(x, y, z) = x^2$ sobre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le 1$.

Solución De acuerdo con la ecuación (2) y los cálculos del ejemplo 4 de la sección 16.5, tenemos que $|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{2}r$ y

$$\iint_S x^2 \, d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(r^2 \cos^2\theta\right)\left(\sqrt{2}r\right) dr \, d\theta \qquad x = r\cos\theta$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \cos^2\theta \, dr \, d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}. \quad \blacksquare$$

Las integrales de superficie se comportan como las integrales dobles, la integral de la suma de dos funciones es la suma de sus integrales, y así sucesivamente. La propiedad de aditividad del dominio toma la forma

$$\iint_S G \, d\sigma = \iint_{S_1} G \, d\sigma + \iint_{S_2} G \, d\sigma + \cdots + \iint_{S_n} G \, d\sigma.$$

Cuando S está dividida por curvas suaves en un número finito de porciones suaves sin que sus interiores se traslapen (por ejemplo, si S es suave por tramos), entonces, la integral de S es la suma de las integrales de las porciones. Así, la integral de una función sobre la superficie de un cubo es la suma de las integrales sobre las caras del cubo. Integramos sobre el caparazón de una tortuga integrando una por una las placas que lo conforman y sumando los resultados.

EJEMPLO 2 Integre $G(x, y, z) = xyz$ sobre la superficie del cubo cortado del primer octante por los planos $x = 1$, $y = 1$ y $z = 1$ (figura 16.47).

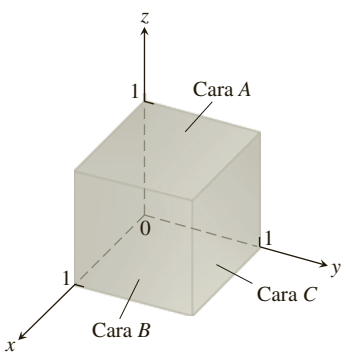


FIGURA 16.47 El cubo del ejemplo 2.

Solución Integramos xyz sobre cada una de las seis caras y sumamos los resultados. Como $xyz = 0$ en las caras sobre los planos coordenados, entonces, la integral sobre la superficie del cubo se reduce a

$$\iint_{\substack{\text{Superficie}\\ \text{del cubo}}} xyz \, d\sigma = \iint_{\text{Cara } A} xyz \, d\sigma + \iint_{\text{Cara } B} xyz \, d\sigma + \iint_{\text{Cara } C} xyz \, d\sigma.$$

La cara A es la superficie $f(x, y, z) = z = 1$ sobre la región cuadrada R_{xy}: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, en el plano xy. Para esta superficie y región,

$$\mathbf{p} = \mathbf{k}, \qquad \nabla f = \mathbf{k}, \qquad |\nabla f| = 1, \qquad |\nabla f \cdot \mathbf{p}| = |\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}| = 1$$

$$d\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|} dA = \frac{1}{1} dx \, dy = dx \, dy$$

$$xyz = xy(1) = xy$$

y

$$\iint_{\text{Cara } A} xyz \, d\sigma = \iint_{R_{xy}} xy \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^1 xy \, dx \, dy = \int_0^1 \frac{y}{2} dy = \frac{1}{4}.$$

La simetría nos indica que las integrales de xyz de las caras B y C también son iguales a $1/4$. Por lo tanto,

$$\underset{\text{Superficie cúbica}}{\iint} xyz\, d\sigma = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

■

EJEMPLO 3 Integre $G(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ sobre la superficie de la "pelota de fútbol" S formada por la rotación de la curva $x = \cos z$, $y = 0$, $-\pi/2 \le z \le \pi/2$, alrededor del eje z.

Solución La superficie se ilustra en la figura 16.43, y en el ejemplo 6 de la sección 16.5 obtuvimos la parametrización

$$x = \cos u \cos v, \quad y = \cos u \operatorname{sen} v, \quad z = u, \quad -\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad 0 \le v \le 2\pi,$$

donde v representa el ángulo de rotación del plano xz alrededor del eje z. Al sustituir esta parametrización en la expresión de G, obtenemos

$$\sqrt{1 - x^2 - y^2} = \sqrt{1 - (\cos^2 u)(\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v)} = \sqrt{1 - \cos^2 u} = |\operatorname{sen} u|.$$

La diferencial del área de la superficie para la parametrización es (ejemplo 6, sección 16.5).

$$d\sigma = \cos u \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 u}\, du\, dv.$$

Estos cálculos nos dan la integral de superficie

$$\begin{aligned}
\iint_S \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, d\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{sen} u| \cos u \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 u}\, du\, dv \\
&= 2\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} u \cos u \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 u}\, du\, dv \\
&= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \sqrt{w}\, dw\, dv \qquad \begin{array}{l} w = 1 + \operatorname{sen}^2 u, \\ dw = 2 \operatorname{sen} u \cos u\, du \\ \text{Cuando } u = 0,\ w = 1. \\ \text{Cuando } u = \pi/2,\ w = 2. \end{array} \\
&= 2\pi \cdot \frac{2}{3} w^{3/2} \Big]_1^2 = \frac{4\pi}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right).
\end{aligned}$$

■

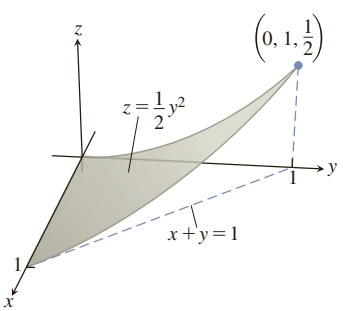


FIGURA 16.48 La superficie S en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Evalúe $\iint_S \sqrt{x(1 + 2z)}\, d\sigma$ en la porción del cilindro $z = y^2/2$ sobre la región triangular R: $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 1$, en el plano xy (figura 16.48).

Solución La función G sobre la superficie S está dada por

$$G(x, y, z) = \sqrt{x(1 + 2z)} = \sqrt{x}\sqrt{1 + y^2}.$$

Con $z = f(x, y) = y^2/2$, usamos la ecuación (4) para evaluar la integral de superficie:

$$d\sigma = \sqrt{f_x^{\,2} + f_y^{\,2} + 1}\, dx\, dy = \sqrt{0 + y^2 + 1}\, dx\, dy$$

y

$$\iint_S G(x, y, z)\, d\sigma = \iint_R \left(\sqrt{x}\sqrt{1 + y^2}\right)\sqrt{1 + y^2}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x}(1 + y^2)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{x}\left[(1 - x) + \frac{1}{3}(1 - x)^3\right] dx \qquad \text{Se integra y se evalúa.}$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{4}{3}x^{1/2} - 2x^{3/2} + x^{5/2} - \frac{1}{3}x^{7/2}\right) dx \qquad \text{Álgebra de rutina}$$

$$= \left[\frac{8}{9}x^{3/2} - \frac{4}{5}x^{5/2} + \frac{2}{7}x^{7/2} - \frac{2}{27}x^{9/2}\right]_0^1$$

$$= \frac{8}{9} - \frac{4}{5} + \frac{2}{7} - \frac{2}{27} = \frac{284}{945} \approx 0.30.$$

■

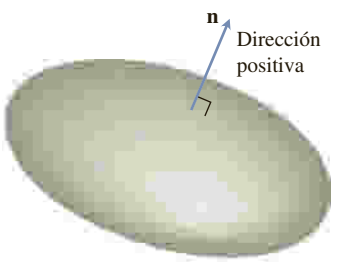


FIGURA 16.49 Las superficies suaves y cerradas en el espacio son orientables. El vector unitario normal exterior define la dirección positiva de cada punto.

Orientación de una superficie

La curva C en una integral de línea hereda una orientación natural de su parametrización $\mathbf{r}(t)$ ya que el parámetro pertenece a un intervalo $a \le t \le b$ dirigido por la recta real. El vector tangente unitario $\mathbf{T}$ a lo largo de la curva C apunta en la dirección hacia delante. Para una superficie S, la parametrización $\mathbf{r}(u, v)$ da un vector $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ que es normal a la superficie, pero si S tiene dos "lados", entonces, en cada punto el negativo $-(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)$ también es normal a la superficie curva, por lo que necesitamos elegir qué dirección utilizar. Por ejemplo, si observamos la esfera de la figura 16.38, nos daremos cuenta de que en cualquier punto sobre la esfera hay un vector normal apuntando al interior hacia el centro de la esfera y otro vector normal opuesto apuntando hacia fuera. Cuando especificamos cuál de estas normales vamos a usar consistentemente en toda la superficie, entonces, damos una *orientación* a la superficie. Una superficie suave S es **orientable** (o de **dos lados**) si es posible definir un campo de vectores unitarios normales $\mathbf{n}$ en S que varíe continuamente con la posición. Cualquier porción de una superficie orientable también es orientable. Las esferas y otras superficies cerradas suaves en el espacio (superficies suaves que encierran sólidos) son orientables. Por convención, sobre una superficie cerrada elegimos a $\mathbf{n}$ apuntando hacia fuera.

Una vez elegido $\mathbf{n}$, decimos que hemos **orientado** la superficie, y llamamos a la superficie junto con su campo normal una **superficie orientada**. El vector $\mathbf{n}$ en cualquier punto es la **dirección positiva** en ese punto (figura 16.49).

La banda de Möbius de la figura 16.50 no es orientable. Sin importar dónde se comience a construir un campo unitario normal continuo (representado en la figura como el eje de una tachuela), al mover al vector de manera continua alrededor de la superficie en la forma mostrada, éste regresará al punto de inicio con una dirección opuesta a la que tenía cuando comenzó a moverse. El vector en ese punto no puede apuntar a ambos lados, aunque debería hacerlo si el campo es continuo. Concluimos que no existe tal campo.

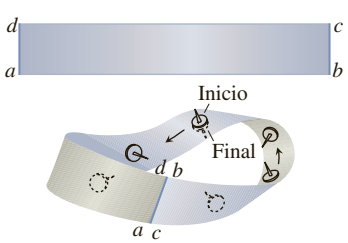


FIGURA 16.50 Para construir una banda de Möbius, tome una banda rectangular de papel, *abcd*, dé un giro sencillo al extremo de *bc*, y pegue la banda de forma que coincidan los extremos *a* con *c* y *b* con *d*. La banda de Möbius es una superficie de un solo lado, o no orientable.

Integrales de superficie de campos vectoriales

En la sección 16.2 definimos la integral de línea de un campo vectorial a lo largo de una trayectoria C como $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$, donde $\mathbf{T}$ es el vector tangente unitario a la trayectoria que apunta en la dirección orientada hacia delante. Por analogía, ahora tenemos la siguiente definición correspondiente para las integrales de superficie.

DEFINICIÓN Sea **F** un campo vectorial en el espacio tridimensional con componentes continuas definidas sobre una superficie suave S, con un campo elegido de vectores unitarios normales **n** que orientan a S. Entonces, la **integral de superficie de F sobre S** es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma. \tag{5}$$

La integral de superficie de **F** también se llama **flujo** del campo vectorial a través de la superficie orientada S (similar a la definición de flujo de un campo vectorial en el plano xy a través de una curva cerrada en el plano, como se definió en la sección 16.2). La expresión $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$ en la integral (5) también se escribe como $\mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$, que corresponde a la notación $\mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ usada por $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$ en las integrales de línea para campos vectoriales. Si **F** es el campo de velocidades del flujo de un fluido en tres dimensiones, el flujo de **F** a través de S es la razón neta con la que el fluido atraviesa S por unidad de tiempo en la dirección positiva **n** definida por la orientación de S. En la sección 16.7 analizaremos con mayor detalle los flujos de fluidos; ahora estudiaremos varios ejemplos de cálculo de integrales de superficie de campos vectoriales.

EJEMPLO 5 Determine el flujo de $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + x\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$ a través del cilindro parabólico $y = x^2$, $0 \le x \le 1$, $0 \le z \le 4$, en la dirección de **n** indicada en la figura 16.51.

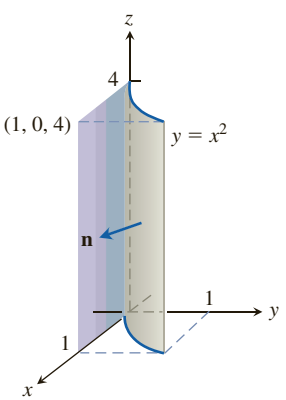


FIGURA 16.51 Cálculo del flujo a través de la superficie de un cilindro parabólico (ejemplo 5).

Solución Sobre la superficie tenemos $x = x$, $y = x^2$ y $z = z$, de manera que automáticamente tenemos la parametrización $\mathbf{r}(x, z) = x\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $0 \le x \le 1$, $0 \le z \le 4$. El producto cruz de los vectores tangentes es

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x\mathbf{i} - \mathbf{j}.$$

Los vectores unitarios normales que apuntan hacia fuera desde la superficie, como se indica en la figura 16.51, son

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_z}{|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_z|} = \frac{2x\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{4x^2 + 1}}.$$

Sobre la superficie, $y = x^2$, así que el campo vectorial es

$$\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + x\mathbf{j} - z^2\mathbf{k} = x^2z\mathbf{i} + x\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}}\left((x^2z)(2x) + (x)(-1) + (-z^2)(0)\right) \\ &= \frac{2x^3z - x}{\sqrt{4x^2 + 1}}. \end{aligned}$$

El flujo de $\mathbf{F}$ hacia fuera a través de la superficie es

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma &= \int_0^4\int_0^1 \frac{2x^3z - x}{\sqrt{4x^2+1}}\,|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_z|\,dx\,dz\\ &= \int_0^4\int_0^1 \frac{2x^3z - x}{\sqrt{4x^2+1}}\sqrt{4x^2+1}\,dx\,dz\\ &= \int_0^4\int_0^1 (2x^3z - x)\,dx\,dz = \int_0^4 \left[\frac{1}{2}x^4z - \frac{1}{2}x^2\right]_{x=0}^{x=1} dz\\ &= \int_0^4 \frac{1}{2}(z-1)\,dz = \frac{1}{4}(z-1)^2\Big]_0^4\\ &= \frac{1}{4}(9) - \frac{1}{4}(1) = 2.\end{aligned}$$

Hay una fórmula sencilla para el flujo de $\mathbf{F}$ a través de la superficie parametrizada $\mathbf{r}(u, v)$. Ya que

$$d\sigma = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,du\,dv,$$

con la orientación

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

se tiene que

Flujo a través de una superficie parametrizada

$$\text{Flujo} = \iint_R \mathbf{F}\cdot(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\,du\,dv$$

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_R \mathbf{F}\cdot\frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}\,|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,du\,dv = \iint_R \mathbf{F}\cdot(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\,du\,dv.$$

Esta integral para el flujo simplifica el cálculo en el ejemplo 5. Puesto que

$$\mathbf{F}\cdot(\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_z) = (x^2z)(2x) + (x)(-1) = 2x^3z - x,$$

directamente obtenemos

$$\text{Flujo} = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \int_0^4\int_0^1 (2x^3z - x)\,dx\,dz = 2$$

en el ejemplo 5.

Si S es parte de una superficie de nivel $g(x, y, z) = c$, entonces, $\mathbf{n}$ puede ser uno de los dos campos

$$\mathbf{n} = \pm\frac{\nabla g}{|\nabla g|}, \tag{6}$$

dependiendo de cuál dé la dirección preferida. El flujo correspondiente es

$$\begin{aligned}\text{Flujo} &= \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma\\ &= \iint_R \left(\mathbf{F}\cdot\frac{\pm\nabla g}{|\nabla g|}\right)\frac{|\nabla g|}{|\nabla g\cdot\mathbf{p}|}\,dA \qquad \text{Ecuaciones (6) y (3)}\\ &= \iint_R \mathbf{F}\cdot\frac{\pm\nabla g}{|\nabla g\cdot\mathbf{p}|}\,dA. \qquad (7)\end{aligned}$$

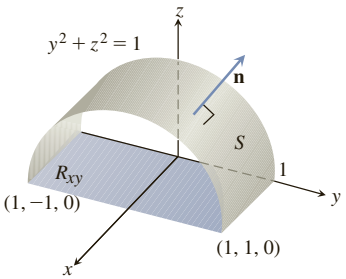


FIGURA 16.52 Cálculo del flujo de un campo vectorial hacia fuera a través de la superficie S. El área de la región de sombra R_{xy} es 2 (ejemplo 6).

EJEMPLO 6 Determine el flujo de $\mathbf{F} = yz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ hacia fuera, a través de la superficie S cortada del cilindro $y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, por los planos $x = 0$ y $x = 1$.

Solución El campo vectorial normal exterior en S (figura 16.52) se calcula a partir del gradiente de $g(x, y, z) = y^2 + z^2$ como

$$\mathbf{n} = +\frac{\nabla g}{|\nabla g|} = \frac{2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}}{\sqrt{4y^2 + 4z^2}} = \frac{2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}}{2\sqrt{1}} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Con $\mathbf{p} = \mathbf{k}$, tenemos

$$d\sigma = \frac{|\nabla g|}{|\nabla g \cdot \mathbf{k}|} dA = \frac{2}{|2z|} dA = \frac{1}{z} dA.$$

Eliminamos las barras de valor absoluto, ya que $z \geq 0$ en S.

El valor de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ sobre la superficie es

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} &= (yz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}) \cdot (y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \\ &= y^2 z + z^3 = z(y^2 + z^2) \\ &= z. \qquad\qquad y^2 + z^2 = 1 \text{ sobre } S \end{aligned}$$

La superficie proyecta la sombra sobre la región R_{xy}, que es el rectángulo en el plano xy que se muestra en la figura 16.52. Por lo tanto, el flujo de $\mathbf{F}$ hacia fuera a través de S es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_{R_{xy}} (z)\left(\frac{1}{z} dA\right) = \iint_{R_{xy}} dA = \text{área}(R_{xy}) = 2. \quad \blacksquare$$

Momentos y masas de carcasas delgadas

Las carcasas delgadas de material, como vasijas, tambores metálicos y domos, se modelan con superficies. Sus momentos y masas se calculan con las fórmulas de la tabla 16.3. Las deducciones son similares a las de la sección 6.6. Las fórmulas son como las integrales de línea de la tabla 16.1, sección 16.1.

TABLA 16.3 Fórmulas de masa y momento para carcasas muy delgadas

Masa: $M = \iint_S \delta\, d\sigma$ $\qquad \delta = \delta(x, y, z) =$ densidad en (x, y, z) como masa por unidad de área

Primeros momentos con respecto a los planos coordenados:

$$M_{yz} = \iint_S x\,\delta\, d\sigma, \qquad M_{xz} = \iint_S y\,\delta\, d\sigma, \qquad M_{xy} = \iint_S z\,\delta\, d\sigma$$

Coordenadas del centro de masa:

$$\bar{x} = M_{yz}/M, \qquad \bar{y} = M_{xz}/M, \qquad \bar{z} = M_{xy}/M$$

Momentos de inercia con respecto a los ejes coordenados:

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2)\,\delta\, d\sigma, \quad I_y = \iint_S (x^2 + z^2)\,\delta\, d\sigma, \quad I_z = \iint_S (x^2 + y^2)\,\delta\, d\sigma,$$

$$I_L = \iint_S r^2 \delta\, d\sigma \qquad r(x, y, z) =$$ distancia del punto (x, y, z) a la recta L.

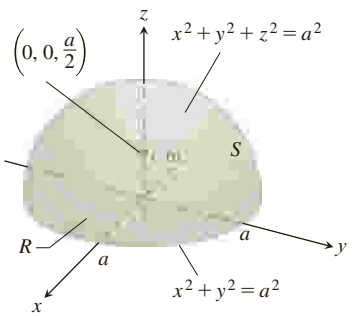


FIGURA 16.53 El centro de masa de una carcasa hemisférica delgada de densidad constante está en el eje de simetría, a la mitad entre la base y la parte superior (ejemplo 7).

EJEMPLO 7 Determine el centro de masa de una carcasa hemisférica delgada de radio a y densidad constante δ.

Solución Modelamos la carcasa con el hemisferio

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \qquad z \geq 0$$

(figura 16.53). La simetría de la superficie con respecto al eje z nos dice que $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Sólo falta determinar $\bar{z}$ con la fórmula $\bar{z} = M_{xy}/M$.

La masa de la carcasa es

$$M = \iint_S \delta \, d\sigma = \delta \iint_S d\sigma = (\delta)(\text{área de } S) = 2\pi a^2 \delta. \qquad \delta = \text{constante}$$

Para evaluar la integral de M_{xy}, consideramos $\mathbf{p} = \mathbf{k}$ y calculamos

$$|\nabla f| = |2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2a$$

$$|\nabla f \cdot \mathbf{p}| = |\nabla f \cdot \mathbf{k}| = |2z| = 2z$$

$$d\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|} dA = \frac{a}{z} dA.$$

Así,

$$M_{xy} = \iint_S z\delta \, d\sigma = \delta \iint_R z \frac{a}{z} dA = \delta a \iint_R dA = \delta a(\pi a^2) = \delta \pi a^3$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\pi a^3 \delta}{2\pi a^2 \delta} = \frac{a}{2}.$$

El centro de masa de la carcasa es el punto $(0, 0, a/2)$. ■

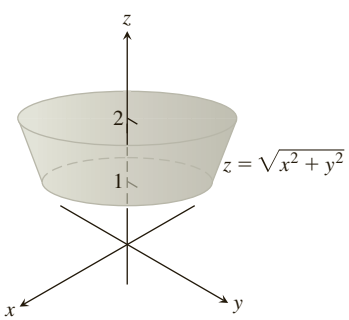


FIGURA 16.54 El cono truncado que se forma cuando el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ se corta con los planos $z = 1$ y $z = 2$ (ejemplo 8).

EJEMPLO 8 Calcule el centro de masa de una carcasa delgada de densidad $\delta = 1/z^2$ cortada del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ por los planos $z = 1$ y $z = 2$ (figura 16.54).

Solución La simetría de la superficie alrededor del eje z nos dice que $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Calculamos $\bar{z} = M_{xy}/M$. Trabajando como en el ejemplo 4 de la sección 16.5, tenemos

$$\mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta)\mathbf{i} + (r \operatorname{sen} \theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}, \qquad 1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

y

$$|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{2}r.$$

Por lo tanto,

$$M = \iint_S \delta \, d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \frac{1}{r^2} \sqrt{2} r \, dr \, d\theta$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left[\ln r\right]_1^2 d\theta = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \ln 2 \, d\theta$$

$$= 2\pi\sqrt{2} \ln 2,$$

$$M_{xy} = \iint_S \delta z \, d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \frac{1}{r^2} r\sqrt{2} r \, dr \, d\theta$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_1^2 dr \, d\theta$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\sqrt{2},$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{2\pi\sqrt{2}\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}.$$

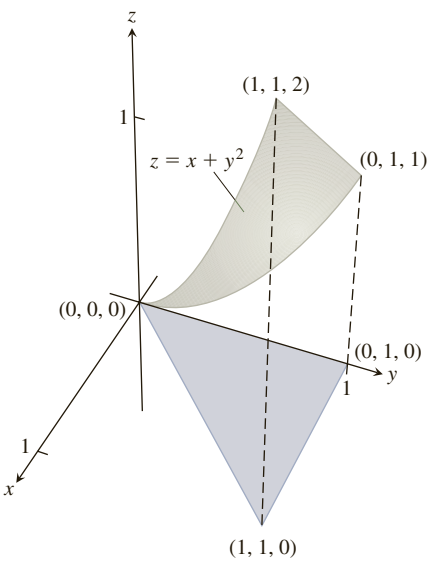
El centro de masa de la carcasa es el punto $(0, 0, 1/\ln 2)$. ■

Ejercicios 16.6

Integrales de superficie de funciones escalares

En los ejercicios 1 a 8, integre la función sobre la superficie correspondiente.

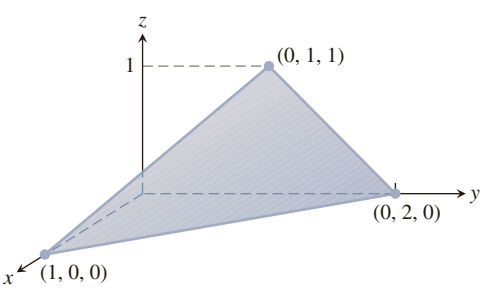
1. **Cilindro parabólico** $G(x, y, z) = x$, sobre el cilindro parabólico $y = x^2$, $0 \le x \le 2$, $0 \le z \le 3$
2. **Cilindro circular** $G(x, y, z) = z$, sobre la superficie cilíndrica $y^2 + z^2 = 4$, $z \ge 0$, $1 \le x \le 4$
3. **Esfera** $G(x, y, z) = x^2$, sobre la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
4. **Hemisferio** $G(x, y, z) = z^2$, sobre el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \ge 0$.
5. **Porción del plano** $F(x, y, z) = z$, sobre la porción del plano $x + y + z = 4$ que está sobre el cuadrado $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, en el plano xy
6. **Cono** $F(x, y, z) = z - x$, sobre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $0 \le z \le 1$
7. **Domo parabólico** $H(x, y, z) = x^2\sqrt{5 - 4z}$ sobre el domo parabólico, $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \ge 0$
8. **Carcasa esférica** $H(x, y, z) = yz$, sobre la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está sobre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
9. Integre $G(x, y, z) = x + y + z$ sobre la superficie del cubo cortado del primer octante por los planos $x = a$, $y = a$, $z = a$.
10. Integre $G(x, y, z) = y + z$ sobre la superficie de la cuña en el primer octante, acotada por los planos coordenados y los planos $x = 2$ y $y + z = 1$.
11. Integre $G(x, y, z) = xyz$ sobre la superficie del sólido rectangular cortado en el primer octante por los planos $x = a$, $y = b$ y $z = c$.
12. Integre $G(x, y, z) = xyz$ sobre la superficie del sólido rectangular acotado por los planos $x = \pm a$, $y = \pm b$ y $z = \pm c$.
13. Integre $G(x, y, z) = x + y + z$ sobre la porción del plano $2x + 2y + z = 2$ que está en el primer octante.
14. Integre $G(x, y, z) = x\sqrt{y^2 + 4}$ sobre la superficie cortada del cilindro parabólico $y^2 + 4z = 16$ por el plano $x = 0$, $x = 1$ y $z = 0$.
15. Integre $G(x, y, z) = z - x$ sobre la porción de la gráfica de $z = x + y^2$ arriba del triángulo en el plano xy con vértices en $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ y $(0, 1, 0)$. (Vea la siguiente figura).



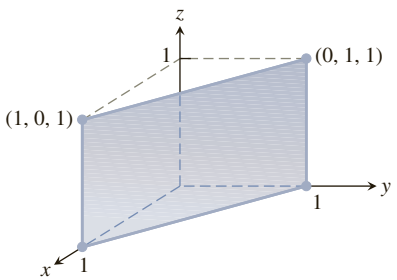
16. Integre $G(x, y, z) = x$ sobre la superficie dada por

$$z = x^2 + y \quad \text{para} \quad 0 \le x \le 1, \quad -1 \le y \le 1.$$

17. Integre $G(x, y, z) = xyz$ sobre la superficie triangular con vértices en $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 1, 1)$.



18. Integre $G(x, y, z) = x - y - z$ sobre la porción del plano $x + y = 1$ en el primer octante entre $z = 0$ y $z = 1$ (vea la siguiente figura).



Cálculo del flujo o integrales de superficie de campos vectoriales

En los ejercicios 19 a 28, utilice una parametrización para determinar el flujo $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ a través de la superficie en la dirección indicada.

19. Cilindro parabólico $\mathbf{F} = z^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} - 3z\mathbf{k}$ hacia fuera (normal alejándose del eje x) a través de la superficie del cilindro parabólico $z = 4 - y^2$ cortada por los planos $x = 0$, $x = 1$ y $z = 0$

20. Cilindro parabólico $\mathbf{F} = x^2\mathbf{j} - xz\mathbf{k}$ hacia fuera (normal alejándose del plano yz) a través de la superficie cortada del cilindro parabólico $y = x^2$, $-1 \le x \le 1$, por los planos $z = 0$ y $z = 2$

21. Esfera $\mathbf{F} = z\mathbf{k}$ a través de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ en el primer octante en la dirección que se aleja del origen

22. Esfera $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ a través de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ en la dirección que se aleja del origen

23. Plano $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$ hacia arriba, a través de la porción del plano $x + y + z = 2a$ que está sobre el cuadrado $0 \le x \le a$, $0 \le y \le a$, en el plano xy

24. Cilindro $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ hacia fuera a través de la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ cortada por los planos $z = 0$ y $z = a$

25. Cono $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} - z\mathbf{k}$ hacia fuera (normal alejándose del eje z) a través del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le 1$

26. Cono $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + xz\mathbf{j} - \mathbf{k}$ hacia fuera (normal alejándose del eje z) a través del cono $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le 2$

27. Cono truncado $\mathbf{F} = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ hacia fuera (normal alejándose del eje z) a través de la porción del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre los planos $z = 1$ y $z = 2$

28. Paraboloide $\mathbf{F} = 4x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ hacia fuera (normal alejándose del eje z) a través de la superficie cortada de la parte inferior del paraboloide $z = x^2 + y^2$ por el plano $z = 1$

En los ejercicios 29 y 30, calcule la integral de superficie del campo $\mathbf{F}$ sobre la porción de la superficie que se especifica en la dirección indicada.

29. $\mathbf{F}(x, y, z) = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

S: superficie rectangular $z = 0$, $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$, en dirección de $\mathbf{k}$

30. $\mathbf{F}(x, y, z) = yx^2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$

S: superficie rectangular $y = 0$, $-1 \le x \le 2$, $2 \le z \le 7$, en dirección de $-\mathbf{j}$

En los ejercicios 31 a 36, use la ecuación (7) para encontrar la integral de superficie del campo $\mathbf{F}$ sobre la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ en el primer octante en la dirección que se aleja del origen.

31. $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{k}$

32. $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

33. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + \mathbf{k}$

34. $\mathbf{F}(x, y, z) = zx\mathbf{i} + zy\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

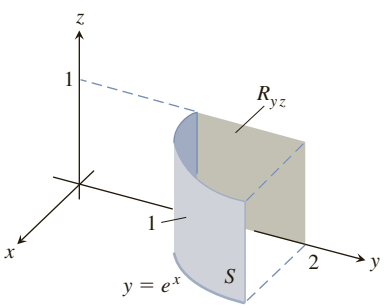
35. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

36. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

37. Calcule el flujo del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} - 3z\mathbf{k}$ hacia fuera a través de la superficie cortada del cilindro parabólico $z = 4 - y^2$ por los planos $x = 0$, $x = 1$ y $z = 0$.

38. Calcule el flujo del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = 4x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ hacia fuera (alejándose del eje z) a través de la superficie cortada de la parte inferior del paraboloide $z = x^2 + y^2$ por el plano $z = 1$.

39. Sea S la porción del cilindro $y = e^x$ en el primer octante que se proyecta de manera paralela al eje x sobre el rectángulo R_{yz}: $1 \le y \le 2$, $0 \le z \le 1$ en el plano yz (vea la figura). Sea $\mathbf{n}$ el vector unitario normal a S que apunta alejándose del plano yz. Encuentre el flujo del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = -2\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ a través de S en la dirección de $\mathbf{n}$.



40. Sea S la porción del cilindro $y = \ln x$ en el primer octante, cuya proyección paralela al eje y sobre el plano xz es el rectángulo R_{xz}: $1 \le x \le e$, $0 \le z \le 1$. Sea $\mathbf{n}$ el vector unitario normal a S que apunta alejándose del plano xz. Encuentre el flujo del campo $\mathbf{F} = 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ a través de S en la dirección de $\mathbf{n}$.

41. Calcule el flujo hacia fuera del campo $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$ a través de la superficie del cubo cortado del primer octante por los planos $x = a$, $y = a$, $z = a$.

42. Calcule el flujo hacia fuera del campo $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + \mathbf{k}$ a través de la superficie de la región superior cortada de la esfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \le 25$ por el plano $z = 3$.

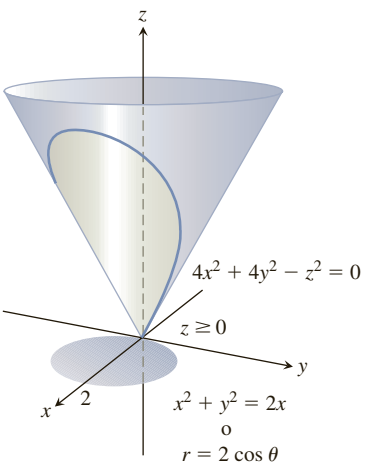
Momentos y masas

43. Centroide Determine el centroide de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está en el primer octante.

44. Centroide Determine el centroide de la superficie cortada del cilindro $y^2 + z^2 = 9$, $z \ge 0$, por los planos $x = 0$ y $x = 3$ (similar a la superficie del ejemplo 6).

45. Carcasa delgada de densidad constante Determine el centro de masa y el momento de inercia con respecto al eje z de una carcasa delgada de densidad constante δ cortada del cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ por los planos $z = 1$ y $z = 2$.

46. Superficie cónica con densidad constante Determine el momento de inercia con respecto al eje z de una carcasa delgada de densidad constante δ cortada del cono $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$, $z \ge 0$, por el cilindro circular $x^2 + y^2 = 2x$ (vea la siguiente figura).



47. Carcasas esféricas

a) Determine el momento de inercia con respecto al diámetro de una carcasa delgada esférica de radio a y densidad constante d. (Trabaje con una carcasa hemisférica y, luego, duplique el resultado).

b) Con base en el teorema del eje paralelo (ejercicio 15.6) y el resultado del inciso *a*), determine el momento de inercia con respecto a una recta tangente a la carcasa.

48. Superficie cónica Determine el centroide de la superficie lateral de un cono sólido con base de radio a y altura h (superficie del cono menos la base).

16.7 Teorema de Stokes

Para calcular la circulación en sentido contrario al de las manecillas del reloj de un campo vectorial bidimensional $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ alrededor de una curva cerrada simple en el plano, el teorema de Green afirma que podemos calcular la integral doble sobre la región encerrada por la curva de la cantidad escalar $(\partial N/\partial x - \partial M/\partial y)$. Esta expresión es la componente $\mathbf{k}$ del campo *vectorial rotacional* que definimos en esta sección, y que mide la tasa de rotación de $\mathbf{F}$ en cada punto de la región alrededor de un eje paralelo a $\mathbf{k}$. Para un campo vectorial en el espacio tridimensional, la rotación en cada punto es alrededor de un eje que es paralelo al vector rotacional en ese punto. Cuando una curva cerrada C en el espacio es la frontera de una superficie orientada, veremos que la circulación de $\mathbf{F}$ alrededor de C es igual a la integral de la superficie del campo vectorial rotacional. Este resultado amplía el teorema de Green de regiones en el plano a superficies generales en el espacio que tienen una curva frontera suave.

El campo vectorial rotacional

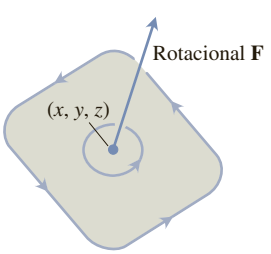


FIGURA 16.55 El vector de circulación en el punto (x, y, z) de un plano en un flujo tridimensional. Observe la regla de la mano derecha con respecto a las partículas que giran en el fluido.

Suponga que $\mathbf{F}$ es el campo de velocidades de un fluido que fluye en el espacio. Las partículas cercanas al punto (x, y, z) en el fluido tienden a girar alrededor de un eje que pasa por (x, y, z) y que es paralelo a cierto vector que estamos a punto de definir. Este vector apunta en la dirección en la cual la rotación va en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se mira el plano de circulación hacia abajo desde la punta de la flecha que representa al vector. Ésta es la dirección en que apunta el pulgar de la mano derecha cuando los dedos rodean el eje de rotación en el mismo sentido de rotación de las partículas en el fluido (figura 16.55). La longitud del vector mide la tasa de rotación. El vector se conoce como **vector rotacional** y para el campo vectorial $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ se define como

$$\text{Rotacional } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \tag{1}$$

Esta información es una consecuencia del teorema de Stokes, que es la generalización para el espacio de la forma de circulación rotacional del teorema de Green y el tema de esta sección.

Observe que $(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = (\partial N/\partial x - \partial M/\partial y)$ es consistente con nuestra definición de la sección 16.4, cuando $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$. Con frecuencia, la fórmula para el rotacional de $\mathbf{F}$ en la ecuación (1) se escribe utilizando el operador simbólico

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{2}$$

para calcular el rotacional de $\mathbf{F}$ como

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

El símbolo ∇ se lee "nabla" y con frecuencia se usa la notación del producto cruz para escribir el rotacional simbólicamente como "nabla cruz $\mathbf{F}$".

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} \tag{3}$$

EJEMPLO 1 Determine el rotacional de $\mathbf{F} = (x^2 - z)\mathbf{i} + xe^z\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$.

Solución Usamos la ecuación (3) y la forma de determinantes, de manera que

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - z & xe^z & xy \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(xe^z)\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2 - z)\right)\mathbf{j}$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x}(xe^z) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - z)\right)\mathbf{k}$$

$$= (x - xe^z)\mathbf{i} - (y + 1)\mathbf{j} + (e^z - 0)\mathbf{k}$$

$$= x(1 - e^z)\mathbf{i} - (y + 1)\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}.$$

■

Como veremos, el operador ∇ tiene varias aplicaciones. Por ejemplo, cuando se aplica a una función escalar $f(x, y, z)$, nos da el gradiente de f:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}.$$

En ocasiones, esto se lee como "nabla f" o "gradiente de f".

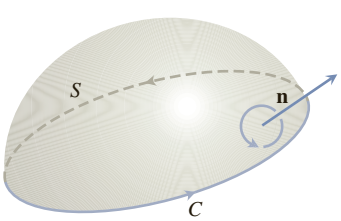


FIGURA 16.56 La orientación de la curva frontera C da una regla de la mano derecha al campo normal $\mathbf{n}$. Si el pulgar de la mano derecha apunta a lo largo de $\mathbf{n}$, los dedos se doblan en la dirección de C.

Teorema de Stokes

El teorema de Stokes generaliza el teorema de Green a tres dimensiones. La forma rotacional de la circulación del teorema de Green relaciona la circulación, en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, de un campo vectorial alrededor de una curva cerrada simple C en el plano xy con una integral doble sobre la región plana R encerrada por C. El teorema de Stokes relaciona la circulación de un campo vectorial alrededor de la frontera C de una superficie orientada S en el espacio (figura 16.56) con una integral de superficie sobre la superficie S. Es necesario que la superficie sea **suave por tramos**, lo cual significa que se trata de una unión finita de superficies suaves unidas a lo largo de curvas suaves.

TEOREMA 6 Teorema de Stokes Sea S una superficie orientada suave por tramos que tiene como frontera una curva suave por tramos C. Sea $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ un campo vectorial cuyas componentes tienen primeras derivadas parciales continuas sobre una región abierta que contiene a S. Entonces, la circulación de $\mathbf{F}$ alrededor de C en sentido contrario al de las manecillas del reloj con respecto al vector unitario $\mathbf{n}$ normal a la superficie es igual a la integral del campo vectorial rotacional $\nabla \times \mathbf{F}$ sobre S:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma \tag{4}$$

Circulación en sentido contrario al de las manecillas del reloj — Integral del rotacional

Observe en la ecuación (4) que si dos diferentes superficies orientadas, S_1 y S_2, tienen la misma frontera C, las integrales de los rotacionales son iguales:

$$\iint_{S_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_1\, d\sigma = \iint_{S_2} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2\, d\sigma.$$

Ambas integrales del rotacional son iguales a la integral de circulación en sentido contrario al de las manecillas del reloj, en el lado izquierdo de la ecuación (4), siempre que los vectores unitarios normales $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ orienten correctamente las superficies. De esta forma, la integral del rotacional es independiente de la superficie y sólo depende de la circulación a lo largo de la curva frontera. Esta independencia de la superficie es similar a la independencia de la trayectoria para la integral de flujo de un campo de velocidad conservativo a lo largo de una curva, donde el valor de la integral de flujo sólo depende de los puntos terminales (es decir, los puntos frontera) de la trayectoria. El campo rotacional $\nabla \times \mathbf{F}$ es análogo al campo gradiente ∇f de una función escalar f.

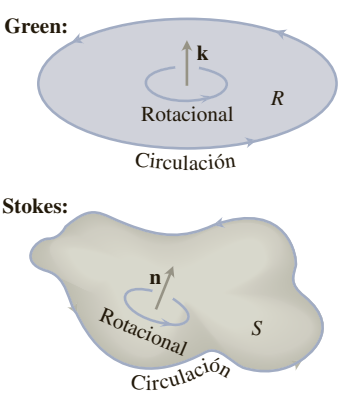


FIGURA 16.57 Comparación del teorema de Green y el teorema de Stokes.

Si C es una curva en el plano xy, orientada en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, y R es la región en el plano xy acotada por C, entonces, $d\sigma = dxdy$ y

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

En estas condiciones, la ecuación de Stokes se convierte en

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

que es la forma de circulación rotacional de la ecuación en el teorema de Green. De manera recíproca, al invertir estos pasos, replanteamos la forma de circulación rotacional del teorema de Green para campos de dos dimensiones con la notación nabla como

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\, dA. \tag{5}$$

Vea la figura 16.57.

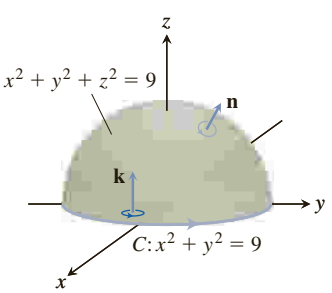


FIGURA 16.58 Un hemisferio y un disco, cada uno con frontera en C (ejemplos 2 y 3).

EJEMPLO 2 Evalúe la ecuación (4) para el hemisferio S: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geq 0$, su círculo frontera C: $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$, y el campo $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$.

Solución El hemisferio se parece mucho a la superficie de la figura 16.56 con la circunferencia frontera C sobre el plano xy (vea la figura 16.58). Calculamos la circulación en sen-

tido contrario al de las manecillas del reloj alrededor de C (observando desde arriba), mediante la parametrización $\mathbf{r}(\theta) = (3 \cos \theta)\mathbf{i} + (3 \operatorname{sen} \theta)\mathbf{j}$, $0 \le \theta \le 2\pi$:

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= (-3 \operatorname{sen} \theta \, d\theta)\mathbf{i} + (3 \cos \theta \, d\theta)\mathbf{j} \\ \mathbf{F} &= y\mathbf{i} - x\mathbf{j} = (3 \operatorname{sen} \theta)\mathbf{i} - (3 \cos \theta)\mathbf{j} \\ \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= -9 \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta - 9 \cos^2 \theta \, d\theta = -9 \, d\theta \\ \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} -9 \, d\theta = -18\pi. \end{aligned}$$

Para la integral del rotacional de $\mathbf{F}$, tenemos

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k} \\ &= (0 - 0)\mathbf{i} + (0 - 0)\mathbf{j} + (-1 - 1)\mathbf{k} = -2\mathbf{k} \\ \mathbf{n} &= \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{3} \qquad \text{Vector normal unitario exterior} \\ d\sigma &= \frac{3}{z} dA \qquad \text{Sección 16.6, ejemplo 7, con } a = 3 \\ \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma &= -\frac{2z}{3}\frac{3}{z} dA = -2 \, dA \end{aligned}$$

y

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_{x^2+y^2 \le 9} -2 \, dA = -18\pi.$$

La circulación alrededor de la circunferencia es igual a la integral del rotacional sobre el hemisferio, como debe ser de acuerdo con el teorema de Stokes. ■

La integral de superficie en el teorema de Stokes se puede calcular usando cualquier superficie que tenga una curva C como frontera, siempre que la superficie esté orientada adecuadamente y permanezca dentro del dominio del campo $\mathbf{F}$. En el siguiente ejemplo se ilustra este hecho para la circulación alrededor de la curva C del ejemplo 2.

EJEMPLO 3 Determine la circulación alrededor de la circunferencia frontera C del ejemplo 2 usando un disco de radio 3 con centro en el origen en el plano xy como la superficie S (en lugar del hemisferio). Observe la figura 16.58.

Solución Como en el ejemplo 2, $\nabla \times \mathbf{F} = -2\mathbf{k}$. Para la superficie que ahora es el disco descrito en el plano xy, tenemos al vector normal $\mathbf{n} = \mathbf{k}$, de manera que

$$\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = -2\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \, dA = -2 \, dA$$

y

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_{x^2+y^2 \le 9} -2 \, dA = -18\pi,$$

un cálculo más sencillo que el anterior. ■

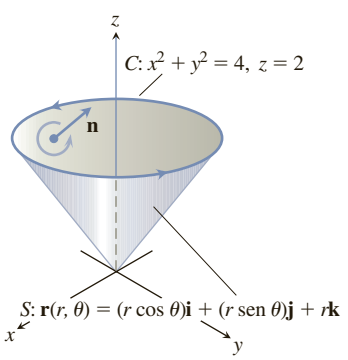


FIGURA 16.59 La curva C y el cono S del ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Determine la circulación del campo $\mathbf{F} = (x^2 - y)\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ alrededor de la curva C en la cual el plano $z = 2$ corta al cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, en sentido contrario al de las manecillas del reloj, visto desde arriba (figura 16.59).

Solución El teorema de Stokes nos permite encontrar la circulación integrando sobre la superficie del cono. El hecho de recorrer C en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, visto desde arriba, corresponde a tomar la normal *interior* $\mathbf{n}$ del cono, es decir, la normal con la componente $\mathbf{k}$ positiva.

Parametrizamos el cono como

$$\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}, \qquad 0 \le r \le 2, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

De esta forma, tenemos que

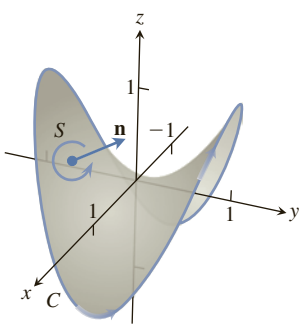
$$\begin{aligned}
\mathbf{n} &= \frac{\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta}{|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta|} = \frac{-(r\cos\theta)\mathbf{i} - (r\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}}{r\sqrt{2}} && \text{Sección 16.5, ejemplo 4}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(-(\cos\theta)\mathbf{i} - (\text{sen}\,\theta)\mathbf{j} + \mathbf{k}\big)\\
d\sigma &= r\sqrt{2}\,dr\,d\theta && \text{Sección 16.5, ejemplo 4}\\
\nabla \times \mathbf{F} &= -4\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + \mathbf{k} && \text{Cálculo de rutina}\\
&= -4\mathbf{i} - 2r\cos\theta\mathbf{j} + \mathbf{k}. && x = r\cos\theta
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(4\cos\theta + 2r\cos\theta\,\text{sen}\,\theta + 1\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(4\cos\theta + r\,\text{sen}\,2\theta + 1\right)
\end{aligned}$$

y la circulación es

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \nabla \times \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma && \text{Teorema de Stokes, ecuación 4}\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2}}\big(4\cos\theta + r\,\text{sen}\,2\theta + 1\big)\big(r\sqrt{2}\,dr\,d\theta\big) = 4\pi. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$



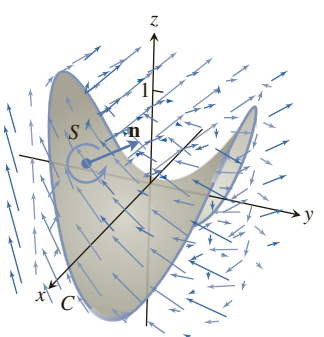


FIGURA 16.60 La superficie y el campo vectorial del ejemplo 6.

EJEMPLO 5 El cono empleado en el ejemplo 4 no es la superficie más fácil para calcular la circulación alrededor de la circunferencia frontera C que se encuentra en el plano $z = 3$. Si en su lugar usamos el disco plano de radio 3 con centro sobre el eje z y que está en el plano $z = 3$, entonces, el vector normal a la superficie S es $\mathbf{n} = \mathbf{k}$. Exactamente como en el cálculo del ejemplo 4, tenemos que $\nabla \times \mathbf{F} = -4\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Sin embargo, ahora obtenemos $\nabla \times \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = 1$, de manera que

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_{x^2+y^2\le 4} 1\,dA = 4\pi. \qquad \text{La sombra es el disco de radio 2 en el plano } xy.$$

Este resultado está de acuerdo con el valor de circulación del ejemplo 4. $\blacksquare$

EJEMPLO 6 Encuentre una parametrización para la superficie S formada por parte del paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que se encuentra dentro del cilindro de radio 1 alrededor del eje z y para la curva frontera C de S. (Vea la figura 16.60). Después, compruebe el teorema de Stokes para S usando la normal que tiene componente positiva $\mathbf{k}$ y el campo vectorial $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$.

Solución Como la circunferencia unitaria es atravesada en sentido contrario al de las manecillas del reloj en el plano xy, la coordenada z de la superficie con la curva C como frontera está dada por $y^2 - x^2$. Una parametrización de C está dada por

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\text{sen}\,t)\mathbf{j} + (\text{sen}^2 t - \cos^2 t)\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

con

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + (4 \operatorname{sen} t \cos t)\mathbf{k}, \ 0 \le t \le 2\pi.$$

A lo largo de la curva $\mathbf{r}(t)$, la fórmula para el campo vectorial $\mathbf{F}$ es

$$\mathbf{F} = (\operatorname{sen} t)\mathbf{i} - (\cos t)\mathbf{j} + (\cos^2 t)\mathbf{k}.$$

La circulación en sentido contrario al de las manecillas del reloj a lo largo de C es el valor de la integral de línea

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt &= \int_0^{2\pi} \left(-\operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t + 4 \operatorname{sen} t \cos^3 t\right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(4 \operatorname{sen} t \cos^3 t - 1\right) dt \\ &= \left[-\cos^4 t - t\right]_0^{2\pi} = -2\pi.\end{aligned}$$

Ahora calculamos la misma cantidad integrando $\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ sobre la superficie S. Usamos las coordenadas polares y parametrizamos S observando que arriba del punto (r, θ) en el plano, la coordenada z de S es $y^2 - x^2 = r^2 \operatorname{sen}^2 \theta - r^2 \cos^2 \theta$. Una parametrización de S es

$$\mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta)\mathbf{i} + (r \operatorname{sen} \theta)\mathbf{j} + r^2(\operatorname{sen}^2 \theta - \cos^2 \theta)\mathbf{k}, \quad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Ahora calculamos $\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$. Tenemos

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & x^2 \end{vmatrix} = -2x\mathbf{j} - 2\mathbf{k} = -(2r \cos \theta)\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

y

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_r &= (\cos \theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} \theta)\mathbf{j} + 2r(\operatorname{sen}^2 \theta - \cos^2 \theta)\mathbf{k} \\ \mathbf{r}_\theta &= (-r \operatorname{sen} \theta)\mathbf{i} + (r \cos \theta)\mathbf{j} + 4r^2(\operatorname{sen} \theta \cos \theta)\mathbf{k} \\ \mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & \operatorname{sen} \theta & 2r(\operatorname{sen}^2 \theta - \cos^2 \theta) \\ -r \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta & 4r^2(\operatorname{sen} \theta \cos \theta) \end{vmatrix} \\ &= 2r^2(2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta - \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta + \cos^3 \theta)\mathbf{i} \\ &\quad -2r^2(2 \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^3 \theta + \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Ahora obtenemos

$$\begin{aligned}\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \nabla \times \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta}{|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta|} |\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| \, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \nabla \times \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta)\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[4r^3\left(2 \operatorname{sen} \theta \cos^3 \theta + \operatorname{sen}^3 \theta \cos \theta + \operatorname{sen} \theta \cos^3 \theta\right) - 2r\right] dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[r^4(3 \operatorname{sen} \theta \cos^3 \theta + \operatorname{sen}^3 \theta \cos \theta) - r^2\right]_{r=0}^{r=1} d\theta \qquad \text{Se integra.} \\ &= \int_0^{2\pi} (3 \operatorname{sen} \theta \cos^3 \theta + \operatorname{sen}^3 \theta \cos \theta - 1)\, d\theta \qquad \text{Se evalúa.} \\ &= \left[-\frac{3}{4}\cos^4 \theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 \theta - \theta\right]_0^{2\pi} \\ &= \left(-\frac{3}{4} + 0 - 2\pi + \frac{3}{4} - 0 + 0\right) = -2\pi.\end{aligned}$$

Así, la integral de superficie de $\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ sobre S es igual a la circulación en sentido contrario al de las manecillas del reloj de $\mathbf{F}$ a lo largo de C, como afirma el teorema de Stokes. ■

EJEMPLO 7 Calcule la circulación del campo vectorial

$$\mathbf{F} = (x^2 + z)\mathbf{i} + (y^2 + 2x)\mathbf{j} + (z^2 - y)\mathbf{k}$$

a lo largo de la curva de intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, recorrida en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del eje z viendo desde arriba.

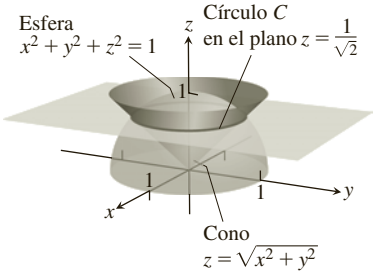


FIGURA 16.61 Curva de circulación del ejemplo 7.

Solución La esfera y el cono se intersecan cuando $1 = (x^2 + y^2) + z^2 = z^2 + z^2 = 2z^2$ o $z = 1/\sqrt{2}$ (vea la figura 16.61). Aplicamos el teorema de Stokes a la curva de intersección $x^2 + y^2 = 1/2$ considerada como la frontera del disco encerrado en el plano $z = 1/\sqrt{2}$. El vector normal a la superficie es, entonces, $\mathbf{n} = \mathbf{k}$. Calculamos el vector rotacional como

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + z & y^2 + 2x & z^2 - y \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \qquad \text{Cálculo de rutina}$$

de manera que $\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = 2$. La circulación alrededor del disco es

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\, d\sigma$$

$$= \iint_S 2\, d\sigma = 2 \cdot \text{área del disco} = 2 \cdot \pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \pi.$$

Interpretación de $\nabla \times \mathbf{F}$ mediante la rueda con paletas

Suponga que $\mathbf{F}$ es el campo de velocidades de un fluido que se mueve en una región R del espacio que contiene la curva cerrada C. Entonces,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

es la circulación del fluido alrededor de C. De acuerdo con el teorema de Stokes, la circulación es igual al flujo de $\nabla \times \mathbf{F}$ a través de una superficie S orientada adecuadamente con frontera en C:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma.$$

Suponga que fijamos un punto Q en la región R y con una dirección $\mathbf{u}$ en Q. Sea C una circunferencia de radio r, con centro en Q, cuyo plano es normal a $\mathbf{u}$. Si $\nabla \times \mathbf{F}$ es continuo en Q, el valor promedio de la componente $\mathbf{u}$ de $\nabla \times \mathbf{F}$ sobre el disco circular S acotado por C se aproxima a la componente $\mathbf{u}$ de $\nabla \times \mathbf{F}$ en Q cuando el radio $\rho \to 0$:

$$(\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{u})_Q = \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\pi\rho^2} \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}\, d\sigma.$$

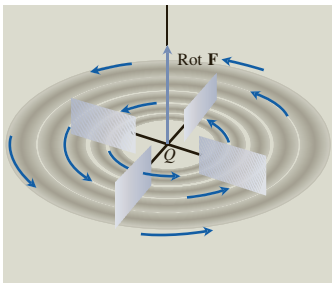


FIGURA 16.62 Una pequeña rueda con paletas en un fluido gira lo más rápidamente en el punto Q cuando su eje apunta en la dirección del rotacional de $\mathbf{F}$.

Si aplicamos el teorema de Stokes y reemplazamos la integral de superficie por una integral de línea sobre C, obtenemos

$$(\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{u})_Q = \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\pi\rho^2} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \tag{6}$$

El lado izquierdo de la ecuación (6) tiene su valor máximo cuando $\mathbf{u}$ está en la dirección de $\nabla \times \mathbf{F}$. Cuando ρ es pequeño, el límite del lado derecho de la ecuación (6) es aproximadamente

$$\frac{1}{\pi\rho^2} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

que es la circulación alrededor de C dividida entre el área del disco (densidad de circulación). Suponga que una rueda pequeña de radio r con paletas se introduce en el fluido en Q, con su eje dirigido a lo largo de $\mathbf{u}$ (figura 16.62). La circulación del fluido alrededor de C afectará la razón de giro de la rueda con paletas. Esta última girará más rápido cuando la integral de circulación se maximice y, por lo tanto, girará más rápido cuando el eje de la rueda con paletas apunte en la dirección de $\nabla \times \mathbf{F}$.

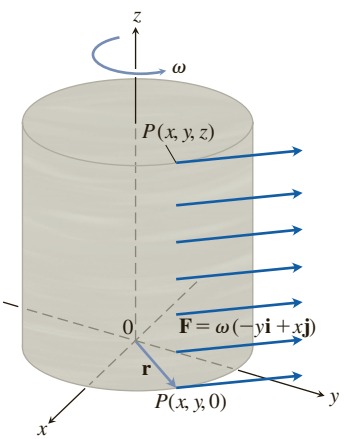


FIGURA 16.63 Un flujo rotacional estable paralelo al plano xy, con velocidad angular constante ω en la dirección positiva (sentido contrario al de las manecillas del reloj) (ejemplo 8).

EJEMPLO 8 Un fluido de densidad constante gira alrededor del eje z con una velocidad $\mathbf{F} = \omega(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$, donde ω es una constante positiva llamada *velocidad angular* de rotación (figura 16.63). Determine $\nabla \times \mathbf{F}$ y relacione esto con la densidad de circulación.

Solución Con $\mathbf{F} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}$, encontramos el rotacional

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k} \\ &= (0 - 0)\mathbf{i} + (0 - 0)\mathbf{j} + (\omega - (-\omega))\mathbf{k} = 2\omega\mathbf{k}.\end{aligned}$$

De acuerdo con el teorema de Stokes, la circulación de $\mathbf{F}$ alrededor de la circunferencia C de radio r que acota un disco S en un plano normal a $\nabla \times \mathbf{F}$, digamos el plano xy, es

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_S 2\omega\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}\, dx\, dy = (2\omega)(\pi\rho^2).$$

Por lo tanto, al resolver esta última ecuación para despejar 2ω, tenemos

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = 2\omega = \frac{1}{\pi\rho^2} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

lo que concuerda con la ecuación (6) cuando $\mathbf{u} = \mathbf{k}$. ■

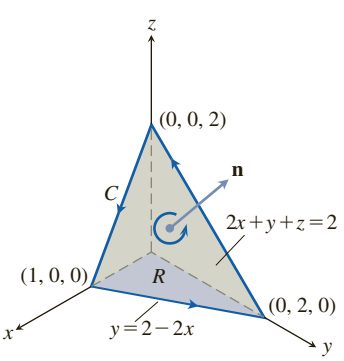


FIGURA 16.64 La superficie plana del ejemplo 9.

EJEMPLO 9 Utilice el teorema de Stokes para evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot dr$, si $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + 3xz\mathbf{k}$; C es la frontera de la porción del plano $2x + y + z = 2$ en el primer octante, recorrida en sentido contrario al de las manecillas del reloj vista desde arriba (figura 16.64).

Solución El plano es la superficie de nivel $f(x, y, z) = 2$ de la función $f(x, y, z) = 2x + y + z$. El vector unitario normal

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})}{|2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$$

es consistente con la circulación en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor de C. Al aplicar el teorema de Stokes, encontramos

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & xy & 3xz \end{vmatrix} = (x - 3z)\mathbf{j} + y\mathbf{k}.$$

En el plano, z es igual a $2 - 2x - y$, por lo que

$$\nabla \times \mathbf{F} = (x - 3(2 - 2x - y))\mathbf{j} + y\mathbf{k} = (7x + 3y - 6)\mathbf{j} + y\mathbf{k}$$

y

$$\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}\Big(7x + 3y - 6 + y\Big) = \frac{1}{\sqrt{6}}\Big(7x + 4y - 6\Big).$$

El elemento de área superficial es

$$d\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{k}|} dA = \frac{\sqrt{6}}{1} dx\, dy.$$

La circulación es

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma \qquad \text{Teorema de Stokes, ecuación (4)} \\ &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} \frac{1}{\sqrt{6}}\Big(7x + 4y - 6\Big)\sqrt{6}\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} (7x + 4y - 6)\, dy\, dx = -1. \end{aligned}$$

■

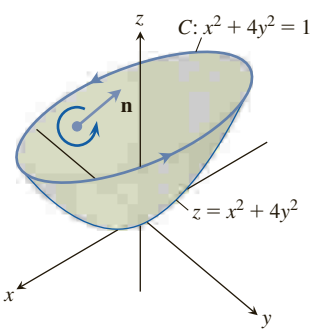


FIGURA 16.65 La porción del paraboloide elíptico del ejemplo 10, que muestra la curva de intersección C con el plano $z = 1$ y su orientación interior normal dada por $\mathbf{n}$.

EJEMPLO 10 Sea la superficie S el paraboloide elíptico $z = x^2 + 4y^2$ que está debajo del plano $z = 1$ (figura 16.65). Definimos la orientación de S tomando el vector normal *interior* $\mathbf{n}$ de la superficie, el cual es la normal con la componente positiva $\mathbf{k}$. Determine el flujo de $\nabla \times \mathbf{F}$ a través de S en la dirección $\mathbf{n}$ para el campo vectorial $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}$.

Solución Usamos el teorema de Stokes para calcular la integral del rotacional determinando el equivalente de la circulación de $\mathbf{F}$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor de la curva de intersección C del paraboloide $z = x^2 + 4y^2$ y el plano $z = 1$, como se indica en la figura 16.65. Observe que la orientación de S es consistente con la dirección del recorrido de C en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del eje z. La curva C es la elipse $x^2 + 4y^2 = 1$ en el plano $z = 1$. Podemos parametrizar la elipse por $x = \cos t$, $y = \frac{1}{2}\,\text{sen}\, t$, $z = 1$, para $0 \le t \le 2\pi$, de manera que C está dada por

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + \frac{1}{2}(\text{sen}\, t)\mathbf{j} + \mathbf{k}, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Para calcular la integral de circulación $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, evaluamos $\mathbf{F}$ a lo largo de C y obtenemos el vector de velocidad $d\mathbf{r}/dt$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \frac{1}{2}(\text{sen}\, t)\mathbf{i} - (\cos t)\mathbf{j} + (\cos t)\mathbf{k}$$

y

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -(\text{sen}\, t)\mathbf{i} + \frac{1}{2}(\cos t)\mathbf{j}.$$

Entonces,

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t - \frac{1}{2}\cos^2 t\right)dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt = -\pi.$$

Por lo tanto, con el teorema de Stokes, el flujo del rotacional a través de S en la dirección $\mathbf{n}$ para el campo $\mathbf{F}$ es

$$\iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = -\pi. \qquad \blacksquare$$

Esbozo de la demostración del teorema de Stokes para superficies poliédricas

Sea S una superficie poliédrica que consta de un número finito de regiones planas llamadas caras. (Se presentan ejemplos en la figura 16.66). Aplicamos por separado el teorema de Green a cada cara de S. Hay dos tipos de caras:

1. Aquéllas rodeadas en todos sus lados por otras caras.
2. Aquéllas que tienen una o más aristas no adyacentes a otras caras.

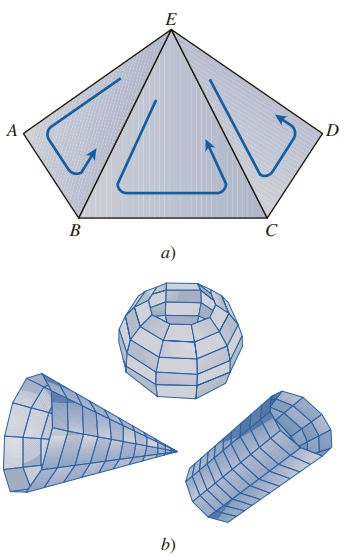


FIGURA 16.66 *a*) Parte de una superficie poliédrica. *b*) Otras superficies poliédricas.

La frontera Δ de S consta de aquellas aristas de las caras del tipo 2 que no son adyacentes a otras caras. En la figura 16.66*a*), los triángulos *EAB*, *BCE* y *CDE* representan una parte de S, con *ABCD* como parte de la frontera Δ. Aunque se enunció el teorema de Green para curvas en el plano xy, se aplica una forma generalizada a curvas planas en el espacio, donde $\mathbf{n}$ es normal al plano (en lugar de $\mathbf{k}$). En la forma tangencial generalizada, el teorema afirma que la integral de línea de $\mathbf{F}$ alrededor de la curva que encierra la región plana R normal a $\mathbf{n}$ es igual a la integral doble de (rot $\mathbf{F}$) $\cdot\,\mathbf{n}$ sobre R. Aplicamos esta forma tangencial generalizada a cada uno de los tres triángulos de la figura 16.66*a*) y luego sumamos los resultados para obtener

$$\left(\oint_{EAB} + \oint_{BCE} + \oint_{CDE}\right)\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \left(\iint_{EAB} + \iint_{BCE} + \iint_{CDE}\right)\nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma. \tag{7}$$

Las tres integrales de línea de la izquierda en la ecuación (7) se combinan en una sola integral de línea alrededor del perímetro *ABCDE*, ya que las integrales a lo largo de los segmentos interiores se cancelan por pares. Por ejemplo, la integral a lo largo del segmento *BE* del triángulo *ABE* tiene signo opuesto a la integral a lo largo del mismo segmento del triángulo *EBC*. Lo mismo se cumple para el segmento *CE*. De ahí que la ecuación (7) se reduzca a

$$\oint_{ABCDE}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{ABCDE}\nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma.$$

Cuando aplicamos la forma generalizada del teorema de Green a todas las caras y sumamos los resultados, obtenemos

$$\oint_{\Delta}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma.$$

Éste es el teorema de Stokes para la superficie poliédrica S de la figura 16.66*a*). En la figura 16.66*b*) se muestran superficies poliédricas más generales; es posible extender la demostración a estas superficies. También es posible obtener superficies suaves generales como límites de superficies poliédricas; una demostración completa se podrá encontrar en textos más avanzados.

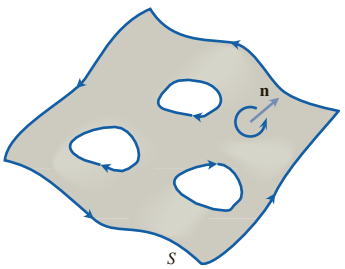


FIGURA 16.67 El teorema de Stokes también se cumple para superficies orientadas perforadas. En forma consistente con la orientación de S, la curva exterior se recorre en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor de $\mathbf{n}$, en tanto que las curvas interiores alrededor de los orificios se recorren en el sentido de las manecillas del reloj.

El teorema de Stokes para superficies perforadas

El teorema de Stokes se cumple para una superficie orientada S que tiene uno o más orificios (figura 16.67). La integral de superficie sobre S de la componente normal de $\nabla \times \mathbf{F}$ es igual a la suma de las integrales de línea alrededor de todas las curvas frontera de la componente tangencial de $\mathbf{F}$, donde las curvas se trazan en la dirección inducida por la orientación de S. Para estas superficies, el teorema es el mismo, pero se considera a C como una unión de curvas simples cerradas.

Una identidad importante

La siguiente identidad se presenta con frecuencia tanto en matemáticas como en las ciencias físicas.

$$\text{rot grad (rotacional de un gradiente) } f = \mathbf{0} \qquad \text{o} \qquad \nabla \times \nabla f = \mathbf{0} \tag{8}$$

En el estudio de electromagnetismo y gravedad, surgen fuerzas que con frecuencia están asociadas a una función potencial f. La identidad (8) nos indica que estas fuerzas tienen un rotacional igual a cero. Esta identidad se cumple para cualquier función $f(x, y, z)$, cuyas segundas derivadas parciales son continuas. La demostración es como sigue:

$$\nabla \times \nabla f = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = (f_{zy} - f_{yz})\mathbf{i} - (f_{zx} - f_{xz})\mathbf{j} + (f_{yx} - f_{xy})\mathbf{k}.$$

Si las segundas derivadas parciales son continuas, las segundas derivadas mixtas que se muestran entre paréntesis son iguales (teorema 2, sección 14.3) y el vector es igual a cero.

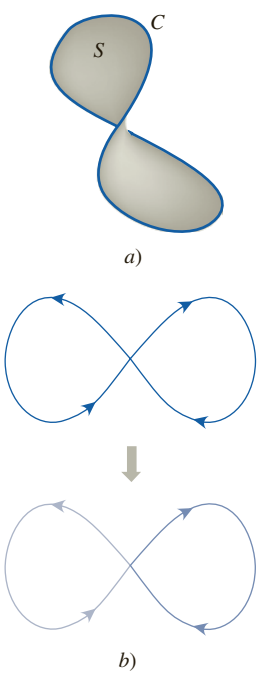


FIGURA 16.68 *a*) En una región abierta simplemente conexa en el espacio, una curva simple cerrada C es la frontera de una superficie suave S. *b*) Las curvas suaves que se cruzan a sí mismas se pueden dividir en lazos a los cuales se aplica el teorema de Stokes.

Campos conservativos y teorema de Stokes

En la sección 16.3 nos encontramos con el hecho de que un campo $\mathbf{F}$ que es conservativo en una región abierta D en el espacio es equivalente a que la integral de $\mathbf{F}$ alrededor de cada lazo cerrado en C se anule. Esto, a la vez, en regiones abiertas *simplemente conexas* equivale a decir que $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ (lo cual permite determinar si $\mathbf{F}$ es conservativo en esas regiones).

TEOREMA 7 Relación de rot F = 0 con la propiedad del lazo cerrado Si $= \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ en cualquier punto de una región abierta simplemente conexa D en el espacio, entonces, para cualquier trayectoria cerrada y suave por tramos C en D,

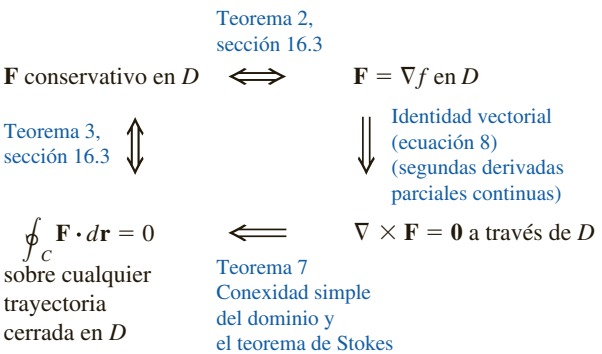
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Bosquejo de una demostración El teorema 7 se demuestra en dos pasos. El primer paso es para curvas cerradas simples (lazos que no se cruzan), como el de la figura 16.68*a*). Un teorema de topología, una rama de las matemáticas avanzadas, establece que toda curva cerrada, suave y simple C en una región abierta simplemente conexa D es la frontera de una superficie S suave con dos lados, que también está en D. Así, por el teorema de Stokes,

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = 0.$$

El segundo paso se refiere a las curvas que se cruzan a sí mismas, como la de la figura 16.68*b*). La idea es descomponerlas en lazos simples generados por superficies orientables, aplicar el teorema de Stokes a un lazo a la vez y sumar los resultados. ■

El siguiente diagrama resume los resultados para campos conservativos definidos en regiones abiertas conexas y simplemente conexas. Para tales regiones, los cuatro enunciados son equivalentes entre sí.



Ejercicios 16.7

Uso del teorema de Stokes para calcular las integrales de línea

En los ejercicios 1 a 6, utilice la integral de superficie del teorema de Stokes para calcular la circulación del campo **F** alrededor de la curva *C* en la dirección indicada.

1. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

C: La elipse $4x^2 + y^2 = 4$ en el plano *xy*, en sentido contrario al de las manecillas del reloj, vista desde arriba

2. $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$

C: La circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ en el plano *xy*, en sentido contrario al de las manecillas del reloj, vista desde arriba

3. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$

C: La frontera del triángulo cortado del plano $x + y + z = 1$ por el primer octante, en sentido contrario al de las manecillas del reloj, visto desde arriba

4. $\mathbf{F} = (y^2 + z^2)\mathbf{i} + (x^2 + z^2)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$

C: La frontera del triángulo cortado del plano $x + y + z = 1$ por el primer octante, en sentido contrario al de las manecillas del reloj, visto desde arriba

5. $\mathbf{F} = (y^2 + z^2)\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$

C: El cuadrado acotado por las rectas $x = \pm 1$ y $y = \pm 1$ en el plano *xy*, en sentido contrario al de las manecillas del reloj, visto desde arriba

6. $\mathbf{F} = x^2y3\mathbf{i} + \mathbf{j} + z\mathbf{k}$

C: La intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$, en sentido contrario al de las manecillas del reloj, visto desde arriba

Integral del campo vectorial rotacional

7. Sea **n** el vector unitario normal exterior de la carcasa elíptica

$$S: \quad 4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36, \qquad z \geq 0,$$

y sea

$$\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + (x^2 + y^4)^{3/2} \operatorname{sen} e^{\sqrt{xyz}}\,\mathbf{k}.$$

Calcule el valor de

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma.$$

(*Sugerencia:* Considere que una parametrización de la elipse en la base de la carcasa es $x = 3\cos t$, $y = 2 \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$).

8. Sea **n** el vector unitario normal exterior (normal alejándose del origen) de la carcasa parabólica

$$S: \quad 4x^2 + y + z^2 = 4, \qquad y \geq 0,$$

y sea

$$\mathbf{F} = \left(-z + \frac{1}{2 + x}\right)\mathbf{i} + (\tan^{-1} y)\mathbf{j} + \left(x + \frac{1}{4 + z}\right)\mathbf{k}.$$

Calcule el valor de

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma.$$

9. Sea *S* el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq h$, junto con su cara superior, $x^2 + y^2 \leq a^2$, $z = h$. Sea $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$. Utilice el teorema de Stokes para encontrar el flujo de $\nabla \times \mathbf{F}$ hacia fuera a través de *S*.

10. Evalúe

$$\iint_S \nabla \times (y\mathbf{i}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma,$$

donde *S* es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$.

11. Suponga que $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$, donde

$$\mathbf{A} = \left(y + \sqrt{z}\right)\mathbf{i} + e^{xyz}\,\mathbf{j} + \cos(xz)\,\mathbf{k}.$$

Determine el flujo de $\mathbf{F}$ que sale a través del hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$.

12. Repita el ejercicio 11 para el flujo de $\mathbf{F}$ a través de la esfera unitaria.

El teorema de Stokes para superficies parametrizadas

En los ejercicios 13 a 18, utilice la integral de superficie del teorema de Stokes para calcular el flujo del rotacional del campo $\mathbf{F}$ a través de la superficie S, en la dirección del vector unitario normal exterior $\mathbf{n}$.

13. $\mathbf{F} = 2z\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 5y\mathbf{k}$

S: $\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{j} + (4 - r^2)\mathbf{k}$, $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

14. $\mathbf{F} = (y - z)\mathbf{i} + (z - x)\mathbf{j} + (x + z)\mathbf{k}$

S: $\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{j} + (9 - r^2)\mathbf{k}$, $0 \leq r \leq 3$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

15. $\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} + 2y^3z\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$

S: $\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

16. $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + (z - x)\mathbf{k}$

S: $\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{j} + (5 - r)\mathbf{k}$, $0 \leq r \leq 5$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

17. $\mathbf{F} = 3y\mathbf{i} + (5 - 2x)\mathbf{j} + (z^2 - 2)\mathbf{k}$

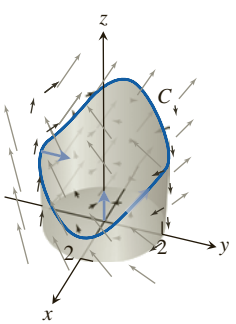
S: $\mathbf{r}(\phi, \theta) = \left(\sqrt{3}\,\text{sen}\,\phi\cos\theta\right)\mathbf{i} + \left(\sqrt{3}\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta\right)\mathbf{j} + \left(\sqrt{3}\cos\phi\right)\mathbf{k}$, $0 \leq \phi \leq \pi/2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

18. $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x\mathbf{k}$

S: $\mathbf{r}(\phi, \theta) = (2\,\text{sen}\,\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (2\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{j} + (2\cos\phi)\mathbf{k}$, $0 \leq \phi \leq \pi/2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Teoría y ejemplos

19. Sea C la curva suave $\mathbf{r}(t) = (2\cos t)\mathbf{i} + (2\,\text{sen}\,t)\mathbf{j} + (3 - 2\cos^3 t)\mathbf{k}$, orientada para recorrerse en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del eje z cuando se ve desde arriba. Sea S la superficie cilíndrica suave por tramos $x^2 + y^2 = 4$, debajo de la curva para $z \geq 0$, junto con la base del disco en el plano xy. Observe que C se encuentra en el cilindro S y arriba del plano xy (vea la siguiente figura). Verifique la ecuación (4) del teorema de Stokes para el campo vectorial $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$.



20. Verifique el teorema de Stokes para el campo vectorial $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + x\mathbf{j} + (y + z)\mathbf{k}$ y la superficie $z = 4 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$, orientada con un vector normal unitario $\mathbf{n}$ que apunta hacia arriba.

21. Circulación nula Utilice la ecuación (8) y el teorema de Stokes para demostrar que las circulaciones de los siguientes campos alrededor de la frontera de cualquier superficie suave orientable en el espacio son cero.

a) $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ ***b***) $\mathbf{F} = \nabla(xy^2z^3)$

c) $\mathbf{F} = \nabla \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$ ***d***) $\mathbf{F} = \nabla f$

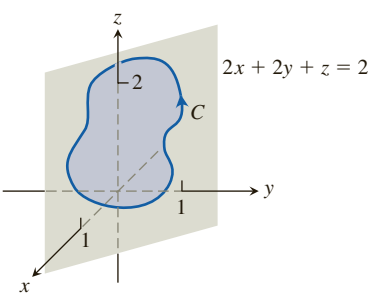
22. Circulación nula Sea $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$. Demuestre que la circulación en el sentido de las manecillas del reloj del campo $\mathbf{F} = \nabla f$, alrededor de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ en el plano xy, es igual a cero,

a) considerando $\mathbf{r} = (a\cos t)\mathbf{i} + (a\,\text{sen}\,t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, e integrando $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ sobre la circunferencia.

b) mediante la aplicación del teorema de Stokes.

23. Sea C una curva suave, cerrada y simple en el plano $2x + 2y + z = 2$, orientada como se indica aquí. Demuestre que

$$\oint_C 2y\,dx + 3z\,dy - x\,dz$$



depende sólo del área de la región encerrada por C y no de la posición o de la forma de C.

24. Demuestre que si $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, entonces, $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

25. Encuentre un campo vectorial con componentes dos veces diferenciables, cuyo rotacional sea $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, o bien, demuestre que no hay tales campos.

26. ¿Dice algo el teorema de Stokes acerca de la circulación en un campo con rotacional nulo? Justifique su respuesta.

27. Sea R una región del plano xy acotada por una curva C cerrada, simple, suave por tramos y suponga que sabe que los momentos de inercia de R con respecto a los ejes x y y son I_x e I_y. Evalúe la integral

$$\oint_C \nabla(r^4) \cdot \mathbf{n}\,ds,$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ en términos de I_x e I_y.

28. Rotacional nulo, aunque el campo es no conservativo Demuestre que el rotacional de

$$\mathbf{F} = \frac{-y}{x^2 + y^2}\,\mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

es igual a cero, pero que

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

es diferente de cero si C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el plano xy. (El teorema 7 no se aplica aquí porque el dominio de $\mathbf{F}$ no es simplemente conexo. El campo $\mathbf{F}$ no está definido a lo largo del eje z, así que no hay forma de contraer a C a un punto sin salir del dominio de $\mathbf{F}$).

16.8 El teorema de la divergencia y una teoría unificada

La forma de divergencia del teorema de Green en el plano establece que el flujo neto hacia fuera de un campo vectorial a través de una curva cerrada simple se calcula integrando la divergencia del campo sobre la región encerrada por la curva. El teorema correspondiente en tres dimensiones se denomina *teorema de la divergencia* y establece que el flujo neto hacia fuera de un campo vectorial a través de una superficie cerrada en el espacio se calcula al integrar la divergencia del campo sobre la región encerrada por la superficie. En esta sección demostraremos el teorema de la divergencia y mostraremos cómo simplifica el cálculo del flujo, que es la integral de campo sobre la superficie orientada cerrada. También deduciremos la ley de Gauss para el flujo en un campo eléctrico y la ecuación de continuidad de la hidrodinámica. Por último, resumiremos los teoremas de integrales vectoriales del capítulo en un solo principio que generalice el teorema fundamental del cálculo.

Divergencia en tres dimensiones

La **divergencia** de un campo vectorial $\mathbf{F} = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$ es la función escalar

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{1}$$

El símbolo "div **F**" se lee "divergencia de **F**" o "div **F**". La notación $\nabla \cdot \mathbf{F}$ se lee "nabla punto **F**".

Div **F** tiene la misma interpretación física en tres y dos dimensiones. Si **F** es el campo de velocidad de un gas que fluye, el valor de div **F** en el punto (x, y, z) es la tasa a la que el gas se comprime o se expande en (x, y, z). La divergencia es el flujo por unidad de volumen o *densidad del flujo* en el punto.

EJEMPLO 1 Los siguientes campos vectoriales representan la velocidad de un gas que fluye en el espacio. Calcule la divergencia de cada campo vectorial e interprete su significado físico. La figura 16.69 presenta los campos vectoriales.

a) Expansión: $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

b) Compresión: $\mathbf{F}(x, y, z) = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$

c) Rotación alrededor del eje z: $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

d) Fragmentación (resultado de cizallar) a lo largo de planos horizontales paralelos: $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{j}$

Solución

a) $\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3$: El gas experimenta una expansión uniforme en todos los puntos.

b) $\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(-x) + \frac{\partial}{\partial y}(-y) + \frac{\partial}{\partial z}(-z) = -3$: El gas experimenta una compresión uniforme en todos los puntos.

c) $\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(-y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) = 0$: El gas no se expande ni se comprime en ningún punto.

d) $\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial y}(z) = 0$: De nuevo, la divergencia es nula en todos los puntos del dominio del campo de velocidad, de manera que el gas no se expande ni se comprime en ningún punto. ■

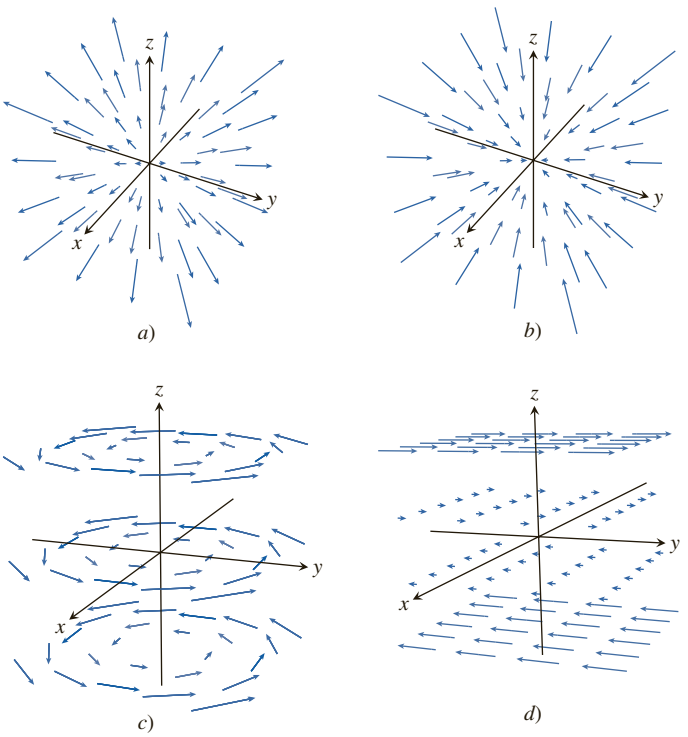


FIGURA 16.69 Campos de velocidad de un gas que fluye en el espacio (ejemplo 1).

Teorema de la divergencia

El teorema de la divergencia afirma que en condiciones adecuadas, el flujo hacia fuera de un campo vectorial a través de una superficie cerrada es igual a la integral triple de la divergencia del campo sobre la región tridimensional encerrada por la superficie.

TEOREMA 8 Teorema de la divergencia Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial cuyas componentes tienen primeras derivadas parciales, y sea S una superficie cerrada, orientada y suave por tramos. El flujo de $\mathbf{F}$ a través de S en la dirección del campo unitario normal exterior $\mathbf{n}$ de la superficie es igual a la triple integral de la divergencia $\nabla \cdot \mathbf{F}$ sobre la región D encerrada por la superficie:

$$\underbrace{\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma}_{\substack{\text{Flujo} \\ \text{hacia fuera}}} = \underbrace{\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV}_{\substack{\text{Integral} \\ \text{de divergencia}}}. \tag{2}$$

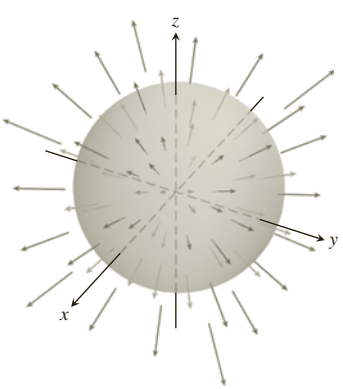


FIGURA 16.70 Un campo vectorial que se expande de manera uniforme y una esfera (ejemplo 2).

EJEMPLO 2 Evalúe ambos lados de la ecuación (2) para el campo vectorial en expansión $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (figura 16.70).

Solución El vector unitario exterior normal a S, calculado a partir del gradiente de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$, es

$$\mathbf{n} = \frac{2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{\sqrt{4(x^2 + y^2 + z^2)}} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{a}. \qquad x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \text{ en } S$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a}\, d\sigma = \frac{a^2}{a}\, d\sigma = a\, d\sigma.$$

Por lo tanto, el flujo saliente es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_S a\, d\sigma = a \iint_S d\sigma = a(4\pi a^2) = 4\pi a^3. \qquad \text{El área de } S \text{ es } 4\pi a^2.$$

Para el lado derecho de la ecuación (2), la divergencia de $\mathbf{F}$ es

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3,$$

de manera que obtenemos la integral de la divergencia

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iiint_D 3\, dV = 3\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) = 4\pi a^3.$$

■

En ciencia aplicada hay muchos campos vectoriales que tienen divergencia cero en todos los puntos. Un ejemplo común es el campo de velocidad de un líquido incompresible en circulación, ya que no se expande ni se contrae. Otros ejemplos incluyen campos vectoriales constantes $\mathbf{F} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, y campos de velocidad para cizallar a lo largo de un plano fijo (vea el ejemplo 1*d*). Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial cuya divergencia es cero en cada punto en la región D, entonces, la integral en el lado derecho de la ecuación (2) es igual a cero. De esta forma, si S es cualquier superficie cerrada en la cual se aplica el teorema de la divergencia, el flujo saliente de $\mathbf{F}$ a través de S es cero. A continuación enunciamos esta importante aplicación del teorema de la divergencia.

COROLARIO El flujo saliente a través de una superficie suave de una superficie cerrada, orientada y suave por tramos S es cero para cualquier campo vectorial $\mathbf{F}$ que tiene divergencia cero en todo punto de la región encerrada por la superficie.

EJEMPLO 3 Determine el flujo de $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ hacia fuera a través de la superficie del cubo cortado del primer octante por los planos $x = 1$, $y = 1$ y $z = 1$.

Solución En vez de calcular el flujo como una suma de seis integrales separadas, una por cada una de las caras del cubo, calculamos el flujo integrando la divergencia

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(xz) = y + z + x$$

sobre el interior del cubo:

$$\text{Flujo} = \underbrace{\iint}_{\substack{\text{Superficie}\\ \text{del cubo}}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \underbrace{\iiint}_{\substack{\text{Interior}\\ \text{del cubo}}} \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV \qquad \text{El teorema de la divergencia}$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x + y + z)\, dx\, dy\, dz = \frac{3}{2}. \qquad \text{Integración de rutina}$$

■

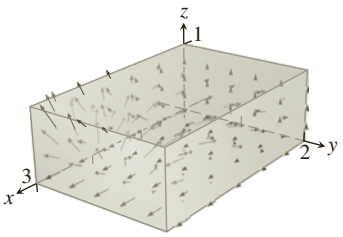


FIGURA 16.71 La integral de div **F** sobre esta región es igual al flujo total a través de las seis caras (ejemplo 4).

EJEMPLO 4

a) Calcule el flujo del campo vectorial

$$\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + 4xyz\,\mathbf{j} + ze^x\mathbf{k}$$

saliendo de la región en forma de caja D: $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 1$. (Vea la figura 16.71).

b) Integre div **F** sobre esta región y demuestre que el resultado tiene el mismo valor que en el inciso *a*), como afirma el teorema de la divergencia.

Solución

a) La región D tiene seis caras. Calculamos el flujo a través de cada lado sucesivamente. Considere la cara superior en el plano $z = 1$, con un vector normal hacia fuera $\mathbf{n} = \mathbf{k}$. El flujo a través de esta cara está dado por $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = ze^x$. Como $z = 1$ en esta cara, el flujo en el punto (x, y, z) en la parte superior es e^x. El flujo total hacia fuera a través de esta cara está dado por la integral de superficie

$$\int_0^2 \int_0^3 e^x\,dx\,dy = 2e^3 - 2. \qquad \text{Integración de rutina}$$

El flujo hacia fuera a través de las otras caras se calcula de forma similar, y los resultados se resumen en la siguiente tabla.

Cara	Vector normal unitario n	$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$	Flujo a través de la cara
$x = 0$	$-\mathbf{i}$	$-x^2 = 0$	0
$x = 3$	$\mathbf{i}$	$x^2 = 9$	18
$y = 0$	$-\mathbf{j}$	$-4xyz = 0$	0
$y = 2$	$\mathbf{j}$	$4xyz = 8xz$	18
$z = 0$	$-\mathbf{k}$	$-ze^x = 0$	0
$z = 1$	$\mathbf{k}$	$ze^x = e^x$	$2e^3 - 2$

El flujo total hacia fuera se obtiene sumando los términos de las seis caras, lo que da

$$18 + 18 + 2e^3 - 2 = 34 + 2e^3.$$

b) Primero calculamos la divergencia de **F**, de lo que se obtiene

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = 2x + 4xz + e^x.$$

La integral de la divergencia de **F** sobre D es

$$\iiint_D \text{div}\,\mathbf{F}\,dV = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 (2x + 4xz + e^x)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 (8 + 18z + e^3)\,dy\,dz$$

$$= \int_0^1 (16 + 36z + 2e^3)\,dz$$

$$= 34 + 2e^3.$$

Como afirma el teorema de la divergencia, la integral de la divergencia sobre D es igual al flujo hacia fuera que pasa a través de la superficie frontera de D. ■

Divergencia y rotacional

Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial en el espacio tridimensional, entonces, el rotacional $\nabla \times \mathbf{F}$ también es un campo vectorial en el espacio tridimensional. Así, podemos calcular la divergencia de $\nabla \times \mathbf{F}$ usando la ecuación (1). El resultado de este cálculo siempre es 0.

TEOREMA 9 Si $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es un campo vectorial con segundas derivadas parciales continuas, entonces,

$$\text{div (rot } \mathbf{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0.$$

Demostración A partir de las definiciones de la divergencia y del rotacional, tenemos que

$$\begin{aligned}\text{div (rot } \mathbf{F}) &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 N}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 M}{\partial z \partial y} \\ &= 0,\end{aligned}$$

ya que las segundas derivadas parciales mixtas se cancelan de acuerdo con el teorema de la derivada mixta de la sección 14.3. ■

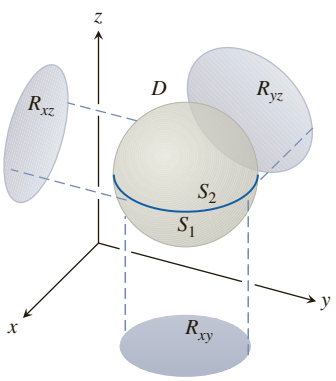


FIGURA 16.72 Demostramos el teorema de la divergencia para el tipo de regiones tridimensionales que se ilustra aquí.

El teorema 9 tiene algunas aplicaciones interesantes. Si un campo vectorial $\mathbf{G} = \text{rot } \mathbf{F}$, entonces, el campo $\mathbf{G}$ debe tener divergencia 0. Dicho de otra forma, si div $\mathbf{G} \neq 0$, entonces, $\mathbf{G}$ no puede ser el rotacional de ningún campo vectorial $\mathbf{F}$ que tenga segundas derivadas parciales continuas. Además, si $\mathbf{G} = \text{rot } \mathbf{F}$, entonces, el flujo hacia fuera de $\mathbf{G}$ que pasa a través de cualquier superficie cerrada S es cero, de acuerdo con el corolario del teorema de la divergencia, siempre que se cumplan las condiciones del teorema. De esta manera, si existe una superficie cerrada para cual la integral de superficie del campo vectorial $\mathbf{G}$ es distinta de cero, podemos concluir que $\mathbf{G}$ *no* es el rotacional de algún campo vectorial $\mathbf{F}$.

Demostración del teorema de divergencia para regiones especiales

Para demostrar el teorema de la divergencia, supongamos que las componentes de $\mathbf{F}$ tienen primeras derivadas parciales continuas. También supongamos que D es una región convexa sin orificios ni burbujas, como una esfera sólida, un cubo o un elipsoide, y que S es una superficie suave por tramos. Además, suponemos que cualquier recta perpendicular al plano xy en un punto interior de la región R_{xy}, que es la proyección de D en el plano xy, interseca a la superficie S en exactamente dos puntos, formando las superficies

$$S_1: \quad z = f_1(x, y), \qquad (x, y) \text{ en } R_{xy}$$
$$S_2: \quad z = f_2(x, y), \qquad (x, y) \text{ en } R_{xy},$$

con $f_1 \leq f_2$. Hacemos suposiciones similares acerca de la proyección de D sobre los otros planos coordenados. Observe la figura 16.72, que ilustra estas suposiciones.

Las componentes del vector unitario normal $\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}$ son los cosenos de los ángulos α, β y γ que $\mathbf{n}$ forma con $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ (figura 16.73). Esto es cierto ya que todos los vectores en cuestión son unitarios, lo que da los *cosenos de dirección*

$$n_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{i} = |\mathbf{n}||\mathbf{i}| \cos \alpha = \cos \alpha$$
$$n_2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} = |\mathbf{n}||\mathbf{j}| \cos \beta = \cos \beta$$
$$n_3 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = |\mathbf{n}||\mathbf{k}| \cos \gamma = \cos \gamma.$$

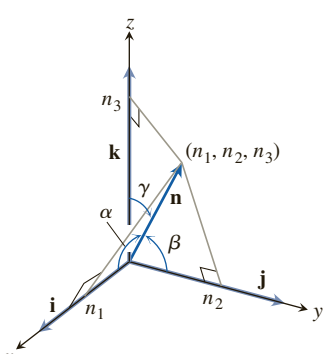


FIGURA 16.73 Las componentes de $\mathbf{n}$ son los cosenos de los ángulos α, β y γ que forma con $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$.

Por lo tanto, el vector unitario normal está dado por

$$\mathbf{n} = (\cos\alpha)\mathbf{i} + (\cos\beta)\mathbf{j} + (\cos\gamma)\mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = M\cos\alpha + N\cos\beta + P\cos\gamma.$$

En forma de componentes, el teorema de la divergencia establece que

$$\iint_S \underbrace{(M\cos\alpha + N\cos\beta + P\cos\gamma)}_{\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}}\, d\sigma = \iiint_D \underbrace{\left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\right)}_{\text{div }\mathbf{F}} dx\, dy\, dz.$$

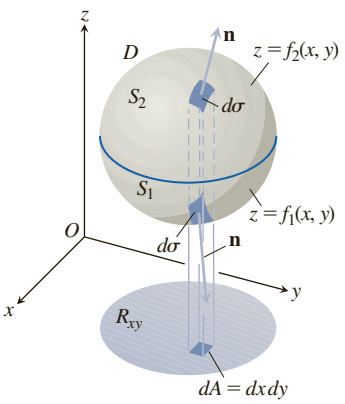


FIGURA 16.74 La región D encerrada por las superficies S_1 y S_2 se proyecta en forma vertical en R_{xy} en el plano xy.

Demostramos el teorema estableciendo las tres siguientes ecuaciones:

$$\iint_S M\cos\alpha\, d\sigma = \iiint_D \frac{\partial M}{\partial x} dx\, dy\, dz \tag{3}$$

$$\iint_S N\cos\beta\, d\sigma = \iiint_D \frac{\partial N}{\partial y} dx\, dy\, dz \tag{4}$$

$$\iint_S P\cos\gamma\, d\sigma = \iiint_D \frac{\partial P}{\partial z} dx\, dy\, dz \tag{5}$$

Demostración de la ecuación (5) Demostraremos la ecuación (5) al convertir la integral de superficie de la izquierda en una integral doble sobre la proyección R_{xy} de D en el plano xy (figura 16.74). La superficie S consta de una parte superior S_2 cuya ecuación es $z = f_2(x, y)$ y una parte inferior S_1 cuya ecuación es $z = f_1(x, y)$. En S_2, el vector normal exterior $\mathbf{n}$ tiene una componente $\mathbf{k}$ positiva y

$$\cos\gamma\, d\sigma = dx\, dy \qquad \text{porque} \qquad d\sigma = \frac{dA}{|\cos\gamma|} = \frac{dx\, dy}{\cos\gamma}.$$

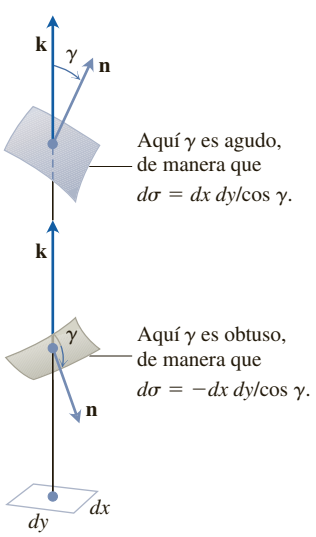


FIGURA 16.75 Una ampliación de las regiones de la figura 16.74. Las relaciones $d\sigma = \pm dx\, dy/\cos\gamma$ se deducen de la ecuación (7) en la sección 16.5 con $F = \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$.

Observe la figura 16.75. En S_1, el vector normal exterior $\mathbf{n}$ tiene una componente $\mathbf{k}$ negativa y

$$\cos\gamma\, d\sigma = -dx\, dy.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\iint_S P\cos\gamma\, d\sigma &= \iint_{S_2} P\cos\gamma\, d\sigma + \iint_{S_1} P\cos\gamma\, d\sigma \\
&= \iint_{R_{xy}} P(x, y, f_2(x, y))\, dx\, dy - \iint_{R_{xy}} P(x, y, f_1(x, y))\, dx\, dy \\
&= \iint_{R_{xy}} \left[P(x, y, f_2(x, y)) - P(x, y, f_1(x, y))\right] dx\, dy \\
&= \iint_{R_{xy}} \left[\int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} \frac{\partial P}{\partial z} dz\right] dx\, dy = \iiint_D \frac{\partial P}{\partial z} dz\, dx\, dy.
\end{aligned}$$

Esto demuestra la ecuación (5). Las demostraciones de las ecuaciones (3) y (4) siguen el mismo patrón; o bien, basta permutar x, y, z; M, N, P; α, β, γ, en orden, y obtener esos resultados a partir de la ecuación (5). Esto demuestra el teorema de la divergencia para estas regiones especiales. ■

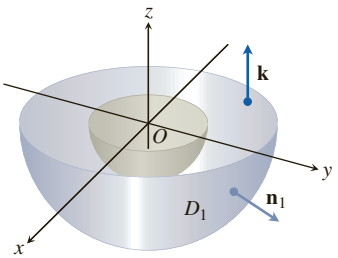


FIGURA 16.76 La mitad inferior de la región sólida entre dos esferas concéntricas.

Teorema de la divergencia para otras regiones

El teorema de la divergencia se extiende a regiones que es posible dividir en un número finito de regiones simples del tipo recién analizado y a regiones que se definen como límites de regiones más simples en cierta manera. Para ejemplificar un paso del proceso de división, suponga que D es la región entre dos esferas concéntricas y que $\mathbf{F}$ tiene componentes continuamente diferenciables en D y en las superficies frontera. Divida D en dos partes mediante un plano ecuatorial y aplique el teorema de la divergencia a cada mitad por separado. La mitad inferior, D_1, se representa en la figura 16.76. La superficie S_1 que acota a D_1 consta de un hemisferio exterior, una base plana en forma de arandela y un hemisferio interior. El teorema de la divergencia afirma que

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_1 \, d\sigma_1 = \iiint_{D_1} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV_1. \tag{6}$$

El vector unitario normal $\mathbf{n}_1$, que apunta hacia fuera desde D_1 y se aleja del origen a lo largo de la superficie exterior, es igual a $\mathbf{k}$ a lo largo de la base plana y apunta hacia el origen a lo largo de la superficie interior. A continuación aplicamos el teorema de la divergencia a D_2, y a su superficie S_2 (figura 16.77):

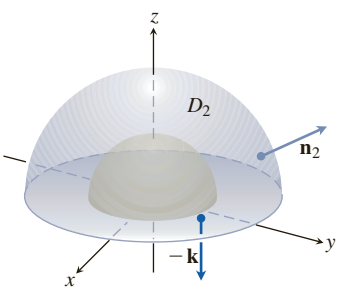


FIGURA 16.77 La mitad superior de la región sólida entre dos esferas concéntricas.

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 \, d\sigma_2 = \iiint_{D_2} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV_2. \tag{7}$$

Si seguimos a $\mathbf{n}_2$ sobre S_2, que apunta hacia fuera de D_2, vemos que $\mathbf{n}_2$ es igual a $-\mathbf{k}$ a lo largo de la base en forma de arandela en el plano xy, apunta alejándose del origen en la esfera exterior y apunta hacia el origen en la esfera interior. Al sumar las ecuaciones (6) y (7), las integrales sobre la superficie plana se cancelan, ya que los signos de $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ son opuestos. Así, llegamos al resultado

$$\iint_{S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iiint_{D} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV,$$

donde D es la región entre las esferas, S es la frontera de D que consta de dos esferas y $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal a S dirigido hacia fuera de D.

EJEMPLO 5 Determine el flujo neto hacia fuera del campo

$$\mathbf{F} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\rho^3}, \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{8}$$

a través de la frontera de la región D: $0 < b^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$ (figura 16.78).

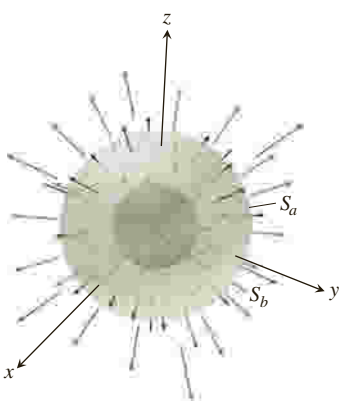


FIGURA 16.78 Dos esferas concéntricas en un campo vectorial en expansión. La esfera exterior es S_a y rodea a la esfera interior S_b.

Solución El flujo se calcula al integrar $\nabla \cdot \mathbf{F}$ sobre D. Observe que $r \neq 0$ en D. Tenemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}(2x) = \frac{x}{\rho}$$

y

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x\rho^{-3}) = \rho^{-3} - 3x\rho^{-4}\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{\rho^3} - \frac{3x^2}{\rho^5}.$$

De manera similar,

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{1}{\rho^3} - \frac{3y^2}{\rho^5} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\rho^3} - \frac{3z^2}{\rho^5}.$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{3}{\rho^3} - \frac{3}{\rho^5}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{3}{\rho^3} - \frac{3\rho^2}{\rho^5} = 0.$$

El flujo neto hacia fuera de $\mathbf{F}$ que sale por la frontera D es cero de acuerdo con el corolario del teorema de la divergencia. Sin embargo, hay mucho más que aprender acerca de este campo vectorial $\mathbf{F}$. El flujo que sale de D a través de la esfera interior S_b es el negativo del flujo que sale de D a través de la esfera exterior S_a (ya que la suma de estos flujos es cero). Así, el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S_b alejándose del origen es igual al flujo de $\mathbf{F}$ a través de S_a alejándose del origen. Entonces, el flujo de $\mathbf{F}$ a través de una esfera con centro en el origen es independiente del radio de la esfera. ¿Cuál es el valor de este flujo?

Para determinarlo, calculamos la integral del flujo de manera directa para una esfera cualquiera S_a. El vector unitario normal hacia fuera sobre la esfera de radio a es

$$\mathbf{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{a}.$$

De aquí que, sobre la esfera,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{a^3} \cdot \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{a} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^4} = \frac{a^2}{a^4} = \frac{1}{a^2}$$

y

$$\iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \frac{1}{a^2} \iint_{S_a} d\sigma = \frac{1}{a^2}(4\pi a^2) = 4\pi.$$

El flujo de $\mathbf{F}$ hacia fuera en la ecuación (8) a través de cualquier esfera con centro en el origen es 4π. Esto no contradice el teorema de la divergencia ya que $\mathbf{F}$ no es continuo en el origen. ■

Ley de Gauss: una de las cuatro grandes leyes de la teoría electromagnética

Todavía hay más que aprender del ejemplo 5. En la teoría electromagnética, el campo eléctrico debido a la carga q de un punto localizado en el origen es

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r}|^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\rho^3},$$

donde ϵ_0 es una constante física, $\mathbf{r}$ es el vector de posición del punto (x, y, z) y $\rho = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. A partir de la ecuación (8),

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\mathbf{F}.$$

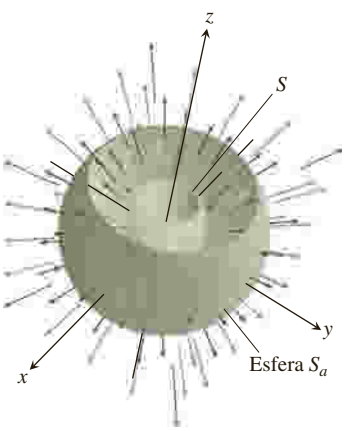


FIGURA 16.79 Una esfera S_a que rodea otra superficie S. Se eliminaron las partes superiores de las superficies para obtener mayor claridad.

Los cálculos del ejemplo 5 indican que el flujo de $\mathbf{E}$ hacia fuera a través de cualquier esfera con centro en el origen es q/ϵ_0, pero este resultado no sólo es válido para esferas. El flujo de $\mathbf{E}$ hacia fuera a través de cualquier superficie cerrada S que encierra al origen (y donde se aplica el teorema de la divergencia) también es q/ϵ_0. Para ver por qué, basta imaginar una esfera grande S_a con centro en el origen y que encierre a la superficie S (figura 16.79). Puesto que

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$$

cuando $\rho > 0$, la integral de $\nabla \cdot \mathbf{E}$ sobre la región D entre S y S_a es cero. Por el teorema de la divergencia,

$$\iint_{\substack{\text{Frontera} \\ \text{de } D}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = 0.$$

Así que el flujo de $\mathbf{E}$ a través de S alejándose del origen debe ser igual al flujo de $\mathbf{E}$ a través de S_a alejándose del origen, que es q/ϵ_0. Esta afirmación, llamada *ley de Gauss*, también se aplica a distribuciones de carga más generales que la presentada aquí, como se podrá constatar casi en cualquier texto de física. Para cualquier superficie cerrada que encierre al origen, tenemos

$$\text{Ley de Gauss: } \iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Ecuación de continuidad de la hidrodinámica

Sea D una región en el espacio, acotada por una superficie orientada cerrada S. Si $\mathbf{v}(x, y, z)$ es el campo de velocidad de un fluido que pasa suavemente a través de D, $\delta = \delta(t, x, y, z)$ es la densidad del fluido en (x, y, z) en el instante t, y $\mathbf{F} = \delta\mathbf{v}$, entonces, la **ecuación de continuidad** de la hidrodinámica establece que

$$\nabla \cdot \mathbf{F} + \frac{\partial \delta}{\partial t} = 0.$$

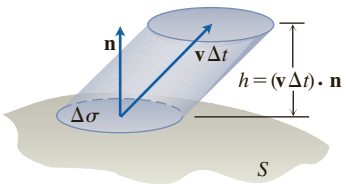


FIGURA 16.80 El fluido que fluye hacia arriba a través de la región $\Delta\sigma$, en un periodo corto de tiempo Δt, llena un "cilindro" cuyo volumen es aproximadamente base × altura = $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, \Delta\sigma\, \Delta t$.

Si las funciones en cuestión tienen primeras derivadas parciales continuas, la ecuación surge de manera natural del teorema de la divergencia, como veremos ahora.

En primer lugar, la integral

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

es la razón con la que la masa sale de D a través de S (se aleja, ya que $\mathbf{n}$ es el vector normal exterior). Para ver por qué, considere un elemento de área $\Delta\sigma$ en la superficie (figura 16.80). En un intervalo corto de tiempo Δt, el volumen ΔV del fluido que pasa por la región es aproximadamente igual al volumen de un cilindro con área de la base igual a $\Delta\sigma$ y altura $(\mathbf{v}\Delta t) \cdot \mathbf{n}$, donde $\mathbf{v}$ es un vector de velocidad anclado en un punto de la región:

$$\Delta V \approx \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, \Delta\sigma\, \Delta t.$$

La masa de este volumen de fluido es aproximadamente

$$\Delta m \approx \delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, \Delta\sigma\, \Delta t,$$

de manera que la razón a la que la masa sale de D a través de la región es

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} \approx \delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, \Delta\sigma.$$

Esto conduce a la aproximación

$$\frac{\sum \Delta m}{\Delta t} \approx \sum \delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, \Delta\sigma$$

como una estimación de la razón promedio con que la masa sale o fluye a través de S. Por último, al considerar que $\Delta\sigma \to 0$ y $\Delta t \to 0$, obtenemos la razón instantánea con la que la masa sale de D a través de S como

$$\frac{dm}{dt} = \iint_S \delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma,$$

que para el caso particular de flujo que consideramos es

$$\frac{dm}{dt} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma.$$

Ahora, sea B una esfera sólida con centro en un punto Q del flujo. El valor promedio de $\nabla \cdot \mathbf{F}$ sobre B es

$$\frac{1}{\text{volumen de } B} \iiint_B \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV.$$

Como consecuencia de la continuidad de la divergencia, $\nabla \cdot \mathbf{F}$ asume este valor en algún punto P en B. Así, por la ecuación (2) del teorema de la divergencia,

$$(\nabla \cdot \mathbf{F})_P = \frac{1}{\text{volumen de } B} \iiint_B \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \frac{\displaystyle\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma}{\text{volumen de } B}$$

$$= \frac{\text{razón con la que la masa sale de } B \text{ atravesando su superficie } S}{\text{volumen de } B} \qquad (9)$$

El último término de la ecuación describe la disminución de la masa por unidad de volumen.

Ahora hacemos que el radio de B tienda a cero mientras el centro Q permanece fijo. El lado izquierdo de la ecuación (9) converge en $(\nabla \cdot \mathbf{F})_Q$, y el lado derecho en $(-\partial\delta/\partial t)_Q$, ya que $\delta = m/V$. La igualdad de estos dos límites es la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -\frac{\partial \delta}{\partial t}.$$

La ecuación de continuidad "explica" $\nabla \cdot \mathbf{F}$: la divergencia de $\mathbf{F}$ en un punto es la razón a la que la densidad del flujo disminuye ahí. El teorema de la divergencia

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$$

indica ahora que la disminución neta en la densidad del fluido en la región D (integral de divergencia) se explica por la masa transportada a través de la superficie S (integral de flujo hacia fuera). Por ello, el teorema es un enunciado acerca de la conservación de la masa (ejercicio 31).

Unificación de los teoremas integrales

Si consideramos un campo bidimensional $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ como un campo de tres dimensiones cuya componente $\mathbf{k}$ es cero, entonces, $\nabla \cdot \mathbf{F} = (\partial M/\partial x) + (\partial N/\partial y)$, por lo que la forma normal del teorema de Green se escribe como

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint_R \nabla \cdot \mathbf{F}\, dA.$$

De manera similar, $\nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = (\partial N/\partial x) - (\partial M/\partial y)$, por lo que la forma tangencial del teorema de Green se escribe como

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint_R \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\, dA.$$

Con las ecuaciones del teorema de Green escritas en notación nabla, podemos ver su relación con las ecuaciones del teorema de Stokes y del teorema de la divergencia; a continuación se presenta un resumen.

Teorema de Green y su generalización a tres dimensiones

Forma tangencial del teorema de Green: $\displaystyle\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_R \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\, dA$

Teorema de Stokes: $\displaystyle\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$

Forma normal del teorema de Green: $\displaystyle\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_R \nabla \cdot \mathbf{F}\, dA$

Teorema de la divergencia: $\displaystyle\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$

Observe cómo el teorema de Stokes generaliza la forma tangencial (rotacional) del teorema de Green, desde una superficie en el plano hasta una superficie en el espacio tridimensional. En cada caso, la integral de superficie del rotacional de $\mathbf{F}$ sobre el interior de la superficie orientada es igual a la circulación de $\mathbf{F}$ alrededor de la frontera.

De manera similar, el teorema de la divergencia generaliza la forma normal (de flujo) del teorema de Green, de una región bidimensional en el plano a una región tridimensional en el espacio. En cada caso, la integral de $\nabla \cdot \mathbf{F}$ sobre el interior de la región es igual al flujo total del campo a través de la frontera que encierra a la región.

FIGURA 16.81 Los vectores normales unitarios exteriores en la frontera de $[a, b]$ en un espacio unidimensional.

Todavía hay más que aprender. Podemos considerar todos estos resultados como formas de un *teorema único fundamental.* Piense otra vez en el teorema fundamental del cálculo de la sección 5.4. Éste nos dice que si $f(x)$ es diferenciable en (a, b) y es continua en $[a, b]$, entonces,

$$\int_a^b \frac{df}{dx}dx = f(b) - f(a).$$

Si $\mathbf{F} = f(x)\mathbf{i}$ a través de $[a, b]$, entonces, $(df/dx) = \nabla \cdot \mathbf{F}$. Si establecemos que el campo vectorial unitario $\mathbf{n}$ normal a la frontera de $[a, b]$ es $\mathbf{i}$ en b y $-\mathbf{i}$ en a (figura 16.81), entonces,

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= f(b)\mathbf{i} \cdot (\mathbf{i}) + f(a)\mathbf{i} \cdot (-\mathbf{i}) \\ &= \mathbf{F}(b) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{F}(a) \cdot \mathbf{n} \\ &= \text{flujo saliente total de } \mathbf{F} \text{ a través de la frontera } [a, b]. \end{aligned}$$

Ahora el teorema fundamental nos indica que

$$\mathbf{F}(b) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{F}(a) \cdot \mathbf{n} = \int_{[a,\,b]} \nabla \cdot \mathbf{F}\, dx.$$

El teorema fundamental del cálculo, la forma normal del teorema de Green y el teorema de la divergencia nos dicen que la integral del operador diferencial $\nabla \cdot$ que opera en un campo $\mathbf{F}$ sobre una región es igual a la suma de las componentes del campo normal sobre la frontera de la región. (Aquí interpretamos la integral de línea del teorema de Green y la integral de superficie del teorema de la divergencia como "sumas" sobre la frontera).

El teorema de Stokes y la forma tangencial del teorema de Green afirman que, cuando los elementos están orientados de forma adecuada, la integral de superficie del operador diferencial $\nabla \times$ que opera en un campo es igual a la suma de las componentes del campo tangencial sobre la frontera de la superficie.

La belleza de estas interpretaciones obedece a un solo principio de unificación que establece lo siguiente.

Teorema fundamental unificador del cálculo integral vectorial

La integral de un operador diferencial que actúa en un campo sobre una región es igual a la suma de las componentes del campo adecuadas para el operador sobre la frontera de la región.

Ejercicios 16.8

Cálculo de la divergencia

En los ejercicios 1 a 4, determine la divergencia del campo.

1. El campo giratorio de la figura 16.12
2. El campo radial de la figura 16.11
3. El campo gravitacional de la figura 16.8 y el ejercicio 38*a*) de la sección 16.3
4. El campo de velocidad de la figura 16.13

Uso del teorema de la divergencia para calcular el flujo

En los ejercicios 5 a 16, utilice el teorema de la divergencia para encontrar el flujo de $\mathbf{F}$ hacia fuera y a través de la frontera de la región D.

5. **Cubo** $\mathbf{F} = (y - x)\mathbf{i} + (z - y)\mathbf{j} + (y - x)\mathbf{k}$

   D: El cubo acotado por los planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ y $z = \pm 1$

6. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

   ***a*) Cubo** D: El cubo del primer octante cortado por los planos $x = 1$, $y = 1$ y $z = 1$

   ***b*) Cubo** D: El cubo acotado por los planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ y $z = \pm 1$

   ***c*) Lata cilíndrica** D: La región del cilindro sólido $x^2 + y^2 \le 4$ cortada por los planos $z = 0$ y $z = 1$

7. **Cilindro y paraboloide** $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - z\mathbf{k}$

   D: La región dentro del cilindro sólido $x^2 + y^2 \le 4$ entre el plano $z = 0$ y el paraboloide $z = x^2 + y^2$

8. **Esfera** $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$

   D: La esfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$

9. **Porción de la esfera** $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j} + 3xz\mathbf{k}$

   D: La región cortada del primer octante por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

10. **Lata cilíndrica** $\mathbf{F} = (6x^2 + 2xy)\mathbf{i} + (2y + x^2z)\mathbf{j} + 4x^2y^3\mathbf{k}$

    D: La región cortada del primer octante por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el plano $z = 3$

11. Cuña $\mathbf{F} = 2xz\mathbf{i} - xy\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$

D: La cuña cortada del primer octante por el plano $y + z = 4$ y el cilindro elíptico $4x^2 + y^2 = 16$

12. Esfera $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$

D: La esfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$

13. Corteza esférica $\mathbf{F} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$

D: La región $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 2$

14. Corteza esférica $\mathbf{F} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

D: La región $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 4$

15. Corteza esférica $\mathbf{F} = (5x^3 + 12xy^2)\mathbf{i} + (y^3 + e^y \operatorname{sen} z)\mathbf{j} + (5z^3 + e^y \cos z)\mathbf{k}$

D: La región sólida entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2$

16. Corteza cilíndrica $\mathbf{F} = \ln(x^2 + y^2)\mathbf{i} - \left(\frac{2z}{x}\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)\mathbf{j} + z\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathbf{k}$

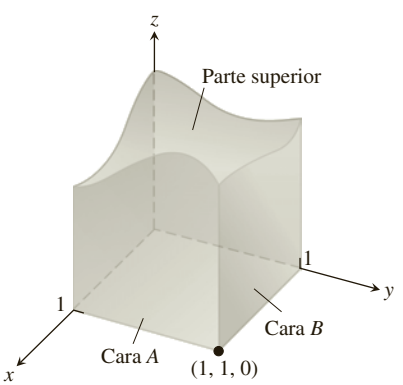
D: El cilindro de pared gruesa $1 \le x^2 + y^2 \le 2$, $-1 \le z \le 2$

Teoría y ejemplos

17. ***a***) Demuestre que el flujo del campo vectorial de posición $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ hacia fuera a través de una superficie S cerrada y suave es el triple del volumen de la región encerrada por la superficie.

b) Sea $\mathbf{n}$ el campo vectorial unitario normal hacia fuera en S. Demuestre que $\mathbf{F}$ no puede ser ortogonal a $\mathbf{n}$ en cada punto de S.

18. La base de la superficie cúbica cerrada representada aquí es el cuadrado unitario en el plano xy. Los cuatro lados están en los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ y $y = 1$. La parte superior es una superficie suave arbitraria cuya identidad se desconoce. Sea $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + (z + 3)\mathbf{k}$ y suponga que el flujo de $\mathbf{F}$ hacia fuera a través del lado A es 1, y a través del lado B es -3. ¿Podría concluir algo acerca del flujo hacia fuera a través de la parte superior? Justifique su respuesta.



19. Sea $\mathbf{F} = (y \cos 2x)\mathbf{i} + (y^2 \operatorname{sen} 2x)\mathbf{j} + (x^2y + z)\mathbf{k}$. ¿Hay un campo vectorial $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$? Explique su respuesta.

20. Flujo de un campo gradiente hacia fuera Sea S la superficie de la parte de la esfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$ que se encuentra en el primer octante y sea $f(x, y, z) = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Calcule

$$\iint_S \nabla f \cdot \mathbf{n}\, d\sigma.$$

($\nabla f \cdot \mathbf{n}$ es la derivada de f en la dirección del vector normal $\mathbf{n}$ hacia fuera).

21. Sea $\mathbf{F}$ un campo cuyas componentes tienen primeras derivadas parciales continuas en una porción del espacio que contiene una región D acotada por una superficie S cerrada y suave. Si $|\mathbf{F}| \le 1$, ¿se puede acotar el tamaño de

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV?$$

Justifique su respuesta.

22. Flujo máximo Entre todos los sólidos rectangulares definidos por las desigualdades $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le 1$, encuentre aquél para el que el flujo total de $\mathbf{F} = (-x^2 - 4xy)\mathbf{i} - 6yz\mathbf{j} + 12z\mathbf{k}$ hacia fuera a través de las seis caras sea máximo. ¿Cuál *es* el flujo máximo?

23. Calcule el flujo neto saliente del campo vectorial

$$\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + (\operatorname{sen} xz + y^2)\mathbf{j} + (e^{xy^2} + x)\mathbf{k}$$

sobre la superficie S que rodea la región D acotada por los planos $y = 0$, $z = 0$, $z = 2 - y$ y el cilindro parabólico $z = 1 - x^2$.

24. Calcule el flujo neto saliente del campo vectorial $\mathbf{F} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$ a través del elipsoide $9x^2 + 4y^2 + 6z^2 = 36$.

25. Sean $\mathbf{F}$ un campo vectorial diferenciable y $g(x, y, z)$ una función escalar diferenciable. Verifique las siguientes identidades.

a) $\nabla \cdot (g\mathbf{F}) = g\nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla g \cdot \mathbf{F}$

b) $\nabla \times (g\mathbf{F}) = g\nabla \times \mathbf{F} + \nabla g \times \mathbf{F}$

26. Sean $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ campos vectoriales diferenciables, y sean a y b constantes arbitrarias reales. Verifique las siguientes identidades.

a) $\nabla \cdot (a\mathbf{F}_1 + b\mathbf{F}_2) = a\nabla \cdot \mathbf{F}_1 + b\nabla \cdot \mathbf{F}_2$

b) $\nabla \times (a\mathbf{F}_1 + b\mathbf{F}_2) = a\nabla \times \mathbf{F}_1 + b\nabla \times \mathbf{F}_2$

c) $\nabla \cdot (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) = \mathbf{F}_2 \cdot \nabla \times \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{F}_2$

27. Si $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es un campo vectorial diferenciable, definimos la notación $\mathbf{F} \cdot \nabla =$ como

$$M\frac{\partial}{\partial x} + N\frac{\partial}{\partial y} + P\frac{\partial}{\partial z}.$$

Para campos vectoriales diferenciables $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$, verifique las siguientes identidades.

a) $\nabla \times (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) = (\mathbf{F}_2 \cdot \nabla)\mathbf{F}_1 - (\mathbf{F}_1 \cdot \nabla)\mathbf{F}_2 + (\nabla \cdot \mathbf{F}_2)\mathbf{F}_1 - (\nabla \cdot \mathbf{F}_1)\mathbf{F}_2$

b) $\nabla(\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2) = (\mathbf{F}_1 \cdot \nabla)\mathbf{F}_2 + (\mathbf{F}_2 \cdot \nabla)\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_1 \times (\nabla \times \mathbf{F}_2) + \mathbf{F}_2 \times (\nabla \times \mathbf{F}_1)$

28. Funciones armónicas Una función $f(x, y, z)$ es *armónica* en una región D en el espacio si satisface la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

en todo D.

a) Suponga que f es armónica en una región acotada D encerrada por una superficie suave S y que $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal en S elegido. Demuestre que la integral sobre S de $\nabla f \cdot \mathbf{n}$, la derivada de f en la dirección de $\mathbf{n}$, es igual a cero.

b) Demuestre que si f es armónica en D, entonces,

$$\iint_S f\,\nabla f \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_D |\nabla f|^2\, dV.$$

29. Primera fórmula de Green Suponga que f y g son funciones escalares con derivadas parciales de primero y segundo órdenes, continuas en una región D acotada por una superficie S cerrada y suave por tramos. Demuestre que

$$\iint_S f\,\nabla g \cdot \mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_D (f\,\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\,dV. \qquad (10)$$

La ecuación (10) es la **primera fórmula de Green**. (*Sugerencia:* Aplique el teorema de divergencia al campo $\mathbf{F} = f\nabla g$).

30. Segunda fórmula de Green (*continuación del ejercicio 29*). Intercambie f y g en la ecuación (10) para encontrar una fórmula similar. Luego, reste esta fórmula de la ecuación (10) para demostrar que

$$\iint_S (f\,\nabla g - g\nabla f) \cdot \mathbf{n}\,d\sigma = \iiint_D (f\,\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dV. \qquad (11)$$

Esta ecuación es la **segunda fórmula de Green**.

31. Conservación de la masa Sea $\mathbf{v}(t, x, y, z)$ un campo vectorial continuamente diferenciable en la región D en el espacio, y sea $p(t, x, y, z)$ una función escalar continuamente diferenciable. La variable t representa el tiempo en el dominio. La ley de conservación de la masa asegura que

$$\frac{d}{dt}\iiint_D p(t, x, y, z)\,dV = -\iint_S p\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\,d\sigma,$$

donde S es la superficie que encierra a D.

a) Dé una interpretación física de la ley de la conservación de la masa si $\mathbf{v}$ es un campo de velocidades de un fluido y p representa la densidad del fluido en el punto (x, y, z) en el instante t.

b) Utilice el teorema de la divergencia y la regla de Leibniz,

$$\frac{d}{dt}\iiint_D p(t, x, y, z)\,dV = \iiint_D \frac{\partial p}{\partial t}\,dV,$$

para demostrar que la ley de la conservación de la masa es equivalente a la ecuación de continuidad,

$$\nabla \cdot p\mathbf{v} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0.$$

(En el primer término, $\nabla \cdot p\mathbf{v}$, la variable t se mantiene fija, y en el segundo término, $\partial\pi/\partial t$, se supone que el punto (x, y, z) en D se mantiene fijo).

32. La ecuación de difusión del calor Sea $T(t, x, y, z)$ una función con segundas derivadas continuas que da la temperatura en el instante t en el punto (x, y, z) de un sólido que ocupa una región D en el espacio. Si la capacidad de calor del sólido y la densidad de masa se denotan con las constantes c y ρ, respectivamente, la cantidad de $c\rho T$ es la **energía de calor por unidad de volumen** del sólido.

a) Explique por qué $-\nabla T$ apunta en la dirección del flujo de calor.

b) Sea $-k\nabla T$ el **vector de flujo de energía**. (La constante k se denomina **conductividad**). Suponiendo la ley de conservación de la masa con $-k\nabla T = \mathbf{v}$ y $c\rho T = p$ del ejercicio 31, deduzca la fórmula de difusión (del calor)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K\nabla^2 T,$$

donde $K = k/(c\rho) > 0$ es la constante de *difusividad*. [Observe que si $T(t, x)$ representa la temperatura en el instante t en la posición x de una varilla de conducción uniforme con sus lados aislados perfectamente, entonces, $\nabla^2 T = \partial^2 T/\partial x^2$ y la ecuación de difusión se reduce a la ecuación unidimensional del calor de la que se habla en los ejercicios adicionales del capítulo 14].

Capítulo 16 Preguntas de repaso

1. ¿Qué son las integrales de línea de las funciones escalares? ¿Cómo se evalúan? Dé ejemplos.

2. ¿Cómo se utilizan las integrales de línea para encontrar los centros de masa de los resortes o alambres? Explique.

3. ¿Qué es un campo vectorial? ¿Qué es la integral de línea de un campo vectorial? ¿Qué es un campo gradiente? Dé ejemplos.

4. ¿Qué es el flujo de un campo vectorial a lo largo de una curva? ¿Cómo se calcula el trabajo realizado por un campo vectorial al mover un objeto a lo largo de una curva? ¿Cómo se calcula el trabajo realizado? Dé un ejemplo.

5. ¿Cuál es el teorema fundamental de las integrales de línea? Explique cómo se relaciona con el teorema fundamental del cálculo.

6. Especifique tres propiedades especiales acerca de los campos conservativos. ¿Cómo se puede saber si un campo es conservativo?

7. ¿Qué tienen de especial los campos que son independientes de la trayectoria?

8. ¿Qué es una función potencial? Dé un ejemplo de cómo encontrar una función potencial para un campo conservativo.

9. ¿Qué es una forma diferencial? ¿Qué significa que esta forma sea exacta? ¿Cómo se puede probar la exactitud? Dé ejemplos.

10. ¿Qué afirma el teorema de Green? Analice cómo las dos formas del teorema de Green amplían el teorema del cambio neto en el capítulo 5.

11. ¿Cómo se calcula el área de una superficie parametrizada en el espacio? ¿Y la de una superficie $F(x, y, z) = 0$ definida implícitamente? ¿Y la de una superficie cuya gráfica es $z = f(x, y)$? Dé ejemplos.

12. ¿Cómo se integra una función escalar sobre una superficie parametrizada? ¿Y sobre superficies que están definidas de manera implícita o explícita? Dé ejemplos.

13. ¿Qué es una superficie orientada? ¿Cuál es la integral de superficie de un campo vectorial en el espacio tridimensional a través de una superficie orientada? ¿Cómo se relaciona con el flujo neto hacia fuera del campo? Dé ejemplos.

14. ¿Qué es el rotacional de un campo vectorial? ¿Cómo se interpreta?

15. ¿Cuál es el teorema de Stokes? Explique cómo generaliza al teorema de Green en tres dimensiones.

16. ¿Qué es la divergencia de un campo vectorial? ¿Cómo se interpreta?

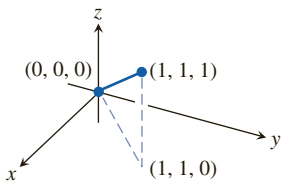
17. ¿Cuál es el teorema de la divergencia? Explique cómo generaliza al teorema de Green en tres dimensiones.

18. ¿Cómo se relacionan los teoremas de Green, Stokes y de la divergencia con el teorema fundamental del cálculo para integrales ordinarias simples?

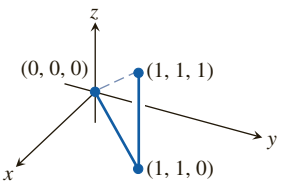
Capítulo 16 Ejercicios de práctica

Evaluación de integrales de línea

1. La siguiente figura muestra dos trayectorias poligonales en el espacio que unen el origen con el punto (1, 1, 1). Integre $f(x, y, z) = 2x - 3y^2 - 2z + 3$ sobre cada trayectoria.

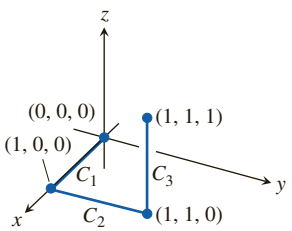


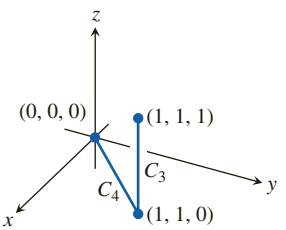
Trayectoria 1

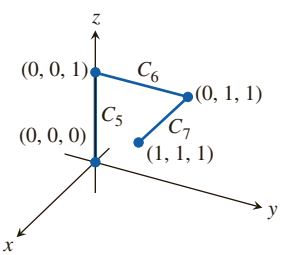


Trayectoria 2

2. La siguiente figura muestra tres trayectorias poligonales que unen el origen con el punto (1, 1, 1). Integre $f(x, y, z) = x^2 + y - z$ sobre cada trayectoria.







3. Integre $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2}$ sobre la circunferencia

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t)\mathbf{j} + (a \operatorname{sen} t)\mathbf{k}, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

4. Integre $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2}$ sobre la curva involuta

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t - t \cos t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le \sqrt{3}.$$

Evalúe las integrales de los ejercicios 5 y 6.

5. $\displaystyle\int_{(-1,1,1)}^{(4,-3,0)} \frac{dx + dy + dz}{\sqrt{x + y + z}}$ **6.** $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(10,3,3)} dx - \sqrt{\frac{z}{y}}\,dy - \sqrt{\frac{y}{z}}\,dz$

7. Integre $\mathbf{F} = -(y \operatorname{sen} z)\mathbf{i} + (x \operatorname{sen} z)\mathbf{j} + (xy \cos z)\mathbf{k}$ alrededor del círculo cortado de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ por el plano $z = -1$, en el sentido de las manecillas del reloj, visto desde arriba.

8. Integre $\mathbf{F} = 3x^2y\mathbf{i} + (x^3 + 1)\mathbf{j} + 9z^2\mathbf{k}$ alrededor del círculo cortado de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ por el plano $x = 2$.

Evalúe las integrales de los ejercicios 9 y 10.

9. $\displaystyle\int_C 8x \operatorname{sen} y\,dx - 8y \cos x\,dy$

C es el cuadrado cortado en el primer cuadrante por las rectas $x = \pi/2$ y $y = \pi/2$.

10. $\displaystyle\int_C y^2\,dx + x^2\,dy$

C es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.

Determinación y evaluación de integrales de superficie

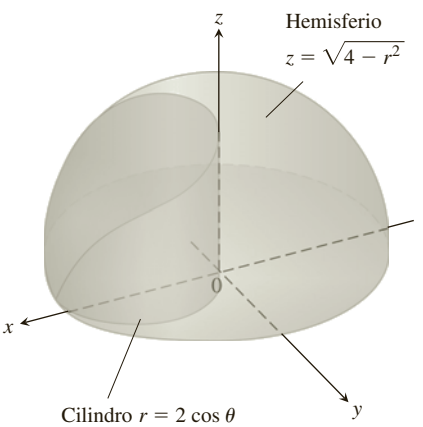
11. Área de una región elíptica Determine el área de una región elíptica cortada del plano $x + y + z = 1$ por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

12. Área de un casquete parabólico Determine el área del casquete cortado del paraboloide $y^2 + z^2 = 3x$ por el plano $x = 1$.

13. Área de un casquete esférico Determine el área del casquete cortado de la parte superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ por el plano $z = \sqrt{2}/2$.

14. ***a*) Hemisferio cortado por un cilindro** Determine el área de la superficie cortada del hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \ge 0$, por el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

***b*)** Determine el área de la porción del cilindro que se encuentra dentro del hemisferio. (*Sugerencia:* Proyecte sobre el plano xz. O evalúe la integral $\int h\,ds$, donde h es la altura del cilindro y ds es el elemento de longitud de arco en la circunferencia $x^2 + y^2 = 2x$ en el plano xy).



15. Área de un triángulo Determine el área del triángulo en el que el plano $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$ $(a, b, c > 0)$ corta al primer octante. Verifique su respuesta con un cálculo vectorial adecuado.

16. Cilindro parabólico cortado por planos Integre

***a*)** $g(x, y, z) = \dfrac{yz}{\sqrt{4y^2 + 1}}$ ***b*)** $g(x, y, z) = \dfrac{z}{\sqrt{4y^2 + 1}}$

sobre la superficie cortada del cilindro parabólico $y^2 - z = 1$ por los planos $x = 0$, $x = 3$ y $z = 0$.

17. Cilindro circular cortado por planos Integre $g(x, y, z) = x^4y(y^2 + z^2)$ sobre la parte del cilindro $y^2 + z^2 = 25$ que se encuentra en el primer octante, entre los planos $x = 0$ y $x = 1$ y sobre el plano $z = 3$.

18. Área de Wyoming El estado de Wyoming está acotado por los meridianos 111°3′ y 104°3′ longitud oeste y por los paralelos 41° y 45° latitud norte. Suponiendo que la Tierra es una esfera de radio $R = 3959$ millas, determine el área de Wyoming.

Superficies parametrizadas

Determine las parametrizaciones de las superficies de los ejercicios 19 a 24. (Hay muchas formas de hacerlo, por lo que quizá sus respuestas difieran de las que aparecen al final del libro).

19. Banda esférica La porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ entre los planos $z = -3$ y $z = 3\sqrt{3}$

20. Casquete parabólico La porción del paraboloide $z = -(x^2 + y^2)/2$ encima del plano $z = -2$

21. Cono El cono $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \le 3$

22. Plano sobre un cuadrado La porción del plano $4x + 2y + 4z = 12$ que se encuentra sobre el cuadrado $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$ en el primer cuadrante

23. Porción de un paraboloide La porción del paraboloide $y = 2(x^2 + z^2)$, $y \le 2$, que se encuentra sobre el plano xy

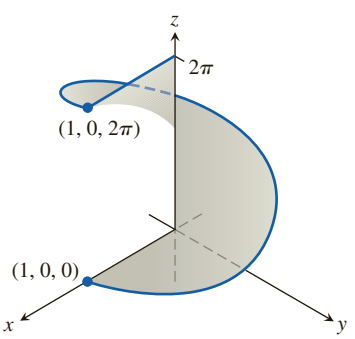
24. Porción de un hemisferio La porción del hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 10$, $y \ge 0$, en el primer octante

25. Área de una superficie Determine el área de la superficie

$$\mathbf{r}(u, v) = (u + v)\mathbf{i} + (u - v)\mathbf{j} + v\mathbf{k},$$
$$0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1.$$

26. Integral de superficie Integre $f(x, y, z) = xy - z^2$ sobre la superficie del ejercicio 25.

27. Área de un helicoide Determine el área de la superficie del helicoide $\mathbf{r}(r, \theta) = (r \cos \theta)\mathbf{i} + (r \operatorname{sen} \theta)\mathbf{j} + \theta\mathbf{k}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le 1$, de la siguiente figura.



28. Integral de superficie Evalúe la integral $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\, d\sigma$, donde S es el helicoide del ejercicio 27.

Campos conservativos

¿Cuáles de los campos de los ejercicios 29 a 32 son conservativos, y cuáles no lo son?

29. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

30. $\mathbf{F} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$

31. $\mathbf{F} = xe^y\mathbf{i} + ye^z\mathbf{j} + ze^x\mathbf{k}$

32. $\mathbf{F} = (\mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k})/(x + yz)$

Determine funciones potenciales para los campos de los ejercicios 33 y 34.

33. $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + (2y + z)\mathbf{j} + (y + 1)\mathbf{k}$

34. $\mathbf{F} = (z \cos xz)\mathbf{i} + e^y\mathbf{j} + (x \cos xz)\mathbf{k}$

Trabajo y circulación

En los ejercicios 35 y 36, determine el trabajo realizado por cada campo a lo largo de las trayectorias de (0, 0, 0) a (1, 1, 1) del ejercicio 1.

35. $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + \mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ **36.** $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

37. Cálculo del trabajo en dos formas Determine el trabajo realizado por

$$\mathbf{F} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

sobre la curva plana $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \operatorname{sen} t)\mathbf{j}$ del punto (1, 0) al punto $(e^{2\pi}, 0)$, de dos maneras distintas:

a) Utilizando la parametrización de la curva para evaluar la integral de trabajo.

b) Mediante la evaluación de una función potencial para $\mathbf{F}$.

38. Flujo a lo largo de trayectorias diferentes Determine el flujo del campo $\mathbf{F} = \nabla(x^2ze^y)$

a) una vez alrededor de la elipse C donde el plano $x + y + z = 1$ corta al cilindro $x^2 + z^2 = 25$, en el sentido de las manecillas del reloj, visto desde el semieje positivo y.

b) a lo largo de la frontera curva del helicoide del ejercicio 27 desde (1, 0, 0) hasta $(1, 0, 2\pi)$.

En los ejercicios 39 y 40, utilice la integral del rotacional del teorema de Stokes para encontrar la circulación del campo $\mathbf{F}$ alrededor de la curva C, en la dirección indicada.

39. Circulación alrededor de una elipse $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} - y\mathbf{j} + 3z^2\mathbf{k}$

C: La elipse donde el plano $2x + 6y - 3z = 6$ corta al cilindro $x^2 + y^2 = 1$, en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, viendo desde arriba

40. Circulación alrededor de un círculo $\mathbf{F} = (x^2 + y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + (4y^2 - z)\mathbf{k}$

C: El círculo donde el plano $z = -y$ corta a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, en el sentido contrario al de las manecillas del reloj viendo desde arriba

Masa y momentos

41. Alambre con diferentes densidades Determine la masa de un alambre delgado que se encuentra a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2t}\mathbf{i} + \sqrt{2t}\mathbf{j} + (4 - t^2)\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$, si la densidad en t es ***a)*** $\delta = 3t$ y ***b)*** $\delta = 1$.

42. Alambre con densidad variable Determine el centro de masa de un alambre delgado que se encuentra a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (2/3)t^{3/2}\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2$, si la densidad en $\delta = 3\sqrt{5} + t$.

43. Alambre con densidad variable Determine el centro de masa y los momentos de inercia, con respecto a los ejes de coordenadas, de un alambre delgado que se encuentra a lo largo de la curva

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\mathbf{j} + \frac{t^2}{2}\mathbf{k}, \qquad 0 \le t \le 2,$$

si la densidad en t es $\delta = 1/(t + 1)$.

44. Centro de masa de un arco Un delgado arco de metal se encuentra a lo largo de la semicircunferencia $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ en el plano xy. La densidad en el punto (x, y) del arco es $\delta(x, y) = 2a - y$. Determine el centro de masa.

45. Alambre con densidad constante Un alambre con densidad constante $\delta = 1$ se encuentra a lo largo de la curva $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \operatorname{sen} t)\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$, $0 \le t \le \ln 2$. Determine $\bar{z}$ e I_z.

46. Alambre helicoidal con densidad constante Encuentre la masa y el centro de masa de un alambre de densidad constante δ que se encuentra a lo largo de la hélice $\mathbf{r}(t) = (2 \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (2 \cos t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$.

47. Inercia y centro de masa de una carcasa Determine I_z y el centro de masa de una carcasa delgada de densidad $\delta(x, y, z) = z$ cortada de la porción superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ por el plano $z = 3$.

48. Momento de inercia de un cubo Determine, con respecto al eje z, el momento de inercia de la superficie del cubo cortado del primer octante por los planos $x = 1$, $y = 1$ y $z = 1$ si la densidad es $\delta = 1$.

Flujo a través de una curva plana o una superficie

Utilice al teorema de Green para determinar la circulación en el sentido contrario al de las manecillas del reloj y el flujo hacia fuera de los campos y las curvas de los ejercicios 49 y 50.

49. Cuadrado $\mathbf{F} = (2xy + x)\mathbf{i} + (xy - y)\mathbf{j}$

C: El cuadrado acotado por $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ y $y = 1$

50. Triángulo $\mathbf{F} = (y - 6x^2)\mathbf{i} + (x + y^2)\mathbf{j}$

C: El triángulo formado por las rectas $y = 0$, $y = x$ y $x = 1$

51. Integral de línea nula Demuestre que

$$\oint_C \ln x \operatorname{sen} y\, dy - \frac{\cos y}{x} dx = 0$$

para cualquier curva cerrada C a la que pueda aplicarse el teorema de Green.

52. ***a*) Flujo hacia fuera y área** Demuestre que el flujo hacia fuera del campo vectorial de posición $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ a través de cualquier curva cerrada a la que pueda aplicarse el teorema de Green es el doble del área de la región encerrada por la curva.

***b*)** Sea $\mathbf{n}$ el vector unitario hacia fuera normal a una curva cerrada a la que puede aplicarse el teorema de Green. Demuestre que no es posible que $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ sea ortogonal a $\mathbf{n}$ en todo punto de C.

En los ejercicios 53 a 56, determine el flujo hacia fuera de $\mathbf{F}$ a través de la frontera de D.

53. Cubo $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$

D: El cubo cortado en el primer octante por los planos $x = 1$, $y = 1$ y $z = 1$

54. Casquete esférico $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + \mathbf{k}$

D: Toda la superficie del casquete superior cortado de la esfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \le 25$ por el plano $z = 3$

55. Casquete esférico $\mathbf{F} = -2x\mathbf{i} - 3y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

D: La región superior cortada de la esfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \le 2$ por el paraboloide $z = x^2 + y^2$

56. Cono y cilindro $\mathbf{F} = (6x + y)\mathbf{i} - (x + z)\mathbf{j} + 4yz\mathbf{k}$

D: La región en el primer octante acotada por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos coordenados.

57. Hemisferio, cilindro y plano Sea S la superficie acotada en el lado izquierdo por el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y \le 0$, en la mitad por el cilindro $x^2 + z^2 = a^2$, $0 \le y \le a$, y en el lado derecho por el plano $y = a$. Determine el flujo hacia fuera de $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ a través de S.

58. Cilindro y planos Determine el flujo hacia fuera del campo $\mathbf{F} = 3xz^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z^3\mathbf{k}$ a través de la superficie del sólido del primer octante acotado por el cilindro $x^2 + 4y^2 = 16$ y los planos $y = 2z$, $x = 0$ y $z = 0$.

59. Lata cilíndrica Utilice el teorema de la divergencia para determinar el flujo hacia fuera de $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ a través de la superficie de la región encerrada por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $z = 1$ y $z = -1$.

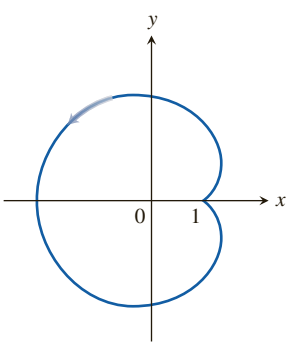
60. Hemisferio Encuentre el flujo hacia arriba de $\mathbf{F} = (3z + 1)\mathbf{k}$ a través del hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \ge 0$ ***a)*** con el teorema de la divergencia y ***b)*** por la evaluación de la integral del flujo de manera directa.

Capítulo 16 Ejercicios adicionales y avanzados

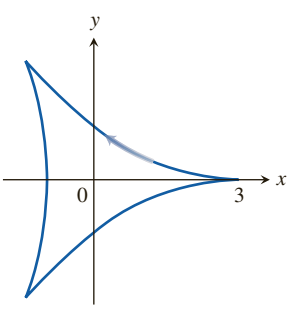
Cálculo de áreas con el teorema de Green

Utilice la fórmula del área del teorema de Green de los ejercicios de la sección 16.4 para calcular las áreas de las regiones encerradas por las curvas de los ejercicios 1 a 4.

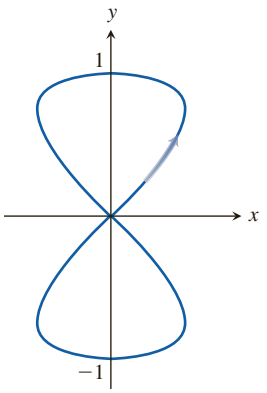
1. El limaçon $x = 2\cos t - \cos 2t$, $y = 2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t$, $0 \le t \le 2\pi$



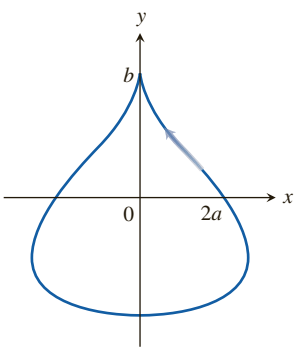
2. La deltoide $x = 2\cos t + \cos 2t$, $y = 2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t$, $0 \le t \le 2\pi$



3. La curva en forma de ocho $x = (1/2)\operatorname{sen} 2t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le \pi$ (un lazo)



4. La curva en forma de lágrima $x = 2a\cos t - a\operatorname{sen} 2t$, $y = b\operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$



Teoría y aplicaciones

5. ***a***) Dé un ejemplo de un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ con valor $\mathbf{0}$ en un solo punto, de manera que el rotacional de $\mathbf{F}$ sea distinto de cero en todas partes. Asegúrese de identificar el punto y de calcular el rotacional.

b) Dé un ejemplo de un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ con valor $\mathbf{0}$ en exactamente una recta, de manera que el rotacional de $\mathbf{F}$ sea distinto de cero en todas partes. Asegúrese de identificar la recta y de calcular el rotacional.

c) Dé un ejemplo de un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ con valor $\mathbf{0}$ en una superficie, de manera que el rotacional de $\mathbf{F}$ sea distinto de cero en todas partes. Asegúrese de identificar la superficie y de calcular el rotacional.

6. Encuentre todos los puntos (a, b, c) de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ donde el campo vectorial $\mathbf{F} = yz^2\mathbf{i} + xz^2\mathbf{j} + 2xyz\mathbf{k}$ sea normal a la superficie y $\mathbf{F}(a, b, c) \neq \mathbf{0}$.

7. Calcule la masa de una carcasa esférica de radio R tal que en cada punto (x, y, z) de la superficie, la densidad de masa $\delta(x, y, z)$ sea su distancia a algún punto fijo (a, b, c) de la superficie.

8. Determine la masa de un helicoide

$$\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j} + \theta\mathbf{k},$$

$0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$, si la función de densidad es $\delta(x, y, z) = z\sqrt{x^2 + z^2}$. Vea la figura del ejercicio de práctica 27.

9. Entre todas las regiones rectangulares $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, determine aquélla para la cual el flujo total de $\mathbf{F} = (x^2 + 4xy)\mathbf{i} - 6y\mathbf{j}$ hacia fuera a través de sus cuatro lados sea la menor. ¿Cuál *es* el flujo menor?

10. Determine una ecuación para el plano que pasa por el origen tal que la circulación del campo de flujo $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ alrededor de la circunferencia de intersección del plano con la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ sea máxima.

11. Una cuerda se encuentra a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ desde (2, 0) a (0, 2) en el primer cuadrante. La densidad de la cuerda es $\rho(x, y) = xy$.

a) Divida la cuerda en un número finito de subarcos con la finalidad de demostrar que el trabajo realizado por la gravedad para hacer coincidir la cuerda con el eje x está dado por

$$\text{Trabajo} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} g\, x_k y_k{}^2 \Delta s_k = \int_C g\, xy^2\, ds,$$

donde g es la constante gravitacional.

b) Determine el trabajo total realizado, evaluando la integral de línea del inciso *a*).

c) Demuestre que el trabajo total realizado es igual al trabajo requerido para mover el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ de la cuerda directamente hacia abajo, hasta el eje x.

12. Una hoja delgada se encuentra a lo largo de la porción del plano $x + y + z = 1$ en el primer octante; la densidad de la hoja es $\delta(x, y, z) = xy$.

a) Divida la hoja en un número finito de partes con la finalidad de demostrar que el trabajo realizado por la gravedad para mover la lámina y llevarla al plano xy está dado por

$$\text{Trabajo} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} g\, x_k y_k z_k\, \Delta\sigma_k = \iint_S g\, xyz\, d\sigma,$$

donde g es la constante gravitacional.

b) Determine el trabajo total realizado evaluando la integral de superficie del inciso *a*).

c) Demuestre que el trabajo total realizado es igual al trabajo requerido para mover el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de la hoja hacia abajo hasta el plano xy.

13. Principio de Arquímedes Si un objeto, como una pelota, se coloca en un líquido, es posible que se hunda hasta el fondo, flote o se sumerja a cierta profundidad y permanezca suspendido en el líquido. Suponga que un fluido tiene una densidad de peso constante w y que la superficie del fluido coincide con el plano $z = 4$. Una pelota esférica permanece suspendida en el fluido y ocupa la región $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \le 1$.

a) Demuestre que la integral de superficie que da la magnitud de la fuerza total sobre la pelota, debida a la presión del fluido, es

$$\text{Fuerza} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} w(4 - z_k)\, \Delta\sigma_k = \iint_S w(4 - z)\, d\sigma.$$

b) Como la pelota no se mueve, está suspendida por la fuerza de flotación del líquido. Demuestre que la magnitud de la fuerza de flotación sobre la esfera es

$$\text{Fuerza de flotación} = \iint_S w(z - 4)\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma,$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal exterior en (x, y, z). Esto ilustra el principio de Arquímedes: la magnitud de la fuerza de flotación que se ejerce sobre un sólido sumergido es igual al peso del fluido desplazado.

c) Utilice el teorema de la divergencia para determinar la magnitud de la fuerza de flotación del inciso *b*).

14. Fuerza del fluido en una superficie curva Un cono con la forma de la superficie $z = \sqrt{x^2 + z^2}$, $0 \le z \le 2$, se llena con un líquido de densidad de peso constante w. Suponga que el plano xy está a nivel del suelo, y demuestre que la fuerza total sobre la porción del cono desde $z = 1$ hasta $z = 2$ debida a la presión del líquido está dada por la integral de superficie.

$$F = \iint_S w(2 - z)\, d\sigma.$$

Evalúe la integral.

15. Ley de Faraday Si $\mathbf{E}(t, x, y, z)$ y $\mathbf{B}(t, x, y, z)$ representan los campos eléctrico y magnético en el punto (x, y, z) en el instante t, un principio básico de la teoría electromagnética afirma que $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$. En esta expresión, $\nabla \times \mathbf{E}$ se calcula con t fijo, y $\partial\mathbf{B}/\partial t$ se calcula con (x, y, z) fijo. Utilice el teorema de Stokes para deducir la ley de Faraday

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma,$$

donde C representa un lazo de alambre por el que fluye corriente en el sentido contrario al de las manecillas del reloj con respecto al vector unitario $\mathbf{n}$ normal a la superficie, generando el voltaje

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

alrededor de C. La integral de superficie del lado derecho de la ecuación se llama *flujo magnético*, y S es cualquier superficie orientada con frontera C.

16. Sea

$$\mathbf{F} = -\frac{GmM}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}$$

el campo de fuerza gravitacional definido para $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$. Utilice la ley de Gauss de la sección 16.8 para demostrar que no existe un campo vectorial continuamente diferenciable $\mathbf{H}$ que satisfaga $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{H}$.

17. Si $f(x, y, z)$ y $g(x, y, z)$ son funciones escalares continuamente diferenciables definidas sobre la superficie orientada S con curva frontera C, demuestre que

$$\iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \oint_C f\, \nabla g \cdot d\mathbf{r}.$$

18. Suponga que $\nabla \cdot \mathbf{F}_1 = \nabla \cdot \mathbf{F}_2$ y $\nabla \times \mathbf{F}_1 = \nabla \times \mathbf{F}_2$ sobre una región D encerrada por la superficie orientada S con vector unitario normal hacia fuera $\mathbf{n}$; suponga también que $\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{n}$ en S. Demuestre que $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2$ en D.

19. Demuestre o refute que si $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ y $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces, $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

20. Sea S una superficie orientada parametrizada por $\mathbf{r}(u, v)$. Defina la notación $d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{r}_u du \times \mathbf{r}_v dv$ de manera que $d\boldsymbol{\sigma}$ sea un vector normal a la superficie. Además, la magnitud $d\boldsymbol{\sigma} = |d\boldsymbol{\sigma}|$ es el elemento de área de la superficie (de acuerdo con la ecuación 5 de la sección 16.5). Deduzca la identidad

$$d\sigma = (EG - F^2)^{1/2}\, du\, dv$$

donde

$$E = |\mathbf{r}_u|^2, \quad F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v \quad \text{y} \quad G = |\mathbf{r}_v|^2.$$

21. Demuestre que el volumen V de una región D en el espacio encerrada por la superficie orientada S con vector normal hacia fuera $\mathbf{n}$ satisface la identidad

$$V = \frac{1}{3} \iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma,$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición del punto (x, y, z) en D.

Capítulo 16 Proyectos de aplicación tecnológica

Módulos Mathematica/Maple:

Trabajo en campos de fuerza conservativos y no conservativos
Explore la integración sobre campos vectoriales y experimente con funciones de fuerza conservativa y no conservativa a lo largo de diferentes trayectorias en el campo.

¿Cómo puede visualizarse el teorema de Green?
Explore la integración sobre campos vectoriales y utilice parametrizaciones para calcular integrales de línea. Se exploran ambas formas del teorema de Green.

Visualizar e interpretar el teorema de la divergencia
Verifique el teorema de la divergencia formulando y evaluando ciertas divergencias e integrales de superficie.

17 Ecuaciones diferenciales de segundo orden

INTRODUCCIÓN En este capítulo ampliaremos nuestro estudio sobre las ecuaciones diferenciales de segundo orden, las cuales se presentan en muchas aplicaciones de las ciencias y la ingeniería. Por ejemplo, se aplican en el estudio de resortes y circuitos eléctricos. En este capítulo usted aprenderá cómo resolver estas ecuaciones utilizando varios métodos.

17.1 Ecuaciones lineales de segundo orden

Una ecuación de la forma

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x), \tag{1}$$

es lineal en y y sus derivadas, y se le conoce como **ecuación diferencial lineal de segundo orden**. Suponemos que P, Q, R y G son continuas en algún intervalo abierto I. Si $G(x)$ es igual a cero en I, se dice que la ecuación es **homogénea**; de lo contrario, es **no homogénea**. Por lo tanto, la forma de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden es

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0. \tag{2}$$

También se supone que $P(x)$ nunca es cero para cualquier $x \in I$.

Dos resultados fundamentales son importantes en la solución de la ecuación (2). El primero de éstos dice que si conocemos dos soluciones y_1 y y_2 de la ecuación lineal homogénea, entonces, cualquier **combinación lineal** $y = c_1y_1 + c_2y_2$ también es una solución para constantes c_1 y c_2 cualesquiera.

TEOREMA 1 Principio de superposición Si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea (2), entonces, para constantes c_1 y c_2 cualesquiera, la función

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

también es una solución de la ecuación (2).

Demostración Al sustituir y en la ecuación (2),

$$\begin{aligned} &P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y \\ &\quad = P(x)(c_1y_1 + c_2y_2)'' + Q(x)(c_1y_1 + c_2y_2)' + R(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &\quad = P(x)(c_1y_1'' + c_2y_2'') + Q(x)(c_1y_1' + c_2y_2') + R(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &\quad = \underbrace{c_1(P(x)y_1'' + Q(x)y_1' + R(x)y_1)}_{= 0,\ y_1 \text{ es una solución}} + \underbrace{c_2(P(x)y_2'' + Q(x)y_2' + R(x)y_2)}_{= 0,\ y_2 \text{ es una solución}} \\ &\quad = c_1(0) + c_2(0) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $y = c_1y_1 + c_2y_2$ es una solución de la ecuación (2). ■

Del teorema 1 se desprenden de inmediato las siguientes consecuencias relacionadas con la solución de la ecuación lineal homogénea.

1. Una suma de dos soluciones $y_1 + y_2$ de la ecuación (2) también es una solución. (Se elige $c_1 = c_2 = 1$).
2. Un múltiplo constante ky_1 de cualquier solución y_1 de la ecuación (2) también es una solución. (Se elige $c_1 = k$ y $c_2 = 0$).
3. La **solución trivial** $y(x) = 0$ siempre es una solución de la ecuación lineal homogénea. (Se elige $c_1 = c_2 = 0$).

El segundo resultado fundamental relacionado con las soluciones de la ecuación lineal homogénea tiene que ver con su **solución general**, es decir, una solución que contiene todas las soluciones. Esta consecuencia nos dice que hay dos soluciones y_1 y y_2 tales que cualquier solución es una combinación lineal de ellas para valores adecuados de las constantes c_1 y c_2. Sin embargo, no cualquier par de soluciones tiene esta propiedad. Las soluciones deben ser **linealmente independientes**, lo cual significa que ni y_1 ni y_2 son un múltiplo constante una de la otra. Por ejemplo, las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = xe^x$ son linealmente independientes; mientras que $f(x) = x^2$ y $g(x) = 7x^2$ no lo son (ya que son linealmente dependientes). Los resultados sobre independencia lineal y el siguiente teorema son materia de cursos más avanzados.

TEOREMA 2 Si P, Q y R son continuas en el intervalo abierto I, y $P(x)$ nunca es igual a cero en I, entonces, la ecuación diferencial lineal homogénea (2) tiene dos soluciones en I linealmente independientes, y_1 y y_2. Aún más, si y_1 y y_2 son dos soluciones cualesquiera linealmente independientes de la ecuación (2), la solución general está dada por

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

Ahora pondremos atención a la obtención de dos soluciones linealmente independientes para un caso especial de la ecuación (2), donde P, Q y R son funciones constantes.

Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Suponga que deseamos resolver la ecuación diferencial homogénea de segundo orden

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{3}$$

donde a, b y c son constantes. Para resolver la ecuación (3), buscamos una función que multiplicada por una constante y sumada a un múltiplo de su primera derivada más un múltiplo de su segunda derivada sume exactamente cero. Una función que se comporta de este modo es la función exponencial $y = e^{rx}$, cuando r es una constante. Derivando dos veces esta función exponencial nos da $y' = re^{rx}$ y $y'' = r^2e^{rx}$, las cuales son múltiplos constantes de la exponencial original. Si sustituimos $y = e^{rx}$ en la ecuación (3),

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0.$$

Como la función exponencial nunca es cero, dividimos esta última ecuación entre e^{rx}. Por lo tanto, $y = e^{rx}$ es una solución de la ecuación (3), si y sólo si r es una solución de la ecuación algebraica

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{4}$$

La ecuación (4) se conoce como **ecuación característica** de la ecuación diferencial $ay'' + by' + cy = 0$. La ecuación característica es una ecuación cuadrática con las raíces

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Hay tres casos a considerar, los cuales dependen del valor del discriminante $b^2 - 4ac$.

Caso 1: $b^2 - 4ac > 0$. En este caso, la ecuación característica tiene dos soluciones reales diferentes r_1 y r_2. Entonces, $y_1 = e^{r_1 x}$ y $y_2 = e^{r_2 x}$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (3) porque $e^{r_2 x}$ no es un múltiplo constante de $e^{r_1 x}$ (vea el ejercicio 61). Del teorema 2 concluimos lo siguiente.

TEOREMA 3 Si r_1 y r_2 son dos raíces reales y diferentes de la ecuación característica $ar^2 + br + c = 0$, entonces,

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

es la solución general de $ay'' + by' + cy = 0$.

EJEMPLO 1 Determine la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - y' - 6y = 0.$$

Solución La sustitución de $y = e^{rx}$ en la ecuación diferencial nos da la ecuación característica

$$r^2 - r - 6 = 0,$$

que se factoriza como

$$(r - 3)(r + 2) = 0.$$

Las raíces son $r_1 = 3$ y $r_1 = -2$. Por lo tanto, la solución general es

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}.$$ ■

Caso 2: $b^2 - 4ac = 0$. En este caso, $r_1 = r_2 = -b/2a$. Para simplificar la notación, sea $r = -b/2a$. Entonces, tenemos la solución $y_1 = e^{rx}$ con $2ar + b = 0$. Como la multiplicación de e^{rx} por una constante no produce una segunda solución linealmente independiente, en vez de eso tratamos de multiplicarla por una *función*. La función más simple sería $u(x) = x$, así que veamos si $y_2 = xe^{rx}$ es también una solución. Al sustituir y_2 en la ecuación diferencial tenemos

$$\begin{aligned} ay_2'' + by_2' + cy_2 &= a(2re^{rx} + r^2 xe^{rx}) + b(e^{rx} + rxe^{rx}) + cxe^{rx} \\ &= (2ar + b)e^{rx} + (ar^2 + br + c)xe^{rx} \\ &= 0(e^{rx}) + (0)xe^{rx} = 0. \end{aligned}$$

El primer término es cero porque $r = -b/2a$; el segundo término es cero porque r resuelve la ecuación característica. La funciones $y_1 = e^{rx}$ y $y_2 = xe^{rx}$ son linealmente independientes (vea el ejercicio 62). Del teorema 2 concluimos el siguiente resultado.

TEOREMA 4 Si r es la única raíz real (repetida) de la ecuación característica $ar^2 + br + c = 0$, entonces,

$$y = c_1 e^{rx} + c_2 xe^{rx}$$

es la solución general de $ay'' + by' + cy = 0$.

EJEMPLO 2 Obtenga la solución general de

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Solución La ecuación característica es

$$r^2 + 4r + 4 = 0,$$

que se factoriza como

$$(r + 2)^2 = 0.$$

Por lo tanto, $r = -2$ es una raíz doble. De esta manera, la solución general es

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}.$$ ■

Caso 3: $b^2 - 4ac < 0$. En este caso, la ecuación característica tiene dos raíces complejas $r_1 = \alpha + i\beta$ y $r_2 = \alpha - i\beta$, donde α y β son números reales e $i^2 = -1$. (Estos números reales son $\alpha = -b/2a$ y $\beta = \sqrt{4ac - b^2}/2a$). Estas dos raíces complejas dan lugar a dos soluciones linealmente independientes

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x) \qquad \text{y} \qquad y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \operatorname{sen} \beta x).$$

(Las expresiones con términos de seno y coseno provienen de la identidad de Euler de la sección 9.9). Sin embargo, las soluciones y_1 y y_2 son *valores complejos* en vez de valores reales. No obstante, por el principio de superposición (teorema 1), obtenemos de ellos dos soluciones con valores reales

$$y_3 = \frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{2} y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x \qquad \text{y} \qquad y_4 = \frac{1}{2i} y_1 - \frac{1}{2i} y_2 = e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x.$$

Las funciones y_3 y y_4 son linealmente independientes (vea el ejercicio 63). Del teorema 2 concluimos el siguiente resultado.

TEOREMA 5 Si $r_1 = \alpha + i\beta$ y $r_2 = \alpha - i\beta$ son dos raíces complejas de la ecuación característica $ar^2 + br + c = 0$, entonces,

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x)$$

es la solución general de $ay'' + by' + cy = 0$.

EJEMPLO 3 Determine la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

Solución La ecuación característica es

$$r^2 - 4r + 5 = 0.$$

Las raíces son el par de números complejos $r = (4 \pm \sqrt{16 - 20})/2$ o $r_1 = 2 + i$ y $r_2 = 2 - i$. Por lo tanto, $\alpha = 2$ y $\beta = 1$ dan la solución general

$$y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x).$$ ■

Problemas de valor inicial y valor frontera

Para obtener una solución única de una ecuación diferencial lineal de primer orden, fue suficiente especificar el valor de la solución en un punto específico. Puesto que la solución general de una ecuación diferencial de segundo orden tiene dos constantes arbitrarias, es necesario especificar dos condiciones. Una manera de hacerlo es especificar el valor de la función solución y el valor de su derivada en un punto específico: $y(x_0) = y_0$ y $y'(x_0) = y_1$. Estas condiciones se llaman **condiciones iniciales**. El siguiente resultado se demuestra en textos más avanzados y garantiza la existencia de una solución única para problemas de valor inicial lineal de segundo orden tanto homogéneos como no homogéneos.

TEOREMA 6 Si P, Q, R y G son continuas en un intervalo abierto I, entonces, existe una y solo una función $y(x)$ que satisface tanto la ecuación diferencial

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$$

en el intervalo I, como las condiciones iniciales

$$y(x_0) = y_0 \qquad \text{y} \qquad y'(x_0) = y_1$$

en un punto específico $x_0 \in I$.

Es importante darse cuenta de que es posible asignar valores reales cualesquiera a y_0 y y_1 y el teorema 6 se cumple. A continuación se incluye un problema de valor inicial para una ecuación homogénea.

EJEMPLO 4 Encuentre la solución particular para el problema de valor inicial

$$y'' - 2y' + y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = -1.$$

Solución La ecuación característica es

$$r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0.$$

La raíz real es $r = 1$ de multiplicidad 2 y nos da la solución general

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x.$$

De esta forma,

$$y' = c_1 e^x + c_2(x+1)e^x.$$

A partir de las condiciones iniciales tenemos

$$1 = c_1 + c_2 \cdot 0 \qquad \text{y} \qquad -1 = c_1 + c_2 \cdot 1.$$

Por lo tanto, $c_1 = 1$ y $c_2 = -2$. La solución única que satisface la condición inicial es

$$y = e^x - 2xe^x.$$

La curva solución se muestra en la figura 17.1. ■

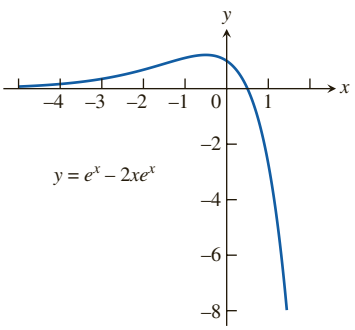


FIGURA 17.1 Curva solución particular del ejemplo 4.

Otro enfoque para determinar el valor de las dos constantes arbitrarias en la solución general de una ecuación diferencial de segundo orden es especificar los valores de la función solución en dos *puntos diferentes* del intervalo I. Es decir, resolvemos la ecuación diferencial en cuestión para los **valores frontera**

$$y(x_1) = y_1 \qquad \text{y} \qquad y(x_2) = y_2,$$

donde x_1 y x_2 pertenecen a I. De nuevo, los valores de y_1 y y_2 pueden ser números reales cualesquiera. La ecuación diferencial, junto con los valores frontera, se conoce como **problema con valores de frontera**. A diferencia de lo establecido en el teorema 6, los problemas con valores de frontera no siempre tienen una solución, o es posible que haya más de una solución (vea el ejercicio 65). Estos problemas se estudian en textos más avanzados, pero aquí se presenta un ejemplo para el cual hay una solución única.

EJEMPLO 5 Resuelva el problema con valores de frontera

$$y'' + 4y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1.$$

Solución La ecuación característica es $r^2 + 4 = 0$, la cual tiene las raíces complejas $r = \pm 2i$. La solución general de la ecuación diferencial es

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x.$$

Las condiciones de frontera se satisfacen si

$$y(0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0$$
$$y\left(\frac{\pi}{12}\right) = c_1 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1.$$

Se deduce que $c_1 = 0$ y $c_2 = 2$. La solución del problema con valores de frontera es

$$y = 2 \operatorname{sen} 2x.$$ ■

Ejercicios 17.1

En los ejercicios 1 a 30, obtenga la solución general de la ecuación dada.

1. $y'' - y' - 12y = 0$
2. $3y'' - y' = 0$
3. $y'' + 3y' - 4y = 0$
4. $y'' - 9y = 0$
5. $y'' - 4y = 0$
6. $y'' - 64y = 0$
7. $2y'' - y' - 3y = 0$
8. $9y'' - y = 0$
9. $8y'' - 10y' - 3y = 0$
10. $3y'' - 20y' + 12y = 0$
11. $y'' + 9y = 0$
12. $y'' + 4y' + 5y = 0$
13. $y'' + 25y = 0$
14. $y'' + y = 0$
15. $y'' - 2y' + 5y = 0$
16. $y'' + 16y = 0$
17. $y'' + 2y' + 4y = 0$
18. $y'' - 2y' + 3y = 0$
19. $y'' + 4y' + 9y = 0$
20. $4y'' - 4y' + 13y = 0$
21. $y'' = 0$
22. $y'' + 8y' + 16y = 0$
23. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$
24. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6\dfrac{dy}{dx} + 9y = 0$
25. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + 9y = 0$
26. $4\dfrac{d^2y}{dx^2} - 12\dfrac{dy}{dx} + 9y = 0$
27. $4\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + y = 0$
28. $4\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + y = 0$
29. $9\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + y = 0$
30. $9\dfrac{d^2y}{dx^2} - 12\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$

En los ejercicios 31 a 40, obtenga la única solución del problema con valor inicial de segundo orden.

31. $y'' + 6y' + 5y = 0, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 3$
32. $y'' + 16y = 0, \quad y(0) = 2, \; y'(0) = -2$
33. $y'' + 12y = 0, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1$
34. $12y'' + 5y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = -1$
35. $y'' + 8y = 0, \quad y(0) = -1, \; y'(0) = 2$
36. $y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1$
37. $y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0$
38. $4y'' - 4y' + y = 0, \quad y(0) = 4, \; y'(0) = 4$
39. $4\dfrac{d^2y}{dx^2} + 12\dfrac{dy}{dx} + 9y = 0, \quad y(0) = 2, \; \dfrac{dy}{dx}(0) = 1$
40. $9\dfrac{d^2y}{dx^2} - 12\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0, \quad y(0) = -1, \; \dfrac{dy}{dx}(0) = 1$

En los ejercicios 41 a 55, obtenga la solución integral.

41. $y'' - 2y' - 3y = 0$
42. $6y'' - y' - y = 0$
43. $4y'' + 4y' + y = 0$
44. $9y'' + 12y' + 4y = 0$
45. $4y'' + 20y = 0$
46. $y'' + 2y' + 2y = 0$
47. $25y'' + 10y' + y = 0$
48. $6y'' + 13y' - 5y = 0$
49. $4y'' + 4y' + 5y = 0$
50. $y'' + 4y' + 6y = 0$
51. $16y'' - 24y' + 9y = 0$
52. $6y'' - 5y' - 6y = 0$
53. $9y'' + 24y' + 16y = 0$
54. $4y'' + 16y' + 52y = 0$
55. $6y'' - 5y' - 4y = 0$

En los ejercicios 56 a 60, resuelva el problema de valor inicial.

56. $y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 2$
57. $y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 1$
58. $4y'' - 4y' + y = 0, \quad y(0) = -1, \; y'(0) = 2$
59. $3y'' + y' - 14y = 0, \quad y(0) = 2, \; y'(0) = -1$
60. $4y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(\pi) = 1, \; y'(\pi) = 0$

61. Demuestre que las dos funciones solución del teorema 3 son linealmente independientes.

62. Demuestre que las dos funciones solución del teorema 4 son linealmente independientes.

63. Demuestre que las dos funciones solución del teorema 5 son linealmente independientes.

64. Demuestre que si y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea (2), entonces las funciones $y_3 = y_1 + y_2$ y $y_4 = y_1 - y_2$ también son soluciones linealmente independientes.

65. ***a)*** Demuestre que no hay una solución para el problema del valor a la frontera

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 1.$$

b) Demuestre que hay un número infinito de soluciones para el problema con valores de frontera

$$y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

66. Demuestre que si a, b y c son constantes positivas, entonces todas las soluciones de la ecuación diferencial homogénea

$$ay'' + by' + cy = 0$$

tienden a cero cuando $x \longrightarrow \infty$.

17.2 Ecuaciones lineales no homogéneas

En esta sección estudiaremos dos métodos para resolver ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes. Estos métodos son el de *coeficientes indeterminados* y el de *variación de parámetros*. Iniciaremos considerando la forma de la solución general.

Forma de la solución general

Suponga que deseamos resolver la ecuación no homogénea

$$ay'' + by' + cy = G(x), \tag{1}$$

donde a, b y c son constantes, y G es continua sobre algún intervalo abierto I. Sea $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$ la solución general de la **ecuación diferencial homogénea** asociada

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{2}$$

(Aprendimos cómo encontrar y_c en la sección 17.1). Ahora suponga que de alguna manera se obtiene una función particular y_p que resuelve la ecuación no homogénea (1). Entonces la suma

$$y = y_c + y_p \tag{3}$$

también resuelve la ecuación no homogénea (1) puesto que

$$\begin{aligned} a(y_c + y_p)'' + b(y_c + y_p)' + c(y_c + y_p) &= (ay_c'' + by_c' + cy_c) + (ay_p'' + by_p' + cy_p) \\ &= 0 + G(x) \quad \text{y_c resuelve la ecuación (2) y y_p resuelve la ecuación (1)} \\ &= G(x). \end{aligned}$$

Aún más, si $y(x)$ es la solución general de la ecuación no homogénea (1), debe tener la forma de la ecuación (3). La razón de este último enunciado se deduce de la observación de que para que cualquier función y_p que satisfaga la ecuación (1), tenemos

$$\begin{aligned} a(y - y_p)'' + b(y - y_p)' + c(y - y_p) &= (ay'' + by' + cy) - (ay_p'' + by_p' + cy_p) \\ &= G(x) - G(x) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $y_c = y - y_p$ es la solución general de la ecuación homogénea (2). Hemos llegado al siguiente teorema.

TEOREMA 7 La solución general $y = y(x)$ de la ecuación diferencial no homogénea (1) tiene la forma

$$y = y_c + y_p,$$

donde la **solución** y_c es la solución general de la ecuación homogénea asociada (2), y y_p es cualquier **solución particular** de la ecuación no homogénea (1).

Método de los coeficientes indeterminados

Este método para obtener una solución particular y_p de la ecuación no homogénea (1) se aplica a casos especiales donde $G(x)$ es la suma de los términos de varios polinomios $p(x)$ multiplicados por un exponencial y con posibles factores de senos o cosenos. Es decir, $G(x)$ es la suma de términos como los siguientes:

$$p_1(x)e^{rx}, \qquad p_2(x)e^{\alpha x}\cos \beta x, \qquad p_3(x)e^{\alpha x}\operatorname{sen} \beta x.$$

Por ejemplo, $1 - x$, e^{2x}, xe^x, $\cos x$ y $5e^x - \operatorname{sen} 2x$ representan funciones de esta clase. (Son funciones que, en esencia, resuelven ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coe-

ficientes constantes, pero las ecuaciones pueden tener un orden mayor de dos). En seguida presentamos varios ejemplos que ilustran este método.

EJEMPLO 1 Resuelva la ecuación no homogénea $y'' - 2y' - 3y = 1 - x^2$.

Solución La ecuación característica de la ecuación homogénea $y'' - 2y' - 3y = 0$ es

$$r^2 - 2r - 3 = (r + 1)(r - 3) = 0.$$

Sus raíces $r = -1$ y $r = 3$ dan la solución de la homogénea

$$y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}.$$

Ahora, $G(x) = 1 - x^2$ es un polinomio de segundo grado. Sería razonable suponer que una solución particular para la ecuación no homogénea es también un polinomio de segundo grado, porque si y es un polinomio de segundo grado, entonces, $y'' - 2y' - 3y$ también es un polinomio de segundo grado. Así que buscamos una solución particular de la forma

$$y_p = Ax^2 + Bx + C.$$

Necesitamos determinar los coeficientes desconocidos A, B y C. Cuando se sustituye el polinomio y_p y sus derivadas en la ecuación no homogénea dada,

$$2A - 2(2Ax + B) - 3(Ax^2 + Bx + C) = 1 - x^2$$

al agrupar los términos de acuerdo con las potencias de x,

$$-3Ax^2 + (-4A - 3B)x + (2A - 2B - 3C) = 1 - x^2.$$

Esta última ecuación se cumple para todos los valores de x si sus dos lados son polinomios idénticos de segundo grado. Así, igualamos los coeficientes de las potencias correspondientes de x para obtener

$$-3A = -1, \qquad -4A - 3B = 0 \qquad \text{y} \qquad 2A - 2B - 3C = 1.$$

Estas ecuaciones implican a la vez que $A = 1 \cdot 3$, $B = -4 \cdot 9$ y $C = 5 \cdot 27$. Al sustituir estos valores en la expresión cuadrática de la solución particular, tenemos

$$y_p = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{5}{27}.$$

Por el teorema 7, la solución general de la ecuación no homogénea es

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{5}{27}.$$ ■

EJEMPLO 2 Obtenga una solución particular para $y'' - y' = 2 \operatorname{sen} x$.

Solución Si intentamos encontrar una solución particular de la forma

$$y_p = A \operatorname{sen} x$$

y sustituimos las derivadas de y_p en la ecuación dada, encontramos que A debe satisfacer la ecuación

$$-A \operatorname{sen} x + A \cos x = 2 \operatorname{sen} x$$

para todos los valores de x. Como esto requiere que A sea igual a -2 y a 0 al mismo tiempo, concluimos que la ecuación diferencial no homogénea no tiene una solución de la forma $A \operatorname{sen} x$.

Esto implica la posibilidad de que la forma requerida sea la suma

$$y_p = A \operatorname{sen} x + B \cos x.$$

El resultado de la sustitución de las derivadas de este nuevo intento de solución en la ecuación diferencial es

$$-A \operatorname{sen} x - B \cos x - (A \cos x - B \operatorname{sen} x) = 2 \operatorname{sen} x$$

o bien,

$$(B - A)\operatorname{sen} x - (A + B)\cos x = 2\operatorname{sen} x.$$

Esta última ecuación debe ser una identidad. Al igualar los coeficientes de los términos semejantes en cada lado de la igualdad,

$$B - A = 2 \qquad \text{y} \qquad A + B = 0.$$

La solución simultánea de estas dos ecuaciones da $A = -1$ y $B = 1$. La solución particular es

$$y_p = \cos x - \operatorname{sen} x.$$ ■

EJEMPLO 3 Obtenga una solución particular de $y'' - 3y' + 2y = 5e^x$.

Solución Si sustituimos

$$y_p = Ae^x$$

y sus derivadas en la ecuación diferencial, tenemos que

$$Ae^x - 3Ae^x + 2Ae^x = 5e^x$$

o bien,

$$0 = 5e^x.$$

Sin embargo, la función exponencial nunca debe ser cero. El problema es atribuible a que $y = e^x$ ya es una solución de la ecuación homogénea asociada

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

La ecuación característica es

$$r^2 - 3r + 2 = (r - 1)(r - 2) = 0,$$

la cual tiene a $r = 1$ como una raíz. Entonces, esperaríamos que Ae^x fuera cero cuando se sustituye en el lado izquierdo de la ecuación diferencial.

La manera correcta de modificar el intento de solución en este caso es multiplicar Ae^x por x. Así, nuestro intento de solución es

$$y_p = Axe^x.$$

El resultado de la sustitución de las derivadas de este nuevo prospecto en la ecuación diferencial es

$$(Axe^x + 2Ae^x) - 3(Axe^x + Ae^x) + 2Axe^x = 5e^x$$

o bien,

$$-Ae^x = 5e^x.$$

Así, $A = -5$ nos da nuestra deseada solución particular

$$y_p = -5xe^x.$$ ■

EJEMPLO 4 Determine una solución particular de $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$.

Solución La ecuación característica de la ecuación homogénea

$$r^2 - 6r + 9 = (r - 3)^2 = 0$$

tiene a $r = 3$ como raíz repetida. La elección adecuada de y_p en este caso no es Ae^{3x} ni Axe^{3x} porque la solución de la homogénea ya contiene los dos términos. Por lo tanto, elegimos un término que contenga como factor la siguiente potencia más alta de x. Cuando sustituimos

$$y_p = Ax^2e^{3x}$$

y sus derivadas en la ecuación diferencial dada, obtenemos

$$(9Ax^2e^{3x} + 12Axe^{3x} + 2Ae^{3x}) - 6(3Ax^2e^{3x} + 2Axe^{3x}) + 9Ax^2e^{3x} = e^{3x}$$

o bien,

$$2Ae^{3x} = e^{3x}.$$

Entonces, $A = 1 \cdot 2$, y la solución particular es

$$y_p = \frac{1}{2}x^2e^{3x}.$$ ■

Cuando deseamos encontrar una solución particular de la ecuación (1) y la función $G(x)$ es la suma de dos o más términos, elegimos una función de prueba para cada término de $G(x)$ y las sumamos.

EJEMPLO 5 Obtenga la solución general de $y'' - y' = 5e^x - \operatorname{sen} 2x$.

Solución Primero resolvemos la ecuación característica

$$r^2 - r = 0.$$

Sus raíces son $r = 1$ y $r = 0$. Por lo tanto, la solución de la ecuación homogénea asociada es

$$y_c = c_1e^x + c_2.$$

Buscamos ahora una solución particular y_p. Es decir, buscamos una función que produzca $5e^x - \operatorname{sen} 2x$ cuando se sustituya en el lado izquierdo de la ecuación diferencial dada. Una parte de y_p debe producir $5e^x$, la otra $-\operatorname{sen} 2x$.

Como cualquier función de la forma c_1e^x es una solución de la ecuación homogénea asociada, seleccionamos que nuestra solución de prueba y_p sea la suma

$$y_p = Axe^x + B\cos 2x + C\operatorname{sen} 2x,$$

incluyendo xe^x donde podríamos haber incluido sólo e^x. Cuando las derivadas y_p se sustituyen en la ecuación diferencial, la ecuación resultante es

$$\begin{aligned}(Axe^x + 2Ae^x - 4B\cos 2x - 4C\operatorname{sen} 2x)\\ - (Axe^x + Ae^x - 2B\operatorname{sen} 2x + 2C\cos 2x) = 5e^x - \operatorname{sen} 2x\end{aligned}$$

o bien,

$$Ae^x - (4B + 2C)\cos 2x + (2B - 4C)\operatorname{sen} 2x = 5e^x - \operatorname{sen} 2x.$$

Esta ecuación es válida si

$$A = 5, \qquad 4B + 2C = 0, \qquad 2B - 4C = -1,$$

o bien, $A = 5$, $B = -1/10$ y $C = 1/5$. Nuestra solución particular es

$$y_p = 5xe^x - \frac{1}{10}\cos 2x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 2x.$$

La solución general de la ecuación diferencial es

$$y = y_c + y_p = c_1e^x + c_2 + 5xe^x - \frac{1}{10}\cos 2x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 2x.$$ ■

Le será de utilidad la siguiente tabla para resolver los problemas al final de esta sección.

TABLA 17.1 Método de coeficientes indeterminados para ecuaciones seleccionadas de la forma

$$ay'' + by' + cy = G(x).$$

Si $G(x)$ tiene un término que es un múltiplo constante de…	Y si	Entonces, incluya esta expresión en la función de prueba para y_p.
e^{rx}	r no es una raíz de la ecuación característica	Ae^{rx}
	r es una raíz simple de la ecuación característica	Axe^{rx}
	r es una raíz doble de la ecuación característica	Ax^2e^{rx}
sen kx, cos kx	ki no es una raíz de la ecuación característica	$B\cos kx + C\,\text{sen}\,kx$
$px^2 + qx + m$	0 no es una raíz de la ecuación característica	$Dx^2 + Ex + F$
	0 es una raíz simple de la ecuación característica	$Dx^3 + Ex^2 + Fx$
	0 es una doble raíz de la ecuación característica	$Dx^4 + Ex^3 + Fx^2$

Método de variación de parámetros

Éste es un método general para la obtención de una solución particular de la ecuación no homogénea (1) una vez que se conoce la solución general de la ecuación homogénea asociada. El método consiste en sustituir las constantes c_1 y c_2 en la solución complementaria por las funciones $v_1 = v_1(x)$ y $v_2 = v_2(x)$ garantizando (de una manera que se explicará después) que la expresión resultante satisfaga la ecuación no homogénea (1). Son dos funciones las que deben determinarse, y el requerimiento de que se satisfaga la ecuación (1) es sólo una condición. Como segunda condición, también requerimos que

$$v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0. \tag{4}$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} y &= v_1y_1 + v_2y_2, \\ y' &= v_1y_1' + v_2y_2', \\ y'' &= v_1y_1'' + v_2y_2'' + v_1'y_1' + v_2'y_2'. \end{aligned}$$

Si sustituimos estas expresiones en el lado izquierdo de la ecuación (1),

$$v_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + v_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) + a(v_1'y_1' + v_2'y_2') = G(x).$$

Los primeros dos términos entre paréntesis son cero, puesto que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación homogénea asociada (2). Por consiguiente la ecuación no homogénea (1) se satisface si, además de la ecuación (4), requerimos que

$$a(v_1'y_1' + v_2'y_2') = G(x). \tag{5}$$

Las ecuaciones (4) y (5) se resuelven simultáneamente

$$\begin{aligned} v_1'y_1 + v_2'y_2 &= 0, \\ v_1'y_1' + v_2'y_2' &= \frac{G(x)}{a} \end{aligned}$$

para las funciones desconocidas v_1' y v_2'. El procedimiento usual para resolver este sistema simple es usar el *método de determinantes* (también conocido como *regla de Kramer*), el cual se mostrará en los ejemplos que siguen. Una vez que las funciones derivadas v_1' y v_2' son conocidas, las dos funciones $v_1 = v_1(x)$ y $v_2 = v_2(x)$ se obtienen mediante integración. A continuación se presenta un resumen del método.

Procedimiento de variación de parámetros

Para aplicar el método de variación de parámetros para obtener una solución particular de la ecuación no homogénea

$$ay'' + by' + cy = G(x),$$

trabajamos en forma directa con las ecuaciones (4) y (5). No es necesario derivarlas otra vez. Los pasos son los siguientes:

1. Resuelva la ecuación homogénea asociada
$$ay'' + by' + cy = 0$$
para encontrar las funciones y_1 y y_2.
2. Resuelva las ecuaciones
$$u_1'y_1' + u_2'y_2' = 0$$
$$u_1'y_1' + u_2'y_2' = \frac{G(x)}{a}$$
en forma simultánea para las funciones derivadas u_1' y u_2'.
3. Integre u_1' y u_2' para obtener las funciones $u_1 = u_1(x)$ y $u_2 = u_2(x)$.
4. Escriba la solución particular de la ecuación no homogénea (1) como
$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2.$$

EJEMPLO 6 Encuentre la solución general de la ecuación

$$y'' + y = \tan x.$$

Solución La solución de la ecuación homogénea

$$y'' + y = 0$$

está dada por

$$y_c = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x.$$

Puesto que $y_1(x) = \cos x$ y $y_2(x) = \operatorname{sen} x$, las condiciones que deben satisfacerse en las ecuaciones (4) y (5) son

$$u_1' \cos x + u_2' \operatorname{sen} x = 0,$$
$$-u_1' \operatorname{sen} x + u_2' \cos x = \tan x. \qquad a = 1$$

La solución de este sistema nos da

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ \tan x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{-\tan x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x} = \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}.$$

Asimismo,

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \tan x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix}} = \operatorname{sen} x.$$

Después de integrar v_1' y v_2', tenemos

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \int \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}\,dx \\ &= -\int (\sec x - \cos x)\,dx \\ &= -\ln|\sec x + \tan x| + \operatorname{sen} x, \end{aligned}$$

y

$$v_2(x) = \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x.$$

Observe que hemos omitido las constantes de integración en la determinación de v_1 y v_2 porque serían absorbidas por las constantes arbitrarias de la solución homogénea.

Al sustituir v_1 y v_2 en la expresión para y_p en el paso 4,

$$\begin{aligned} y_p &= [-\ln\cdot\sec x + \tan x\cdot + \operatorname{sen} x]\cos x + (-\cos x)\operatorname{sen} x \\ &= (-\cos x)\ln\cdot\sec x + \tan x\cdot. \end{aligned}$$

La solución general es

$$y = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x - (\cos x)\ln\cdot\sec x + \tan x\cdot. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 7 Resuelva la ecuación no homogénea

$$y'' + y' - 2y = xe^x.$$

Solución La ecuación característica es

$$r^2 + r - 2 = (r+2)(r-1) = 0$$

lo cual da la solución homogénea

$$y_c = c_1e^{-2x} + c_2e^x.$$

Las condiciones que se deben satisfacer en las ecuaciones (4) y (5) son

$$\begin{aligned} v_1'e^{-2x} + v_2'e^x &= 0, \\ -2v_1'e^{-2x} + v_2'e^x &= xe^x. \qquad a = 1 \end{aligned}$$

Al despejar v_1' y v_2' en el sistema de arriba obtenemos

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^x \\ xe^x & e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2x} & e^x \\ -2e^{-2x} & e^x \end{vmatrix}} = \frac{-xe^{2x}}{3e^{-x}} = -\frac{1}{3}xe^{3x}.$$

Asimismo,

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & xe^x \end{vmatrix}}{3e^{-x}} = \frac{xe^{-x}}{3e^{-x}} = \frac{x}{3}.$$

Integramos para obtener las funciones parámetro y obtenemos

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \int -\frac{1}{3}xe^{3x}\,dx \\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{xe^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3}\,dx\right) \\ &= \frac{1}{27}(1 - 3x)e^{3x}, \end{aligned}$$

y

$$v_2(x) = \int \frac{x}{3}\,dx = \frac{x^2}{6}.$$

Por lo tanto,

$$y_p = \left[\frac{(1 - 3x)e^{3x}}{27}\right]e^{-2x} + \left(\frac{x^2}{6}\right)e^x$$
$$= \frac{1}{27}e^x - \frac{1}{9}xe^x + \frac{1}{6}x^2e^x.$$

La solución general de la ecuación diferencial es

$$y = c_1e^{-2x} + c_2e^x - \frac{1}{9}xe^x + \frac{1}{6}x^2e^x,$$

donde el término $(1\cdot 27)e^x$ en y_p se ha integrado al término c_2e^x en la solución homogénea. ■

Ejercicios 17.2

Resuelva las ecuaciones de los ejercicios 1 a 16 por el método de los coeficientes indeterminados.

1. $y'' - 3y' - 10y = -3$
2. $y'' - 3y' - 10y = 2x - 3$
3. $y'' - y' = \operatorname{sen} x$
4. $y'' + 2y' + y = x^2$
5. $y'' + y = \cos 3x$
6. $y'' + y = e^{2x}$
7. $y'' - y' - 2y = 20\cos x$
8. $y'' + y = 2x + 3e^x$
9. $y'' - y = e^x + x^2$
10. $y'' + 2y' + y = 6\operatorname{sen} 2x$
11. $y'' - y' - 6y = e^{-x} - 7\cos x$
12. $y'' + 3y' + 2y = e^{-x} + e^{-2x} - x$
13. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} = 15x^2$
14. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} = -8x + 3$
15. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} = e^{3x} - 12x$
16. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 7\dfrac{dy}{dx} = 42x^2 + 5x + 1$

Resuelva las ecuaciones de los ejercicios 17 a 28 por variación de parámetros.

17. $y'' + y' = x$

18. $y'' + y = \tan x, \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

19. $y'' + y = \operatorname{sen} x$
20. $y'' + 2y' + y = e^x$
21. $y'' + 2y' + y = e^{-x}$
22. $y'' - y = x$
23. $y'' - y = e^x$
24. $y'' - y = \operatorname{sen} x$
25. $y'' + 4y' + 5y = 10$
26. $y'' - y' = 2^x$

27. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \sec x, \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

28. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} = e^x\cos x, \quad x > 0$

En cada uno de los ejercicios 29 a 32, la ecuación diferencial tiene su correspondiente solución particular y_p. Determine los coeficientes de y_p. Luego resuelva la ecuación diferencial.

29. $y'' - 5y' = xe^{5x}, \quad y_p = Ax^2e^{5x} + Bxe^{5x}$
30. $y'' - y' = \cos x + \operatorname{sen} x, \quad y_p = A\cos x + B\operatorname{sen} x$
31. $y'' + y = 2\cos x + \operatorname{sen} x, \quad y_p = Ax\cos x + Bx\operatorname{sen} x$
32. $y'' + y' - 2y = xe^x, \quad y_p = Ax^2e^x + Bxe^x$

En los ejercicios 33 a 36, resuelva las ecuaciones diferenciales ***a)*** por variación de parámetros y ***b)*** por el método de coeficientes indeterminados.

33. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} = e^x + e^{-x}$
34. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 2e^{2x}$
35. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} - 5y = e^x + 4$
36. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 9\dfrac{dy}{dx} = 9e^{9x}$

Resuelva las ecuaciones diferenciales de los ejercicios 37 a 46. Algunas de las ecuaciones se resuelven por el método de coeficientes indeterminados, pero otras no.

37. $y'' + y = \cot x, \quad 0 < x < \pi$
38. $y'' + y = \csc x, \quad 0 < x < \pi$
39. $y'' - 8y' = e^{8x}$
40. $y'' + 4y = \operatorname{sen} x$
41. $y'' - y' = x^3$
42. $y'' + 4y' + 5y = x + 2$
43. $y'' + 2y' = x^2 - e^x$
44. $y'' + 9y = 9x - \cos x$

45. $y'' + y = \sec x\tan x, \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

46. $y'' - 3y' + 2y = e^x - e^{2x}$

El método de coeficientes indeterminados se usa algunas veces para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Use este método para resolver las ecuaciones de los ejercicios 47-50.

47. $y' - 3y = e^x$
48. $y' + 4y = x$
49. $y' - 3y = 5e^{3x}$
50. $y' + y = \operatorname{sen} x$

Resuelva las ecuaciones diferenciales de los ejercicios 51 y 52, de acuerdo con las condiciones iniciales indicadas.

51. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \sec^2 x, \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}; \quad y(0) = y'(0) = 1$

52. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = e^{2x}; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = \dfrac{2}{5}$

En los ejercicios 53 a 58, verifique que la función es una solución particular de la ecuación no homogénea especificada. Obtenga la solución general y evalúe sus constantes arbitrarias para encontrar la solución única que satisfaga la ecuación y las condiciones iniciales dadas.

53. $y'' + y' = x, \quad y_p = \dfrac{x^2}{2} - x, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

54. $y'' + y = x, \quad y_p = 2\operatorname{sen} x + x, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

55. $\dfrac{1}{2}y'' + y' + y = 4e^x(\cos x - \operatorname{sen} x),$
$y_p = 2e^x \cos x, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

56. $y'' - y' - 2y = 1 - 2x, \quad y_p = x - 1, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

57. $y'' - 2y' + y = 2e^x, \quad y_p = x^2e^x, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

58. $y'' - 2y' + y = x^{-1}e^x,\ x > 0,$
$y_p = xe^x \ln x, \quad y(1) = e,\ y'(1) = 0$

En los ejercicios 59 y 60 se dan dos soluciones linealmente independientes y_1 y y_2 a la ecuación homogénea asociada de la ecuación no homogénea de coeficientes variables. Use el método de variación de parámetros para obtener una solución particular de la ecuación no homogénea. Suponga que $x > 0$ en cada ejercicio.

59. $x^2y'' + 2xy' - 2y = x^2, \quad y_1 = x^{-2},\ y_2 = x$

60. $x^2y'' + xy' - y = x, \quad y_1 = x^{-1},\ y_2 = x$

17.3 Aplicaciones

En esta sección aplicaremos las ecuaciones diferenciales de segundo orden al estudio de resortes vibratorios y circuitos eléctricos.

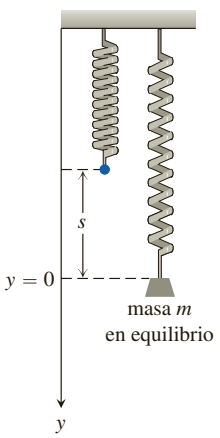


FIGURA 17.2 La masa m estira un resorte una longitud s hasta la posición de equilibrio en $y = 0$.

Vibraciones

Un resorte tiene su extremo superior sujeto a un soporte rígido, como se muestra en la figura 17.2. Un objeto de masa m está suspendido del resorte y lo estira una longitud s hasta que el resorte llega a una posición de equilibrio. De acuerdo con la ley de Hook (sección 6.5), la fuerza de tensión en el resorte es ks, donde k es la constante del resorte. La fuerza debida a la gravedad que tira del resorte hacia abajo es mg, y para efectos de equilibrio se requiere que en equilibrio

$$ks = mg. \tag{1}$$

Suponga que el objeto es halado hacia abajo una distancia adicional y_0 a partir de la posición de equilibrio y luego se libera. Queremos estudiar el movimiento del objeto, es decir, la posición vertical de su centro de masa en cualquier instante futuro.

Sea y, con la dirección positiva hacia abajo, el desplazamiento del objeto a partir de la posición de equilibrio $y = 0$ en cualquier instante t después de iniciado el movimiento. Entonces, las fuerzas que actúan sobre el objeto son (figura 17.3)

$F_p = mg$, la fuerza de propulsión debida a la gravedad,

$F_s = k(s + y)$, la fuerza de restauración de la tensión del resorte,

$F_r = \delta\dfrac{dy}{dt}$, la fuerza de fricción, que se supone proporcional a la velocidad.

La fuerza de fricción tiende a retardar el movimiento del objeto. La resultante de estas fuerzas es $F = F_p - F_s - F_r$ y, de acuerdo con la segunda ley de Newton. $F = ma$; tenemos entonces

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - ks - ky - \delta\frac{dy}{dt}.$$

Por la ecuación (1), $mg - ks = 0$, de manera que esta última ecuación se convierte en

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + \delta\frac{dy}{dt} + ky = 0, \tag{2}$$

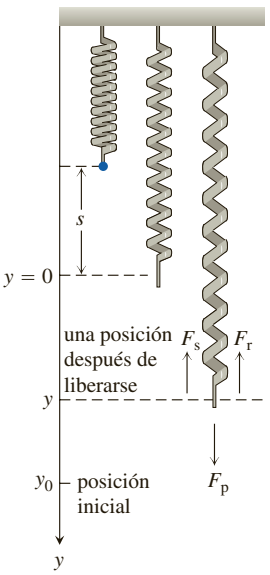


FIGURA 17.3 La fuerza de propulsión (peso) F_p tira de la masa hacia abajo, pero la fuerza restauradora del resorte F_s y la fuerza de fricción F_r tiran de la masa hacia arriba. El movimiento inicia en $y = y_0$ y la masa se mueve hacia arriba y hacia abajo.

de acuerdo con las condiciones iniciales $y(0) = y_0$, y $y\,9(0) = 0$. (Aquí usamos la notación prima para representar la derivada con respecto al tiempo t).

Se puede esperar que el movimiento predicho por la ecuación (2) sea oscilatorio alrededor del punto de equilibrio $y = 0$ y al final se extinga debido a la fuerza de fricción retardadora. De hecho, éste es el caso y mostraremos cómo las constantes m, δ y k determinan la naturaleza de la extinción. También veremos que si no hay fricción (de manera que $\delta = 0$), entonces el objeto sencillamente oscilará de forma indefinida.

Movimiento armónico simple

Primero suponemos que hay una fuerza de fricción retardadora. Entonces, $\delta = 0$ y el movimiento no se amortigua. Si sustituimos $\omega = \sqrt{k/m}$ para simplificar nuestros cálculos, la ecuación de segundo grado (2) se convierte en

$$y'' + \omega^2 y = 0, \qquad \text{con} \qquad y(0) = y_0 \qquad \text{y} \qquad y'(0) = 0.$$

La ecuación característica es

$$r^2 + \omega^2 = 0,$$

la cual tiene las raíces imaginarias $r = \pm \omega i$. La solución general de la ecuación diferencial en la ecuación (2) es

$$y = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t. \tag{3}$$

Para adaptarla a las condiciones iniciales, calculamos

$$y' = -c_1 \omega \operatorname{sen} \omega t + c_2 \omega \cos \omega t$$

y luego sustituimos las condiciones. Esto nos da $c_1 = y_0$ y $c_2 = 0$. La solución particular

$$y = y_0 \cos \omega t \tag{4}$$

describe el movimiento del objeto. La ecuación (4) representa al **movimiento armónico simple** de amplitud y_0 y periodo $T = 2\pi \cdot \omega$.

La solución general dada por la ecuación (3) se puede reducir a un solo término utilizando la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}(\omega t + \phi) = \cos \omega t \operatorname{sen} \phi + \operatorname{sen} \omega t \cos \phi.$$

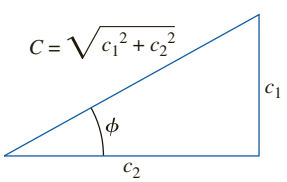


FIGURA 17.4 $c_1 = C \operatorname{sen} \phi$ y $c_2 = C \cos \phi$.

Para aplicar la identidad usamos (vea la figura 17.4)

$$c_1 = C \operatorname{sen} \phi \qquad \text{y} \qquad c_2 = C \cos \phi,$$

donde

$$C = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \qquad \text{y} \qquad \phi = \tan^{-1} \frac{c_1}{c_2}.$$

Entonces, la solución general de la ecuación (3) se escribe de la forma alternativa

$$y = C \operatorname{sen}(\omega t + \phi). \tag{5}$$

Aquí, C y ϕ se toman como dos nuevas constantes arbitrarias, que sustituyen a las constantes c_1 y c_2. La ecuación (5) representa un movimiento armónico simple de amplitud C y periodo $T = 2\pi \cdot \omega$. El ángulo $\omega t + \phi$ se conoce como **ángulo de fase** y ϕ se interpreta como su valor inicial. En la figura 17.5 se presenta la gráfica de un movimiento armónico simple representado por la ecuación (5).

Movimiento amortiguado

Ahora suponga que existe fricción en el sistema del resorte, entonces, $\delta \neq 0$. Si sustituimos $\omega = \sqrt{k/m}$ y $2b = \delta/m$, la ecuación diferencial (2) es

$$y'' + 2by' + \omega^2 y = 0. \tag{6}$$

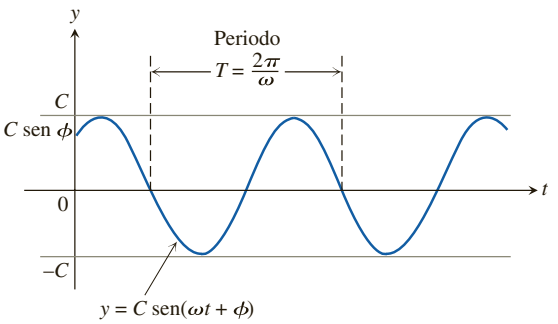


FIGURA 17.5 Movimiento armónico simple de amplitud C y periodo T con un ángulo de fase inicial ϕ (ecuación 5).

La ecuación característica es

$$r^2 + 2br + \omega^2 = 0,$$

con las raíces $r = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}$. En seguida se presentan tres casos diferentes, dependiendo de los tamaños relativos de b y ω.

Caso 1: $b = \omega$. La doble raíz de la ecuación característica es real e igual a $r = \omega$. La solución general de la ecuación (6) es

$$y = (c_1 + c_2 t)e^{-\omega t}.$$

Este tipo de movimiento se llama **amortiguamiento crítico** y no es oscilatorio. La figura 17.6*a* ilustra un ejemplo de esta clase de movimiento amortiguado.

Caso 2: $b > \omega$. Las raíces de la ecuación característica son reales y diferentes, y están dadas por $r_1 = -b + \sqrt{b^2 - \omega^2}$ y $r_2 = -b - \sqrt{b^2 - \omega^2}$. La solución general de la ecuación (6) está dada por

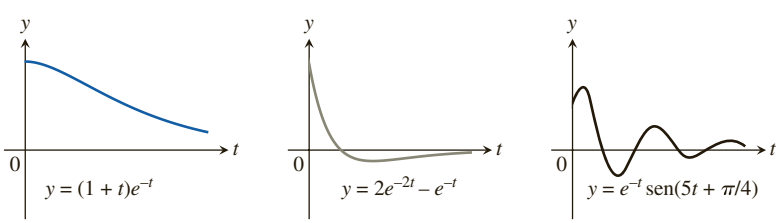
$$y = c_1 e^{\left(-b+\sqrt{b^2-\omega^2}\right)t} + c_2 e^{\left(-b-\sqrt{b^2-\omega^2}\right)t}.$$

De nuevo, el movimiento no es oscilatorio y tanto r_1 como r_2 son negativos. De esta manera, y tiende a cero cuando el tiempo transcurre. Este movimiento se conoce como **sobreamortiguado** (figura 17.6*b*).

Caso 3: $b < \omega$. Las raíces de la ecuación característica son complejas y están dadas por $r = -b \pm i\sqrt{\omega^2 - b^2}$. La solución general de la ecuación (6) está dada por

$$y = e^{-bt}\left(c_1 \cos \sqrt{\omega^2 - b^2}\, t + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{\omega^2 - b^2}\, t\right).$$

Este movimiento, llamado **subamortiguado**, representa el movimiento oscilatorio amortiguado. Es análogo al movimiento armónico simple de periodo $T = 2\pi/\sqrt{\omega^2 - b^2}$ excepto que la amplitud no es constante, sino amortiguada por el factor e^{-bt}. Por lo tanto, el movimiento tiende a cero cuando t aumenta, de manera que las vibraciones tienden a extinguirse conforme el tiempo transcurre. Observe que el periodo $T = 2\pi/\sqrt{\omega^2 - b^2}$ es mayor que el



a) Amortiguamiento crítico ***b***) Sobreamortiguamiento ***c***) Subamortiguamiento

FIGURA 17.6 Tres ejemplos de movimiento vibratorio amortiguado para un sistema de resorte con fricción, $\delta \neq 0$.

periodo $T_0 - 2\pi \cdot \omega$ en un sistema libre de fricción. Aún más, cuanto mayor sea el valor de $b = \delta \cdot 2m$ en el factor exponencial de amortiguamiento, más rápido dejarán de notarse las vibraciones. La figura 17.6***c*** muestra una curva que representa el movimiento subamortiguado.

También puede agregarse al sistema de resorte una fuerza externa $F(t)$ modelada por la ecuación (2). La función de fuerza provocaría un disturbio externo en el sistema. Por ejemplo, si la ecuación modela un sistema de suspensión de un automóvil, la función de fuerza puede representar una sacudida o un bache en el camino de forma periódica en el desempeño del sistema de suspensión, o bien, podría representar los efectos del viento cuando modela el movimiento vertical de un puente suspendido. La inclusión de una función de fuerza resulta en la ecuación no homogénea de segundo orden

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + \delta\frac{dy}{dt} + ky = F(t). \tag{7}$$

Dejamos el estudio de estos sistemas de resortes para cursos más avanzados.

Circuitos eléctricos

La unidad básica de electricidad es la **carga** q (análoga a la idea de masa). En un campo eléctrico usamos el flujo de carga, o **corriente** $I = dq \cdot dt$, como podríamos usar la velocidad en un campo gravitacional. Hay muchas similitudes entre el movimiento en un campo gravitacional y el flujo de electrones (transportadores de carga) en un campo eléctrico.

Considere el circuito eléctrico mostrado en la figura 17.7. Consta de cuatro componentes: fuente de voltaje, resistor, inductor y capacitor. Visualice el campo eléctrico como el flujo de un fluido, donde la fuente de voltaje es la bomba; y el resistor, inductor y capacitor tienden a bloquear el flujo. Un ejemplo de fuente es una batería o un generador, la cual produce un voltaje que causa que la corriente fluya a través del circuito cuando el interruptor está encendido. Una bombilla eléctrica o un electrodoméstico darían la resistencia. La inducción se debe a un campo magnético que se opone a cualquier cambio en la corriente cuando fluye a través de una bobina. La capacitancia es creada por dos placas de metal que alternan las cargas y, de este modo, invierten el flujo de corriente. Los siguientes símbolos representan las cantidades relevantes en el circuito:

q: carga en la sección transversal de un conductor medida en **coulombs** (se abrevia c);

I: corriente o tasa de cambio de la carga $dq \cdot dt$ (flujo de electrones) en la sección transversal de un conductor medida en **amperes** (A);

E: fuente de electricidad (potencial) medida en **volts** (V);

V: diferencia de potencial entre dos puntos a lo largo del conductor medida en **volts** (V).

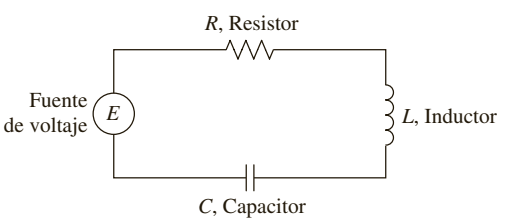


FIGURA 17.7 Un circuito eléctrico.

Ohm observó que cuando la corriente I fluye a través de un resistor, a causa de una diferencia de potencial a través de él, es (aproximadamente) proporcional a la diferencia de potencial (caída de voltaje). La constante de proporcionalidad se define como $1 \cdot R$ y se llama **resistencia** (R). De esta forma, la *ley de Ohm* es

$$I = \frac{1}{R}V.$$

De forma análoga, en física se sabe que las caídas de voltaje a través de un inductor y un capacitor son

$$L\frac{dI}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{q}{C},$$

donde L es la **inductancia** y C es la **capacitancia** (con la carga q en el capacitor).

El físico alemán Gustav R. Kirchhoff (1824-1887) formuló la ley que establece que la suma de las caídas de voltaje en un circuito cerrado es igual al voltaje alimentado $E(t)$. De manera simbólica, esto se expresa como

$$RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = E(t).$$

Puesto que $I = dq/dt$, la ley de Kirchhoff se convierte en

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t). \tag{8}$$

La ecuación diferencial de segundo orden (8), la cual modela un circuito eléctrico, tiene exactamente la misma forma de la ecuación (7) que modela el movimiento vibratorio. Ambos modelos se resuelven usando los métodos desarrollados en la sección 17.2.

Resumen

La siguiente tabla resume las analogías de la física del movimiento de un objeto en un sistema de resorte contra el flujo de partículas cargadas en un circuito eléctrico.

Modelos lineales de coeficientes constantes de segundo orden

Sistema mecánico		**Sistema eléctrico**	
$my'' + \delta y' + ky = F(t)$		$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = E(t)$	
y:	desplazamiento	q:	carga
y':	velocidad	q':	corriente
y'':	aceleración	q'':	cambio en la corriente
m:	masa	L:	inductancia
δ:	constante de amortiguamiento	R:	resistencia
k:	constante del resorte	$1/C$:	donde C es la capacitancia
$F(t)$:	función de fuerza	$E(t)$:	fuente de voltaje

Ejercicios 17.3

1. Un peso de 16 lb se ata a la parte inferior de un resorte suspendido del techo y tiene una constante de 1 lb/ft. La resistencia en el sistema resorte-masa es numéricamente igual a la velocidad instantánea. En el instante $t = 0$ el peso se pone en movimiento desde una posición 2 ft por debajo de su posición de equilibrio, imprimiéndole una velocidad hacia abajo de 2 ft/s. Escriba un problema de valor inicial que modele la situación explicada.

2. Un peso de 8 lb estira un resorte 4 ft. El sistema masa-resorte está en un medio que ofrece una resistencia al movimiento que es numéricamente igual a 1.5 veces la velocidad instantánea. Si el peso se libera en una posición de 2 ft por encima de su posición de equilibrio con una velocidad hacia abajo de 3 ft/s, escriba un problema de valor inicial que modele tal situación.

3. Un peso de 20 lb cuelga de un resorte de 18 in y lo estira 6 in. El peso es halado hacia abajo 5 in y se agregan 5 lb a su peso. Si el peso se libera ahora con una velocidad hacia abajo de v_0 in/s, escriba un problema de valor inicial que modele el desplazamiento vertical.

4. Un peso de 10 lb es suspendido por un resorte que se estira 2 in debido al peso. Suponga que la magnitud de la resistencia es igual a $20/\sqrt{g}$ lb multiplicada por la velocidad instantánea v en ft por segundo. Si el peso es halado hacia abajo 3 in por debajo

de su posición de equilibrio y luego se le libera, formule un problema de valor inicial que modele el comportamiento del sistema resorte-masa.

5. Un circuito eléctrico (abierto) consta de un inductor, un resistor y un capacitor. Existe una carga inicial de 2 coulombs en el capacitor. En el instante en que el circuito se cierra, se presenta una corriente de 3 amperes y se aplica un voltaje $E(t) = 20 \cos t$. En este circuito, la caída del voltaje a través del resistor es 4 veces el cambio instantáneo de la carga, la caída del voltaje a través del capacitor es 10 veces la carga, y la caída de voltaje a través del inductor es dos veces el cambio instantáneo en la corriente. Escriba un problema de valor inicial que modele este circuito.

6. Un inductor de 2 henrys se conecta en serie con un resistor de 12 ohms, un capacitor de $1 \cdot 16$ farads y una batería de 300 volts. De inicio, la carga en el capacitor es cero y la corriente también es cero. Formule un problema de valor inicial que modele este circuito.

Las unidades mecánicas en los sistemas inglés y métrico son útiles en la solución de los siguientes problemas.

Unidad	Sistema inglés	Sistema MKS
Distancia	Pies (ft)	Metros (m)
Masa	Slugs	Kilogramos (kg)
Tiempo	Segundos (s)	Segundos (s)
Fuerza	Libras (lb)	Newtons (N)
g (de la Tierra)	32 ft$\cdot$ s^2	9.81 m$\cdot$ s^2

7. Un peso de 16 lb se ata a la parte inferior de un resorte suspendido del techo que tiene una constante de 1 lb$\cdot$ ft. La resistencia en el sistema resorte-masa es numéricamente igual a la velocidad instantánea. En el instante $t = 0$, el peso se pone en movimiento desde una posición 2 ft por debajo de su posición de equilibrio imprimiéndole una velocidad hacia abajo de 2 ft$\cdot$ s. Al cabo de π s, determine si la masa está arriba o abajo de la posición de equilibrio y a qué distancia.

8. Un peso de 8 lb estira 4 ft un resorte. El sistema resorte-masa está en un medio que ofrece una resistencia al movimiento igual a 1.5 veces la velocidad instantánea. Si el peso se libera en una posición de 2 ft por encima de su posición de equilibrio con una velocidad hacia abajo de 3 ft$\cdot$ s, determine su posición en relación con la posición de equilibrio 2 s más tarde.

9. Un peso de 20 lb cuelga de un resorte de 18 in y lo estira 6 in. El peso es halado hacia abajo 5 in y se agregan 5 lb a su peso. Si el peso se libera ahora con una velocidad hacia abajo de v_0 in$\cdot$ s, determine la posición de la masa en relación con el equilibrio en términos de v_0 y válido para cualquier instante $t \geq 0$.

10. Una masa de 1 slug se ata a un resorte cuya constante es $25 \cdot 4$ lb$\cdot$ ft. Inicialmente, la masa se libera 1 ft por encima de la posición de equilibrio con una velocidad hacia abajo de 3 ft$\cdot$ s, y el movimiento posterior tiene lugar en un medio que ofrece una fuerza de amortiguación numéricamente igual a tres veces la velocidad instantánea. Una fuerza externa $f(t)$ está siendo aplicada al sistema, pero suponga que al principio, $f(t) = 0$. Formule y resuelva un problema de valor inicial que modele el sistema descrito. Interprete sus resultados.

11. Un peso de 10 lb es suspendido por un resorte que se estira 2 in debido al peso. Suponga la magnitud de la resistencia igual a $40/\sqrt{g}$ lb multiplicada por la velocidad instantánea en pies por segundo. Si el peso es halado hacia abajo 3 in por debajo de su posición de equilibrio y luego se libera, determine el tiempo requerido para alcanzar la posición de equilibrio por primera vez.

12. Un peso estira un resorte 6 in. Se pone en movimiento en un punto que está 2 in por debajo de su posición de equilibrio con una velocidad hacia abajo de 2 in$\cdot$ s.

***a*)** ¿Cuándo regresa la pesa a su posición inicial?

***b*)** ¿Cuándo alcanza la pesa el punto más alto?

***c*)** Demuestre que la velocidad máxima es $2\sqrt{2g + 1}$ in$\cdot$ s.

13. Un peso de 10 lb alarga 10 in un resorte. El peso es arrastrado 2 in debajo de su posición de equilibrio y adquiere una velocidad de 4 in$\cdot$ s. Un resorte idéntico tiene atado un peso diferente. Este segundo peso es arrastrado debajo de su posición de equilibrio una distancia igual a la amplitud del primer movimiento a una velocidad inicial de 2 ft$\cdot$ s. Si la amplitud del segundo movimiento es dos veces la del primero, ¿cuál es el peso atado al segundo resorte?

14. Un peso alarga un resorte 3 in y un segundo peso alarga otro resorte 9 in. Si ambos pesos se halan de forma simultánea hacia abajo 1 in, debajo de sus respectivas posiciones de equilibrio, y luego se liberan, determine el primer tiempo después del instante $t = 0$ en que sus velocidades son iguales.

15. Un peso de 16 lb estira un resorte 4 ft. El peso es halado 5 ft por debajo de su posición de equilibrio y luego se libera. ¿Qué velocidad inicial v_0 tendría el efecto de duplicar la amplitud de la vibración?

16. Un peso de 8 lb estira 3 in un resorte. El sistema resorte-masa está en un medio con una constante de amortiguación de 2 lb-s$\cdot$ ft. Si la masa se libera de su posición de equilibrio con una velocidad hacia abajo de 4 in$\cdot$ s, determine el tiempo requerido para que la masa regrese a su posición de equilibrio por primera vez.

17. Un peso suspendido de un resorte realiza vibraciones amortiguadas con un periodo de 2 s. Si el factor de amortiguación disminuye 90% en 10 s, determine la aceleración del peso cuando está a 3 in debajo de su posición de equilibrio y se mueve hacia arriba con una velocidad de 2 ft$\cdot$ s.

18. Un peso de 10 lb estira 2 ft un resorte. Si el peso es halado 6 in por debajo de su posición de equilibrio y luego se libera, determine el punto más alto que alcanza el peso. Suponga que el sistema resorte-masa está en un medio que ofrece una resistencia de $10/\sqrt{g}$ lb multiplicada por la velocidad instantánea en pies por segundo.

19. Un circuito *LRC* tiene una inductancia de $1 \cdot 5$ henrys, una resistencia de 1 ohm y una capacitancia de $5 \cdot 6$ farads. Suponiendo que la carga inicial es de 2 coulombs y la corriente inicial de 4 amperes, determine la función solución que describe la carga del capacitor en cualquier instante. ¿Cuál es la carga en el capacitor después de un largo periodo?

20. Un circuito eléctrico (abierto) consta de un inductor, un resistor y un capacitor. Existe una carga inicial de 2 coulombs en el capacitor. En el instante en que el circuito se cierra, se presenta una corriente de 3 amperes sin que se aplique un voltaje externo. En este circuito el voltaje cae en tres puntos que numéricamente están relacionados como sigue: a través del capacitor, 10 veces la carga; a través del resistor, cuatro veces el cambio instantáneo

de la carga: y a través del inductor, dos veces el cambio instantáneo de la corriente. Determine la carga en el capacitor como una función del tiempo.

21. Un peso de 16 lb estira un resorte 4 ft. El sistema resorte-masa está en un medio con una constante de amortiguación de 4.5 lb-s· ft y se aplica una fuerza externa en libras dada por $f(t) = 4 + e^{-2t}$. ¿Cuál es la función solución que describe la posición de la masa en cualquier instante si la masa se libera a 2 ft por debajo de la posición de equilibrio con una velocidad inicial hacia abajo de 4 ft· s?

22. Una masa de 10 kg se ata a un resorte que tiene una constante de 140 N· m. La masa inicia un movimiento a partir de la posición de equilibrio con una velocidad inicial hacia arriba de 1 m· s y con una fuerza externa aplicada dada por $f(t) = 5$ sen t (en newtons). La masa está en un medio viscoso con un coeficiente de resistencia igual a 90 N-s· m. Formule un problema de valor inicial que modele el sistema dado; resuelva el modelo e interprete los resultados.

23. Una masa de 2 kg se ata al extremo inferior de un resorte suspendido del techo. La masa alcanza su posición de equilibrio alargando ese modo 1.96 m el resorte. La masa está en un medio viscoso que de ofrece una resistencia en newtons numéricamente igual a cuatro veces la velocidad instantánea medida en metros por segundo. La masa es entonces halada hacia abajo 2 m por debajo de su punto de equilibrio y se libera con una velocidad hacia abajo de 3 m· s. En este mismo instante se aplica al sistema una fuerza externa, dada por $f(t) = 20 \cos t$ (en newtons). Determine si la masa al final de π s está arriba o debajo de su punto de equilibrio y a qué distancia.

24. Un peso de 8 lb estira 4 ft un resorte. El sistema resorte-masa está en un medio que opone una resistencia al movimiento igual a 1.5 veces la velocidad instantánea y se aplica una fuerza externa (en lb) dada por $f(t) = 6 + e^{-t}$. Si el peso se libera en una posición de 2 ft arriba de su posición de equilibrio con una velocidad hacia abajo de 3 ft· s, obtenga su posición en relación con el punto de equilibrio cuando hayan transcurrido 2 segundos.

25. Suponga que $L = 10$ henrys, $R = 10$ ohms, $C = 1 \cdot 500$ farads, $E = 100$ volts, $q(0) = 10$ coulombs y $q'(0) = i(0) = 0$. Formule y resuelva un problema de valor inicial que modele el circuito LRC descrito. Interprete sus resultados.

26. Un circuito en serie que consta de un inductor, un resistor y un capacitor está abierto. En el capacitor existe una carga inicial de 2 coulombs y hay una corriente de 3 amperes en el circuito en el instante en que el circuito se cierra. Se aplica un voltaje dado por $E(t) = 20 \cos t$. En este circuito las caídas de voltaje son numéricamente iguales a: cuatro veces el cambio instantáneo de carga a través del resistor, 10 veces la carga a través del capacitor, y dos veces el cambio instantáneo de la corriente en el inductor. Determine la carga en el capacitor como una función del tiempo. Calcule la carga en el capacitor y la corriente en el instante $t = 10$.

17.4 Ecuaciones de Euler

En la sección 17.1 presentamos la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0$$

y mostramos cómo resolver esta ecuación cuando P, Q y R son constantes. Si los coeficientes no son constantes, por lo regular no podemos resolver esta ecuación diferencial en términos de las funciones elementales que hemos estudiado en cálculo. En esta sección aprenderá cómo resolver la ecuación cuando los coeficientes tienen la forma especial

$$P(x) = ax^2, \qquad Q(x) = bx \qquad \text{y} \qquad R(x) = c,$$

donde a, b y c son constantes. Esta clase de ecuaciones especiales se conocen como **ecuaciones de Euler**, en honor a Leonhard Euler, quien las estudió y, además, demostró cómo resolverlas. Tales ecuaciones se presentan en el estudio de las vibraciones mecánicas.

Solución general de las ecuaciones de Euler

Considere la ecuación de Euler

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0, \quad x > 0. \tag{1}$$

Para resolver la ecuación (1), primero hacemos el cambio de variables

$$z = \ln x \qquad \text{y} \qquad y(x) = Y(z).$$

A continuación, usamos la regla de la cadena para obtener las derivadas $y'(x)$ y $y''(x)$:

$$y'(x) = \frac{d}{dx}Y(z) = \frac{d}{dz}Y(z)\frac{dz}{dx} = Y'(z)\frac{1}{x}$$

y

$$y''(x) = \frac{d}{dx}y'(x) = \frac{d}{dx}Y'(z)\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}Y'(z) + \frac{1}{x}Y''(z)\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x^2}Y'(z) + \frac{1}{x^2}Y''(z).$$

Al sustituir estas dos derivadas en el lado izquierdo de la ecuación (1), tenemos

$$ax^2y'' + bxy' + cy = ax^2\left(-\frac{1}{x^2}Y'(z) + \frac{1}{x^2}Y''(z)\right) + bx\left(\frac{1}{x}Y'(z)\right) + cY(z)$$
$$= aY''(z) + (b - a)Y'(z) + cY(z).$$

Por lo tanto, las sustituciones nos dan la ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes

$$aY''(z) + (b - a)Y'(z) + cY(z) = 0. \tag{2}$$

Resolvemos la ecuación (2) usando el método de la sección 17.1. Es decir, obtenemos las raíces de la ecuación característica asociada

$$ar^2 + (b - a)r + c = 0 \tag{3}$$

para encontrar la solución general de $Y(z)$. Después de obtener $Y(z)$, determinamos $y(x)$ a partir de la sustitución de $z = \ln x$.

EJEMPLO 1 Determine la solución general de la ecuación $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$.

Solución Ésta es una ecuación de Euler con $a = 1$, $b = 2$ y $c = -2$. La ecuación característica (3) para $Y(z)$ es

$$r^2 + (2 - 1)r - 2 = (r - 1)(r + 2) = 0,$$

con raíces $r = -2$ y $r = 1$. La solución para $Y(z)$ está dada por

$$Y(z) = c_1e^{-2z} + c_2e^{z}.$$

Al sustituir $z = \ln x$ tenemos la solución general para $y(x)$:

$$y(x) = c_1e^{-2\ln x} + c_2e^{\ln x} = c_1x^{-2} + c_2x.$$ ■

EJEMPLO 2 Resuelva la ecuación de Euler $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$.

Solución Puesto que $a = 1$, $b = -5$ y $c = 9$, la ecuación característica (3) para $Y(z)$ es

$$r^2 + (-5 - 1)r + 9 = (r - 3)2 = 0.$$

La ecuación característica tiene la doble raíz $r = 3$ dando

$$Y(z) = c_1e^{3z} + c_2ze^{3z}.$$

La sustitución de $z = \ln x$ en esta expresión nos da la solución general

$$y(x) = c_1e^{3\ln x} + c_2 \ln x\, e^{3\ln x} = c_1x^3 + c_2x^3 \ln x.$$ ■

EJEMPLO 3 Determine la solución particular de $x^2y'' - 3xy' + 68y = 0$ que satisface las condiciones iniciales $y(1) = 0$ y $y'(1) = 1$.

Solución En este caso $a = 1$, $b = -3$ y $c = 68$ se sustituyen en la ecuación característica (3) y tenemos

$$r^2 - 4r + 68 = 0.$$

Las raíces son $r = 2 + 8i$ y $r = 2 - 8i$, lo que da la solución

$$Y(z) = e^{2z}(c_1 \cos 8z + c_2 \operatorname{sen} 8z).$$

Al sustituir $z = \ln x$ en esta expresión,

$$y(x) = e^{2\ln x}\big(c_1 \cos (8 \ln x) + c_2 \operatorname{sen} (8 \ln x)\big).$$

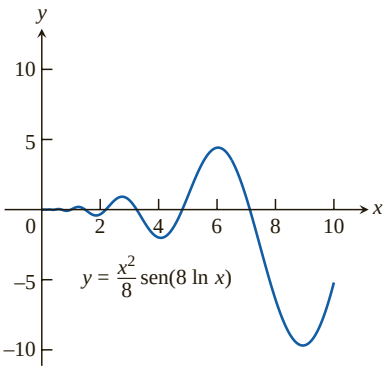


FIGURA 17.8 Gráfica de la solución del ejemplo 3.

Por la condición inicial $y(1) = 0$, vemos que $c_1 = 0$ y

$$y(x) = c_2 x^2 \text{ sen } (8 \ln x).$$

Para adecuar la segunda condición inicial, necesitamos derivar

$$y'(x) = c_2\big(8x \cos (8 \ln x) + 2x \text{ sen } (8 \ln x)\big).$$

Puesto que $y'(1) = 1$, obtenemos de inmediato $c_2 = 1 \cdot 8$. Por lo tanto, la solución particular que satisface ambas condiciones iniciales es

$$y(x) = \frac{1}{8} x^2 \text{ sen } (8 \ln x).$$

Dado que $-1 \leq \text{sen } (8 \ln x) \leq 1$, la solución satisface

$$-\frac{x^2}{8} \leq y(x) \leq \frac{x^2}{8}.$$

La gráfica de la solución se presenta en la figura 17.8. ■

Ejercicios 17.4

En los ejercicios 1 a 24, determine la solución general para la ecuación de Euler dada. Suponga que $x > 0$.

1. $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$
2. $x^2y'' + xy' - 4y = 0$
3. $x^2y'' - 6y = 0$
4. $x^2y'' + xy' - y = 0$
5. $x^2y'' - 5xy' + 8y = 0$
6. $2x^2y'' + 7xy' + 2y = 0$
7. $3x^2y'' + 4xy' = 0$
8. $x^2y'' + 6xy' + 4y = 0$
9. $x^2y'' - xy' + y = 0$
10. $x^2y'' - xy' + 2y = 0$
11. $x^2y'' - xy' + 5y = 0$
12. $x^2y'' + 7xy' + 13y = 0$
13. $x^2y'' + 3xy' + 10y = 0$
14. $x^2y'' - 5xy' + 10y = 0$
15. $4x^2y'' + 8xy' + 5y = 0$
16. $4x^2y'' - 4xy' + 5y = 0$
17. $x^2y'' + 3xy' + y = 0$
18. $x^2y'' - 3xy' + 9y = 0$
19. $x^2y'' + xy' = 0$
20. $4x^2y'' + y = 0$
21. $9x^2y'' + 15xy' + y = 0$
22. $16x^2y'' - 8xy' + 9y = 0$
23. $16x^2y'' + 56xy' + 25y = 0$
24. $4x^2y'' - 16xy' + 25y = 0$

En los ejercicios 25 a 30, resuelva el problema de valor inicial solicitado.

25. $x^2y'' + 3xy' - 3y = 0, \quad y(1) = 1, \; y'(1) = -1$
26. $6x^2y'' + 7xy' - 2y = 0, \quad y(1) = 0, \; y'(1) = 1$
27. $x^2y'' - xy' + y = 0, \quad y(1) = 1, \; y'(1) = 1$
28. $x^2y'' + 7xy' + 9y = 0, \quad y(1) = 1, \; y'(1) = 0$
29. $x^2y'' - xy' + 2y = 0, \quad y(1) = -1, \; y'(1) = 1$
30. $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0, \quad y(1) = 1, \; y'(1) = 0$

17.5 Soluciones en series de potencias

En esta sección ampliaremos el estudio de las ecuaciones homogéneas lineales de segundo orden con coeficientes variables. En las ecuaciones de Euler de la sección 17.4, la potencia de la variable x de coeficiente variable tenía que coincidir con el orden de la derivada con la cual se asociaba: x_2 con y'', x_1 con y' y x_0 $(= 1)$ con y. Aquí ignoramos ese requerimiento, de manera que podamos resolver ecuaciones más generales.

Método de solución

El **método de las series de potencias** para resolver ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden consiste en la obtención de los coeficientes de la serie de potencias

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots \tag{1}$$

que resuelve la ecuación. En la aplicación del método sustituimos la serie y sus derivadas en la ecuación diferencial para determinar los coeficientes c_0, c_1, $c_2, \ldots$ La técnica para la obtención de los coeficientes es parecida a la usada en el método de los coeficientes indeterminados presentada en la sección 17.2.

En el primer ejemplo comprobaremos el método con el establecimiento de una ecuación simple cuya solución general ya conocemos. Esto hace más accesibles las soluciones expresadas en forma de series.

EJEMPLO 1 Resuelva la ecuación $y'' + y = 0$ por el método de las series de potencias.

Solución Suponemos que la solución de la serie toma la forma de

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

y calculamos las derivadas

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \qquad \text{y} \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}.$$

La sustitución de estas formas en la ecuación de segundo orden nos da

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

En seguida, igualamos los coeficientes de cada potencia de x con cero, como se resume en la siguiente tabla.

Potencia de x	**Coeficiente de la ecuación**		
x^0	$2(1)c_2 + c_0 = 0$	o	$c_2 = -\frac{1}{2} c_0$
x^1	$3(2)c_3 + c_1 = 0$	o	$c_3 = -\frac{1}{3 \cdot 2} c_1$
x^2	$4(3)c_4 + c_2 = 0$	o	$c_4 = -\frac{1}{4 \cdot 3} c_2$
x^3	$5(4)c_5 + c_3 = 0$	o	$c_5 = -\frac{1}{5 \cdot 4} c_3$
x^4	$6(5)c_6 + c_4 = 0$	o	$c_6 = -\frac{1}{6 \cdot 5} c_4$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x^{n-2}	$n(n-1)c_n + c_{n-2} = 0$	o	$c_n = -\frac{1}{n(n-1)} c_{n-2}$

En la tabla observamos que los coeficientes con índices pares ($n = 2k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$) se relacionan entre sí y los coeficientes con índices impares ($n = 2k + 1$) también están relacionados. Intentamos con cada grupo en su momento.

Índices pares: Aquí $n = 2k$, de manera que la potencia es x^{2k-2}. A partir de la última línea de la tabla,

$$2k(2k-1)c_{2k} + c_{2k-2} = 0$$

o bien,

$$c_{2k} = -\frac{1}{2k(2k-1)} c_{2k-2}.$$

De esta relación recurrente, tenemos

$$c_{2k} = \left[-\frac{1}{2k(2k-1)}\right]\left[-\frac{1}{(2k-2)(2k-3)}\right]\cdots\left[-\frac{1}{4(3)}\right]\left[-\frac{1}{2}\right]c_0$$

$$= \frac{(-1)^k}{(2k)!}\,c_0.$$

Índices impares: Aquí $n = 2k+1$, de manera que la potencia es x^{2k-1}. Al sustituir esto en la última línea de la tabla se produce

$$(2k+1)(2k)c_{2k+1} + c_{2k-1} = 0$$

o bien,

$$c_{2k+1} = -\frac{1}{(2k+1)(2k)}\,c_{2k-1}.$$

Por lo tanto,

$$c_{2k+1} = \left[-\frac{1}{(2k+1)(2k)}\right]\left[-\frac{1}{(2k-1)(2k-2)}\right]\cdots\left[-\frac{1}{5(4)}\right]\left[-\frac{1}{3(2)}\right]c_1$$

$$= \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,c_1.$$

Al escribir la serie de potencias agrupando las potencias pares e impares y sustituir los coeficientes resulta

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1}x^{2k+1}$$

$$= c_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + c_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}.$$

De la tabla 9.1 en la sección 9.10, vemos que la primera serie del lado derecho de la última ecuación representa la función coseno y la segunda serie representa el seno. Así, la solución general de $y'' + y = 0$ es

$$y = c_0 \cos x + c_1 \operatorname{sen} x.$$ ■

EJEMPLO 2 Encuentre la solución general de $y'' + xy' + y = 0$.

Solución Suponemos que la solución es la serie de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

y calculamos las derivadas

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} \qquad \text{y} \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}.$$

La sustitución de estas series en la ecuación de segundo orden nos da

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Igualamos los coeficientes de cada potencia de x con cero como se resume en la siguiente tabla.

Potencia de x	**Ecuación del coeficiente**		
x^0	$2(1)c_2 + c_0 = 0$	o	$c_2 = -\frac{1}{2}c_0$
x^1	$3(2)c_3 + c_1 + c_1 = 0$	o	$c_3 = -\frac{1}{3}c_1$
x^2	$4(3)c_4 + 2c_2 + c_2 = 0$	o	$c_4 = -\frac{1}{4}c_2$
x^3	$5(4)c_5 + 3c_3 + c_3 = 0$	o	$c_5 = -\frac{1}{5}c_3$
x^4	$6(5)c_6 + 4c_4 + c_4 = 0$	o	$c_6 = -\frac{1}{6}c_4$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x^n	$(n+2)(n+1)c_{n+2} + (n+1)c_n = 0$	o	$c_{n+2} = -\dfrac{1}{n+2}c_n$

En la tabla se observa que los coeficientes con índice par están relacionados y los coeficientes con índice impar también lo están.

Índices pares: Aquí $n = 2k-2$, de manera que la potencia es x^{2k-2}. A partir de la última línea de la tabla,

$$c_{2k} = -\frac{1}{2k}c_{2k-2}.$$

De esta relación recurrente obtenemos

$$\begin{aligned} c_{2k} &= \left(-\frac{1}{2k}\right)\left(-\frac{1}{2k-2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)c_0 \\ &= \frac{(-1)^k}{(2)(4)(6)\cdots(2k)}c_0. \end{aligned}$$

Índices impares: Aquí $n = 2k-1$, entonces, la potencia es x^{2k-1}. De la última línea de la tabla,

$$c_{2k+1} = -\frac{1}{2k+1}c_{2k-1}.$$

A partir de esta relación recurrente obtenemos

$$\begin{aligned} c_{2k+1} &= \left(-\frac{1}{2k+1}\right)\left(-\frac{1}{2k-1}\right)\cdots\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)c_1 \\ &= \frac{(-1)^k}{(3)(5)\cdots(2k+1)}c_1. \end{aligned}$$

Al escribir la serie de potencias para agrupar sus potencias pares e impares y sustituir los coeficientes tenemos

$$\begin{aligned} y &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1}x^{2k+1} \\ &= c_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2)(4)\cdots(2k)}x^{2k} + c_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(3)(5)\cdots(2k+1)}x^{2k+1}. \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 3 Obtenga la solución general de

$$(1-x^2)y'' - 6xy' - 4y = 0, \qquad \cdot x \cdot < 1.$$

Solución Observe que el coeficiente de la mayor derivada es cero cuando $x = \pm 1$. De esta manera, suponemos que el intervalo solución es I: $-1 < x < 1$. Al sustituir en la serie de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

y sus derivadas nos da

$$(1 - x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 6\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0,$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - 6\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Luego, igualamos los coeficientes de cada potencia de x con cero, como se resume en la siguiente tabla.

Potencia de x	**Ecuación del coeficiente**		
x^0	$2(1)c_2 - 4c_0 = 0$	o	$c_2 = \frac{4}{2}c_0$
x^1	$3(2)c_3 - 6(1)c_1 - 4c_1 = 0$	o	$c_3 = \frac{5}{3}c_1$
x^2	$4(3)c_4 - 2(1)c_2 - 6(2)c_2 - 4c_2 = 0$	o	$c_4 = \frac{6}{4}c_2$
x^3	$5(4)c_5 - 3(2)c_3 - 6(3)c_3 - 4c_3 = 0$	o	$c_5 = \frac{7}{5}c_3$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x^n	$(n+2)(n+1)c_{n+2} - [n(n-1) + 6n + 4]c_n = 0$		
	$(n+2)(n+1)c_{n+2} - (n+4)(n+1)c_n = 0$	o	$c_{n+2} = \frac{n+4}{n+2}c_n$

Observe otra vez que los coeficientes con índices pares están interrelacionados, así como los coeficientes con índices impares.

Índices pares: Aquí $n = 2k - 2$, de manera que la potencia es x^{2k}. A partir de la columna de la derecha y de la última línea de la tabla tenemos

$$\begin{aligned} c_{2k} &= \frac{2k+2}{2k}c_{2k-2} \\ &= \left(\frac{2k+2}{2k}\right)\left(\frac{2k}{2k-2}\right)\left(\frac{2k-2}{2k-4}\right)\cdots\frac{6}{4}\left(\frac{4}{2}\right)c_0 \\ &= (k+1)c_0. \end{aligned}$$

Índices impares: Aquí $n = 2k - 1$. De esta manera, la potencia es x^{2k+1}. A partir de la columna de la derecha y la última línea de la tabla,

$$\begin{aligned} c_{2k+1} &= \frac{2k+3}{2k+1}c_{2k-1} \\ &= \left(\frac{2k+3}{2k+1}\right)\left(\frac{2k+1}{2k-1}\right)\left(\frac{2k-1}{2k-3}\right)\cdots\frac{7}{5}\left(\frac{5}{3}\right)c_1 \\ &= \frac{2k+3}{3}c_1. \end{aligned}$$

La solución general es

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1}x^{2k+1} \\ &= c_0\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^{2k} + c_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+3}{3}x^{2k+1}. \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 4 Encuentre la solución general de $y'' - 2xy' + y = 0$.

Solución Suponiendo que

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Al sustituir en la ecuación diferencial tenemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

En seguida determinamos los coeficientes, listándolos en la siguiente tabla.

Potencia de x	**Ecuación del coeficiente**		
x^0	$2(1)c_2 + c_0 = 0$	o	$c_2 = -\frac{1}{2}c_0$
x^1	$3(2)c_3 - 2c_1 + c_1 = 0$	o	$c_3 = \frac{1}{3\cdot 2}c_1$
x^2	$4(3)c_4 - 4c_2 + c_2 = 0$	o	$c_4 = \frac{3}{4\cdot 3}c_2$
x^3	$5(4)c_5 - 6c_3 + c_3 = 0$	o	$c_5 = \frac{5}{5\cdot 4}c_3$
x^4	$6(5)c_6 - 8c_4 + c_4 = 0$	o	$c_6 = \frac{7}{6\cdot 5}c_4$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x^n	$(n+2)(n+1)c_{n+2} - (2n-1)c_n = 0$	o	$c_{n+2} = \frac{2n-1}{(n+2)(n+1)}c_n$

De la relación recurrente

$$c_{n+2} = \frac{2n-1}{(n+2)(n+1)}c_n,$$

escribimos los primeros términos de cada serie para la solución general:

$$y = c_0\left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4!}x^4 - \frac{21}{6!}x^6 - \cdots\right) + c_1\left(x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{5}{5!}x^5 + \frac{45}{7!}x^7 + \cdots\right).$$

■

Ejercicios 17.5

En los ejercicios 1 a 18, use las series de potencia para obtener la solución general de la ecuación diferencial.

1. $y'' + 2y' = 0$
2. $y'' + 2y' + y = 0$
3. $y'' + 4y = 0$
4. $y'' - 3y' + 2y = 0$
5. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$
6. $y'' - xy' + y = 0$
7. $(1 + x)y'' - y = 0$
8. $(1 - x^2)y'' - 4xy' + 6y = 0$
9. $(x^2 - 1)y'' + 2xy' - 2y = 0$
10. $y'' + y' - x^2y = 0$
11. $(x^2 - 1)y'' - 6y = 0$
12. $xy'' - (x + 2)y' + 2y = 0$
13. $(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 0$
14. $y'' - 2xy' + 4y = 0$
15. $y'' - 2xy' + 3y = 0$
16. $(1 - x^2)y'' - xy' + 4y = 0$
17. $y'' - xy' + 3y = 0$
18. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$

Apéndices

A.1 Números reales y recta de los reales

En esta sección haremos un repaso de los números reales, las desigualdades, los intervalos y los valores absolutos.

Números reales

Gran parte del cálculo se basa en las propiedades del sistema de los números reales. Los **números reales** son números que se pueden expresar como decimales, tales como

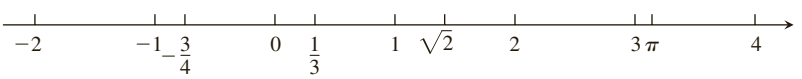
$$-\frac{3}{4} = -0.75000\ldots$$

$$\frac{1}{3} = 0.33333\ldots$$

$$\sqrt{2} = 1.4142\ldots$$

Los puntos suspensivos (...) indican, en cada caso, que la secuencia de dígitos decimales se prolonga sin fin. Cada expansión decimal concebible representa un número real, aunque algunos números tienen dos representaciones. Por ejemplo, los decimales infinitos .999... y 1.000... representan el mismo número real 1. Un enunciado similar también se cumple para una fila infinita de nueves.

Los números reales se pueden representar geométricamente como puntos en una recta numérica denominada la **recta real**.



El símbolo $\mathbb{R}$ representa indistintamente el sistema de números reales o la recta real.

Las propiedades del sistema de los números reales se dividen en tres categorías: algebraicas, de orden y de completitud. Las **propiedades algebraicas** nos dicen que los números reales se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir (excepto entre 0), para producir más números reales de acuerdo con las reglas usuales de la aritmética. *Nunca se puede dividir entre* 0.

En el apéndice 6 se describen las **propiedades de orden** del sistema de números reales. Las reglas que aparecen en el margen izquierdo se pueden deducir a partir de ellas; el símbolo $\Rightarrow$ quiere decir "implica".

Observe las reglas de multiplicación de una desigualdad por un número. La multiplicación por un número positivo preserva la desigualdad; la multiplicación por un número negativo invierte la desigualdad. Además, la reciprocidad invierte la desigualdad para números del mismo signo. Por ejemplo, $2 < 5$, pero $-2 > -5$ y $1/2 > 1/5$.

La **propiedad de completitud** del sistema de números reales es más profunda y difícil de definir con exactitud. Sin embargo, la propiedad es esencial para la idea de límite (capí-

REGLAS DE LAS DESIGUALDADES

Si a, b y c son números reales, entonces:

1. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
2. $a < b \Rightarrow a - c < b - c$
3. $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow ac < bc$
4. $a < b$ y $c < 0 \Rightarrow bc < ac$
   Caso especial:
   $a < b \Rightarrow -b < -a$
5. $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$
6. Si a y b son positivos, o bien, ambos son negativos, entonces,
   $a < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

tulo 2). En términos generales, esta propiedad afirma que existen suficientes números reales para "completar" la recta de números reales, en el sentido de que no hay "huecos" o "espacios" en ella. Muchos teoremas del cálculo serían inválidos si el sistema de números reales no estuviera completo. El tema se trata con mayor profundidad en un curso más avanzado, pero el apéndice 6 sugiere lo que está implicado y cómo están construidos los números reales.

Se distinguen tres subconjuntos especiales de números reales.

1. Los **números naturales**, a saber, $1, 2, 3, 4, \ldots$
2. Los **números enteros**, $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$
3. Los **números racionales**, es decir, los números que se pueden expresar en forma de una fracción m/n, donde m y n son enteros y $n \neq 0$. Algunos ejemplos son

$$\frac{1}{3}, \quad -\frac{4}{9} = \frac{-4}{9} = \frac{4}{-9}, \quad \frac{200}{13} \qquad \text{y} \qquad 57 = \frac{57}{1}.$$

Los números racionales son exactamente los números reales con sucesiones decimales que pueden ser

a) terminales (ya que incluyen una cadena infinita de ceros), por ejemplo,

$$\frac{3}{4} = 0.75000 \ldots = 0.75 \qquad \text{o bien,}$$

b) periódicos (terminan en un bloque de dígitos que se repiten una y otra vez), por ejemplo,

$$\frac{23}{11} = 2.090909 \ldots = 2.\overline{09}$$

La barra indica el bloque de dígitos que se repite.

Una sucesión decimal terminal es un tipo especial de decimal periódico, ya que los ceros se repiten.

El conjunto de números racionales tiene todas las propiedades algebraicas y de orden de los números reales, pero carece de la propiedad de completitud. Por ejemplo, no existe un número racional cuyo cuadrado sea 2; hay un "hueco" en la recta racional donde debería estar $\sqrt{2}$.

Los números reales que no son racionales se conocen como **números irracionales**. Se caracterizan por no detenerse y por no repetir sucesiones decimales. Algunos ejemplos son π, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$ y $\log_{10} 3$. Como todas las sucesiones decimales representan un número real, debe quedar claro que existe una infinidad de números irracionales. Tanto los números racionales como los irracionales se encuentran arbitrariamente cerca de cualquier punto en la recta real.

La notación de conjuntos es muy útil para especificar un subconjunto particular de los números reales. Un **conjunto** es una colección de objetos, y estos objetos son los **elementos** del conjunto. Si S es un conjunto, la notación $a \in S$ significa que a es un elemento de S, y la notación $a \notin S$ significa que a no es un elemento de S. Si S y T son conjuntos, entonces, $S \cup T$ es su **unión** y está formada con todos los elementos que pertenecen ya sea a S o a T (o a ambos, S y T). La **intersección** $S \cap T$ se forma con todos los elementos comunes de S y T. El **conjunto vacío** $\varnothing$ es el conjunto que no contiene elementos. Por ejemplo, la intersección de los números racionales y los números irracionales es el conjunto vacío.

Algunos conjuntos se pueden describir *listando* sus elementos entre llaves. Por ejemplo, el conjunto A formado por los números naturales (o enteros positivos) menores que 6 se expresa como

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

El conjunto completo de enteros se escribe como

$$\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}.$$

Otro modo de describir un conjunto es introducir en las llaves una regla que genera todos los elementos del conjunto. Por ejemplo, el conjunto

$$A = \{x \,|\, x \text{ es un entero y } 0 < x < 6\}$$

es el conjunto de enteros positivos menores que 6.

Intervalos

Un subconjunto de la recta real se denomina **intervalo** si contiene al menos dos números e incluye todos los números reales que se encuentran entre dos de cualquiera de sus elementos. Por ejemplo, el conjunto de todos los números reales x tales que $x > 6$ es un intervalo, al igual que el conjunto de todas las x tales que $-2 \le x \le 5$. El conjunto de todos los números reales diferentes de cero no es un intervalo porque 0 está ausente, de manera que el conjunto no cumple con tener todos los números reales entre -1 y 1 (por ejemplo).

Geométricamente, los intervalos son rayos y segmentos de recta en la recta real, junto con la recta real misma. Los intervalos de números que corresponden a segmentos de rectas son **intervalos finitos**; los intervalos que corresponden a rayos y la recta real son **intervalos infinitos**.

Se dice que un intervalo finito es **cerrado** si contiene sus dos puntos extremos, es **semiabierto** si contiene solamente uno de sus extremos, y es **abierto** si no contiene ninguno de sus extremos. Los extremos también se denominan **puntos límite**, ya que constituyen el **límite** del intervalo. Los puntos restantes del intervalo son **puntos interiores** y, juntos, forman el **interior** del intervalo. Los intervalos infinitos son cerrados si contienen un punto extremo finito, y abiertos si no es así. La recta real completa $\mathbb{R}$ es un intervalo infinito que es tanto abierto como cerrado. La tabla A.1 resume los diferentes tipos de intervalos.

TABLA A.1 Tipos de intervalos

Notación	Descripción del conjunto	Tipo	Gráfica
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	Abierto	
$[a, b]$	$\{x \mid a \le x \le b\}$	Cerrado	
$[a, b)$	$\{x \mid a \le x < b\}$	Semiabierto	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \le b\}$	Semiabierto	
(a, ∞)	$\{x \mid x > a\}$	Abierto	
$[a, \infty)$	$\{x \mid x \ge a\}$	Cerrado	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	Abierto	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \le b\}$	Cerrado	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto de todos los números reales)	Tanto abierto como cerrado	

Resolución de desigualdades

El proceso de obtención del intervalo o de los intervalos de números que satisfacen una desigualdad en x se denomina **resolución** de la desigualdad.

EJEMPLO 1 Resuelva las siguientes desigualdades y muestre sus conjuntos solución en la recta real.

a) $2x - 1 < x + 3$ *b)* $-\frac{x}{3} < 2x + 1$ *c)* $\frac{6}{x - 1} \ge 5$

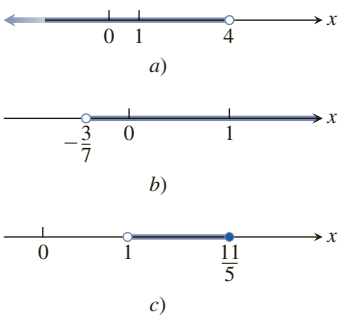


FIGURA A.1 Conjuntos solución de las desigualdades del ejemplo 1.

Solución

a)

$$\begin{aligned} 2x - 1 &< x + 3 \\ 2x &< x + 4 && \text{Se suma 1 en ambos lados.} \\ x &< 4 && \text{Se resta } x \text{ en ambos lados.} \end{aligned}$$

El conjunto solución es el intervalo abierto $(-\infty, 4)$ (figura A.1*a*).

b)

$$\begin{aligned} -\frac{x}{3} &< 2x + 1 \\ -x &< 6x + 3 && \text{Se multiplican ambos lados por 3.} \\ 0 &< 7x + 3 && \text{Se suma } x \text{ en ambos lados.} \\ -3 &< 7x && \text{Se resta 3 en ambos lados.} \\ -\frac{3}{7} &< x && \text{Se divide entre 7.} \end{aligned}$$

El conjunto solución es el intervalo abierto $(-3/7, \infty)$ (figura A.1*b*).

c) La desigualdad $6/(x-1) \geq 5$ se cumple sólo si $x > 1$, porque, de otra forma, $6/(x-1)$ no está definido o es negativo. Por lo tanto, $(x-1)$ es positivo y la desigualdad se conservará si multiplicamos ambos lados por $(x-1)$, y obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{6}{x-1} &\geq 5 \\ 6 &\geq 5x - 5 && \text{Se multiplican ambos lados por } (x-1). \\ 11 &\geq 5x && \text{Se suma 5 en ambos lados.} \\ \frac{11}{5} &\geq x. && \text{O bien, } x \leq \frac{11}{5}. \end{aligned}$$

El conjunto solución es el intervalo semiabierto $(1, 11/15]$ (figura A.1*c*). ■

Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número x, denotado con $|x|$, está definido por la fórmula

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

EJEMPLO 2 $|3| = 3, \quad |0| = 0, \quad |-5| = -(-5) = 5, \quad |-|a|| = |a|$ ■

Geométricamente, el valor absoluto de x es la distancia de x a 0 en la recta de números reales. Como las distancias siempre son positivas o 0, vemos que $|x| \geq 0$ para todo número real x, y $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$. Además,

$$|x - y| = \text{la distancia entre } x \text{ y } y$$

en la recta real (figura A.2).

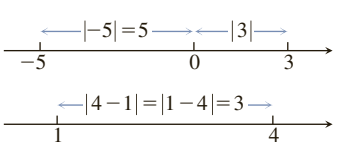


FIGURA A.2 Los valores absolutos indican distancias entre puntos de la recta numérica.

Como el símbolo $\sqrt{a}$ denota siempre la raíz cuadrada *no negativa* de a, una definición alternativa de $|x|$ es

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

Es importante recordar que $\sqrt{a^2} = |a|$. No se escribe $\sqrt{a^2} = a$, a menos que usted ya sepa que $a \geq 0$.

El valor absoluto tiene las siguientes propiedades. (En los ejercicios se le pedirá demostrar estas propiedades).

Propiedades del valor absoluto

1. $\lvert -a\rvert = \lvert a\rvert$	Un número y su inverso aditivo o negativo tienen el mismo valor absoluto.
2. $\lvert ab\rvert = \lvert a\rvert\lvert b\rvert$	El valor absoluto de un producto es el producto de los valores absolutos.
3. $\left\lvert \frac{a}{b}\right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$	El valor absoluto de un cociente es el cociente de los valores absolutos.
4. $\lvert a+b\rvert \le \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$	La **desigualdad del triángulo.** El valor absoluto de la suma de dos números es menor o igual que la suma de sus valores absolutos.

Observe que $|-a| \neq -|a|$. Por ejemplo, $|-3| = 3$, mientras que $-|3| = -3$. Si a y b tienen signo diferente, entonces, $|a+b|$ es menor que $|a| + |b|$. En el resto de los casos, $|a+b|$ es igual a $|a| + |b|$. Las barras de valor absoluto en expresiones como $|-3+5|$ funcionan como paréntesis: la aritmética dentro de ellas se realiza *antes* de tomar el valor absoluto.

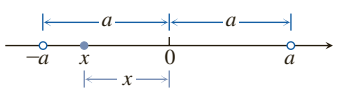


FIGURA A.3 $|x| < a$ significa que x se encuentra entre $-a$ y a.

EJEMPLO 3

$$|-3 + 5| = |2| = 2 < |-3| + |5| = 8$$
$$|3 + 5| = |8| = |3| + |5|$$
$$|-3 - 5| = |-8| = 8 = |-3| + |-5|$$

■

VALORES ABSOLUTOS E INTERVALOS

Si a es cualquier número positivo, entonces,

5. $|x| = a \iff x = \pm a$
6. $|x| < a \iff -a < x < a$
7. $|x| > a \iff x > a$ o $x < -a$
8. $|x| \le a \iff -a \le x \le a$
9. $|x| \ge a \iff x \ge a$ o $x \le -a$

La desigualdad $|x| < a$ indica que la distancia de x a 0 es menor que el número positivo a. Esto significa que x debe estar entre $-a$ y a, como se observa en la figura A.3.

Todos los enunciados de la tabla son consecuencia de la definición de valor absoluto y a menudo resultan de utilidad cuando se resuelven ecuaciones o desigualdades que involucran valores absolutos.

Los matemáticos suelen emplear el símbolo $\iff$ para denotar la relación lógica "si y sólo si". También significa "implica y es implicado por".

EJEMPLO 4 Resuelva la ecuación $|2x - 3| = 7$.

Solución Según la propiedad 5, $2x - 3 = \pm 7$, de modo que existen dos posibilidades:

$2x - 3 = 7$	$2x - 3 = -7$	Ecuaciones equivalentes sin valores absolutos
$2x = 10$	$2x = -4$	Se resuelven de la forma habitual.
$x = 5$	$x = -2$	

Las soluciones de $|2x - 3| = 7$ son $x = 5$ y $x = -2$. ■

EJEMPLO 5 Resuelva la desigualdad $\left|5 - \frac{2}{x}\right| < 1$.

Solución Tenemos que

$$\left|5 - \frac{2}{x}\right| < 1 \iff -1 < 5 - \frac{2}{x} < 1 \qquad \text{Propiedad 6}$$
$$\iff -6 < -\frac{2}{x} < -4 \qquad \text{Se resta 5.}$$
$$\iff 3 > \frac{1}{x} > 2 \qquad \text{Se multiplica por } -\frac{1}{2}.$$
$$\iff \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}. \qquad \text{Se toman los recíprocos.}$$

Observe cómo se usaron aquí las reglas de las desigualdades. La multiplicación por un número negativo invierte la desigualdad. Lo mismo sucede al tomar los recíprocos en una desigualdad en la que ambos lados son positivos. La desigualdad original se cumple si y sólo si $(1/3) < x < (1/2)$. El conjunto solución es el intervalo abierto $(1/3, 1/2)$. ■

Ejercicios A.1

1. Exprese $1/9$ como un decimal periódico, usando una barra para indicar los dígitos que se repiten. ¿Cuáles son las representaciones decimales de $2/9$, $3/9$, $8/9$ y $9/9$?

2. Si $2 < x < 6$, ¿cuáles de los siguientes enunciados acerca de x son necesariamente verdaderos, y cuáles no?

a) $0 < x < 4$ ***b)*** $0 < x - 2 < 4$

c) $1 < \frac{x}{2} < 3$ ***d)*** $\frac{1}{6} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$

e) $1 < \frac{6}{x} < 3$ ***f)*** $|x - 4| < 2$

g) $-6 < -x < 2$ ***h)*** $-6 < -x < -2$

En los ejercicios 3 a 6, resuelva las desigualdades y muestre los conjuntos solución en la recta real.

3. $-2x > 4$ **4.** $5x - 3 \le 7 - 3x$

5. $2x - \frac{1}{2} \ge 7x + \frac{7}{6}$ **6.** $\frac{4}{5}(x - 2) < \frac{1}{3}(x - 6)$

En los ejercicios 7 a 9, resuelva las ecuaciones.

7. $|y| = 3$ **8.** $|2t + 5| = 4$ **9.** $|8 - 3s| = \frac{9}{2}$

Resuelva las desigualdades en los ejercicios 10 a 17, expresando los conjuntos solución como intervalos o uniones de intervalos. Además, muestre cada conjunto solución en la recta real.

10. $|x| < 2$ **11.** $|t - 1| \le 3$ **12.** $|3y - 7| < 4$

13. $\left|\frac{z}{5} - 1\right| \le 1$ **14.** $\left|3 - \frac{1}{x}\right| < \frac{1}{2}$ **15.** $|2s| \ge 4$

16. $|1 - x| > 1$ **17.** $\left|\frac{r + 1}{2}\right| \ge 1$

Resuelva las desigualdades en los ejercicios 18 a 21. Exprese los conjuntos solución como intervalos o uniones de intervalos y muéstrelos en la recta real. Use el resultado $\sqrt{a^2} = |a|$ cuando sea apropiado.

18. $x^2 < 2$ **19.** $4 < x^2 < 9$

20. $(x - 1)^2 < 4$ **21.** $x^2 - x < 0$

22. No caiga en la trampa de pensar que $|-a| = a$. ¿Para qué números reales a, es verdadera esta ecuación? ¿Para qué números reales es falsa?

23. Resuelva la ecuación $|x - 1| = 1 - x$.

24. Una demostración de la desigualdad del triángulo Enuncie un argumento que justifique cada uno de los pasos numerados en la siguiente demostración de la desigualdad del triángulo.

$$\begin{aligned} |a + b|^2 &= (a + b)^2 && (1)\\ &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &\le a^2 + 2|a||b| + b^2 && (2)\\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 && (3)\\ &= (|a| + |b|)^2 \\ |a + b| &\le |a| + |b| && (4)\end{aligned}$$

25. Demuestre que $|ab| = |a||b|$ para números a y b cualesquiera.

26. Si $|x| \le 3$ y $x > -1/2$, ¿qué puede decir de x?

27. Grafique la desigualdad $|x| + |y| \le 1$.

28. Para cualquier número a, demuestre que $|-a| = |a|$.

29. Sea a cualquier número positivo. Demuestre que $|x| > a$ sí y sólo si $x > a$ o $x < -a$.

30. ***a)*** Si b es cualquier número real diferente de cero, demuestre que $|1/b| = 1/|b|$.

b) Demuestre que $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ para números a y b cualesquiera diferentes de cero.

A.2 Inducción matemática

Es posible demostrar que muchas fórmulas como

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2},$$

se cumplen para todos los enteros positivos n aplicando un axioma denominado *principio de inducción matemática*. Una demostración que utiliza este axioma se conoce como *demostración por inducción matemática* o simplemente *demostración por inducción*.

Los pasos para demostrar una fórmula por inducción son los siguientes:

1. Verifique que la fórmula se cumpla para $n = 1$.

2. Demuestre que si la fórmula es válida para cualquier entero positivo $n = k$, también lo es para el siguiente entero, $n = k + 1$.

El axioma de inducción afirma que una vez realizados estos pasos, la fórmula es válida para todos los enteros positivos n. De acuerdo con el paso 1, la fórmula se satisface para $n = 1$. De acuerdo con el paso 2, es válida para $n = 2$, y por lo tanto, según el paso 2, también se satisface para $n = 3$, para $n = 4$, y así sucesivamente. Si la primera ficha de dominó cae y la k-ésima ficha siempre cae sobre la $(k + 1)$-ésima ficha, entonces, todas las fichas caerán.

Desde otro punto de vista, suponga que tenemos una serie de enunciados S_1, S_2, . . . , S_n, . . . , uno por cada número entero positivo. Suponga también que podemos demostrar que la validez de uno de los enunciados implica que el siguiente enunciado en la secuencia también es verdadero. Suponga asimismo que podemos demostrar que S_1 es verdadera. Entonces, podemos concluir que los enunciados son ciertos a partir de S_1.

EJEMPLO 1 Utilice inducción matemática para demostrar que para cada entero positivo n,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Solución Realizamos la demostración ejecutando los dos pasos anteriores.

1. La fórmula se cumple para $n = 1$ porque

$$1 = \frac{1(1 + 1)}{2}.$$

2. Si la fórmula se cumple para $n = k$, ¿también se cumple para $n = k + 1$? La respuesta es sí, como lo demostraremos ahora. Si

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k + 1)}{2},$$

entonces,

$$1 + 2 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) = \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2}$$
$$= \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} = \frac{(k + 1)((k + 1) + 1)}{2}.$$

La última expresión de esta cadena de igualdades es la expresión $n(n + 1)/2$ para $n = (k + 1)$.

El principio de inducción matemática nos garantiza que la fórmula original es válida para todos los enteros positivos n. ■

En el ejemplo 4 de la sección 5.2 se realizó otra demostración de la fórmula obteniendo la suma de los primeros n enteros. Sin embargo, la demostración por inducción matemática es más general. Se puede utilizar para obtener las sumas de los cuadrados y los cubos de los primeros n enteros (ejercicios 9 y 10). He aquí otro ejemplo.

EJEMPLO 2 Demuestre por inducción matemática que para todos los enteros positivos n,

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Solución Hacemos la demostración aplicando los pasos de inducción matemática.

1. La fórmula se cumple para $n = 1$ porque

$$\frac{1}{2^1} = 1 - \frac{1}{2^1}.$$

2. Si

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k},$$

entonces,

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1 \cdot 2}{2^k \cdot 2} + \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$= 1 - \frac{2}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Por lo tanto, la fórmula original se cumple para $n = (k + 1)$ siempre que se cumpla para $n = k$.

Una vez que se han verificado estos pasos, el principio de inducción matemática garantiza que la fórmula es válida para todo entero positivo n. ■

Otros enteros iniciales

En lugar de iniciar en $n = 1$, algunos argumentos inductivos parten de otro entero. Los pasos de estos argumentos son los siguientes:

1. Verifique que la fórmula se satisfaga para $n = n_1$ (el primer entero apropiado).

2. Demuestre que si la fórmula es válida para cualquier entero $n = k \geq n_1$, también lo es para $n = (k + 1)$.

Una vez realizados estos pasos, el principio de inducción matemática garantiza que la fórmula es válida para toda $n \geq n_1$.

EJEMPLO 3 Demuestre que $n! > 3^n$ si n es lo suficientemente grande.

Solución ¿Qué tan grande debe ser dicho valor? Experimentemos:

n	1	2	3	4	5	6	7
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040
3^n	3	9	27	81	243	729	2187

Parece que $n! > 3^n$ cuando $n \geq 7$. Para estar seguros, apliquemos la inducción matemática. Consideramos $n_1 = 7$ en el paso 1 y ejecutamos el paso 2.

Supongamos que $k! > 3^k$ para alguna $k \geq 7$. Entonces,

$$(k + 1)! = (k + 1)(k!) > (k + 1)3^k > 7 \cdot 3^k > 3^{k+1}.$$

Por lo tanto, para $k \geq 7$,

$$k! > 3^k \quad \text{implica} \quad (k + 1)! > 3^{k+1}.$$

El principio de inducción matemática garantiza ahora que $n! \geq 3^n$ para toda $n \geq 7$. ■

Demostración de la regla de la suma de la derivada para sumas de muchas funciones finitas

Demostramos el enunciado

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_n}{dx}$$

por inducción matemática. El enunciado es verdadero para $n = 2$, como se demostró en la sección 3.3. Éste es el paso 1 de la prueba por inducción.

El paso 2 consiste en demostrar que si el enunciado es verdadero para cualquier entero positivo $n = k$, donde $k \geq n_0 = 2$, entonces, también es verdadero para $n = k + 1$. Entonces, se supone que

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_k) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_k}{dx}. \tag{1}$$

Por lo cual,

$$\frac{d}{dx}\underbrace{(u_1 + u_2 + \cdots + u_k}_{\text{Llamamos } u \text{ a la función definida por esta suma.}} + \underbrace{u_{k+1})}_{\text{Llamamos } v \text{ a esta función.}}$$

$$= \frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_k) + \frac{du_{k+1}}{dx} \qquad \text{Regla de la suma para } \frac{d}{dx}(u + v)$$

$$= \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_k}{dx} + \frac{du_{k+1}}{dx}. \qquad \text{Ecuación (1)}$$

Con estos pasos verificados, el principio de inducción matemática garantiza ahora la regla de la suma para todo entero $n \geq 2$.

Ejercicios A.2

1. Suponiendo que la desigualdad del triángulo $|a+b| \leq |a| + |b|$ es válida para dos números cualesquiera a y b, demuestre que

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

para números n cualesquiera.

2. Demuestre que si $r \neq 1$, entonces,

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

para todo entero positivo n.

3. Use la regla del producto, $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$, y considere el hecho de que $\frac{d}{dx}(x) = 1$ con la finalidad de demostrar que $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ para todo entero positivo n.

4. Suponga que una función $f(x)$ tiene la propiedad de que $f(x_1x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ para dos números positivos x_1 y x_2 cualesquiera. Demuestre que

$$f(x_1x_2 \cdots x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$$

para el producto de n números positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cualesquiera.

5. Demuestre que

$$\frac{2}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^n}$$

para todo entero positivo n.

6. Demuestre que $n! > n^3$ si n es lo suficientemente grande.

7. Demuestre que $2^n > n^2$ si n es lo suficientemente grande.

8. Demuestre que $2^n \geq 1/8$ para $n \geq -3$.

9. Sumas de cuadrados Demuestre que la suma de los cuadrados de los primeros n enteros positivos es

$$\frac{n\left(n + \frac{1}{2}\right)(n + 1)}{3}.$$

10. Sumas de cubos Demuestre que la suma de los cubos de los primeros n enteros positivos es $(n(n+1)/2)^2$.

11. Reglas para sumas finitas Demuestre que las siguientes reglas para sumas finitas son válidas para todo entero positivo n. (Vea la sección 5.2).

a) $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

b) $\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$

c) $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$ (cualquier número c)

d) $\sum_{k=1}^{n} a_k = n \cdot c$ (si a_k tiene el valor constante c)

12. Demuestre que $|x^n| = |x|^n$ para todo número positivo n y todo número real x.

A.3 Rectas, circunferencias y parábolas

En esta sección se repasan los conceptos de coordenadas, rectas, distancia, circunferencias y parábolas en el plano. También se analiza la noción de incremento.

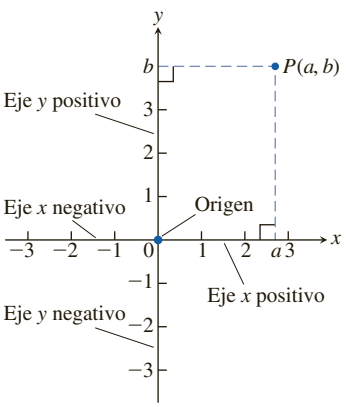


FIGURA A.4 Las coordenadas cartesianas en el plano se basan en dos ejes perpendiculares que se intersecan en el origen.

Coordenadas cartesianas en el plano

En el apéndice 1 identificamos los puntos de la recta con números reales, asignándoles coordenadas. Los puntos en el plano se pueden identificar con pares ordenados de números reales. Para empezar, dibujamos dos rectas coordenadas perpendiculares que se intersecan en el punto 0 de cada recta. Estas rectas se denominan **ejes de coordenadas** en el plano. En el eje horizontal, el eje x, los números se denotan como x y aumentan hacia la derecha. En el eje vertical, el eje y, los números se denotan como y y aumentan hacia arriba (figura A.4). Por lo tanto, "hacia arriba" y "a la derecha" son direcciones positivas, mientras que "hacia abajo" y "a la izquierda" son direcciones negativas. El **origen** O del sistema coordenado, también identificado como 0, es el punto del plano donde x y y son iguales a cero.

Si P es cualquier punto en el plano, se puede localizar con precisión con un solo par ordenado de números reales de la siguiente manera. Se dibujan rectas, que pasen por P, perpendiculares a los dos ejes de coordenadas. Estas rectas intersecan los ejes en los puntos con coordenadas a y b (figura A.4). El par ordenado (a, b) se asigna al punto P y se denomina su **par de coordenadas**. El primer número, a, es la **coordenada *x*** (o **abscisa**) de P; el segundo número, b, es la **coordenada *y*** (u **ordenada**) de P. La coordenada x de todos los puntos sobre el eje y es igual a 0. La coordenada y de todos los puntos sobre el eje x es igual a 0. El origen es el punto (0, 0).

Teniendo un par ordenado (a, b), se puede invertir el proceso y ubicar el correspondiente punto P en el plano. A menudo se identifica P con el par ordenado y se escribe $P(a, b)$. Algunas veces también nos referimos "al punto (a, b)", siempre y cuando quede claro a partir del contexto que (a, b) se refiere a un punto en el plano y no a un intervalo abierto en la recta de los números reales. En la figura A.5 se muestran varios puntos identificados con sus coordenadas.

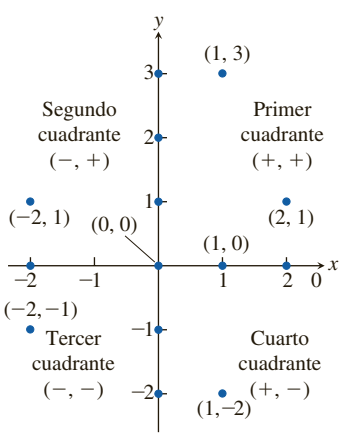


FIGURA A.5 Puntos identificados en el plano de coordenadas xy o cartesiano. Todos los puntos sobre los ejes de coordenadas tienen pares ordenados, pero normalmente se identifican con un solo número real [de modo que (1,0) en el eje x se identifica como 1]. Observe los patrones de signos de las coordenadas en los diferentes cuadrantes.

Este sistema de coordenadas se denomina **sistema coordenado rectangular** o **sistema de coordenadas cartesianas** (en honor del matemático francés del siglo XVII, René Descartes). Los ejes de coordenadas de este plano de coordenadas o cartesiano dividen el plano en cuatro regiones llamadas **cuadrantes**, numerados en sentido contrario al de las manecillas del reloj, como se muestra en la figura A.5.

La **gráfica** de una ecuación o de una desigualdad en las variables x y y es el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ en el plano cuyas coordenadas satisfacen la ecuación o la desigualdad. Cuando representamos datos en el plano coordenado o graficamos fórmulas cuyas variables tienen diferentes unidades de medida, no necesitamos usar la misma escala en los dos ejes. Si dibujamos tiempo contra empuje del motor de un cohete, por ejemplo, no hay razón para colocar la marca correspondiente a 1 s en el eje del tiempo a la misma distancia del origen que se ubica la marca de 1 lb en el eje del empuje.

Por lo regular, cuando graficamos funciones cuyas variables no representan mediciones físicas y cuando dibujamos figuras en el plano coordenado para estudiar su geometría y trigonometría, tratamos de utilizar escalas idénticas en los ejes. Así, una unidad vertical de distancia se ve igual que una unidad horizontal. Como en el mapa de un topógrafo o una regla de dibujo, los segmentos de recta que se supone tienen la misma longitud se verán iguales, y los ángulos que se supone son congruentes se verán como tales.

En las pantallas de las computadoras y de las calculadoras, la situación es distinta. Las escalas horizontales y verticales en gráficas generadas por una máquina usualmente difieren, y existen distorsiones en distancias, pendientes y ángulos. Es probable que las circunferencias parezcan elipses, los rectángulos tengan aspecto de cuadrados, los ángulos rectos se vean como si fueran agudos u obtusos, etcétera. En la sección 1.4 analizamos con detalle estas pantallas y sus distorsiones.

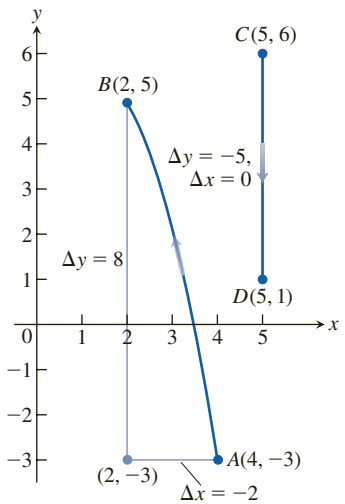


FIGURA A.6 Los incrementos de las coordenadas pueden ser positivos, negativos o cero (ejemplo 1).

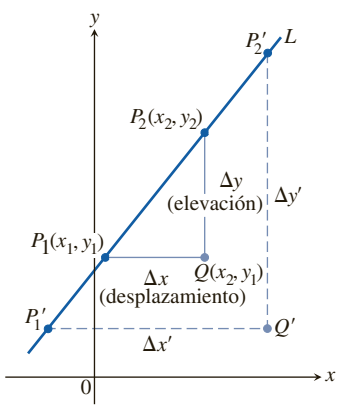


FIGURA A.7 Los triángulos P_1QP_2 y $P_1'Q'P_2'$ son semejantes, de modo que la razón de sus lados tiene el mismo valor para dos puntos cualesquiera de la recta. Este valor común es la pendiente de la recta.

Incrementos y líneas rectas

Cuando una partícula se mueve en el plano de un punto a otro, los cambios netos en sus coordenadas se denominan *incrementos*, y se calculan restando las coordenadas del punto inicial de las coordenadas del punto final. Si x cambia de x_1 a x_2, el **incremento** en x es

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

EJEMPLO 1 Al ir del punto $A(4, -3)$ al punto $B(2, 5)$, los incrementos en las coordenadas x y y son

$$\Delta x = 2 - 4 = -2, \qquad \Delta y = 5 - (-3) = 8.$$

De $C(5, 6)$ a $D(5, 1)$, los incrementos en las coordenadas son

$$\Delta x = 5 - 5 = 0, \qquad \Delta y = 1 - 6 = -5.$$

Observe la figura A.6. ■

Dados dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en el plano, llamamos a los incrementos $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta y = y_2 - y_1$ el **desplazamiento** y la **elevación**, respectivamente, entre P_1 y P_2. Estos dos puntos siempre definen una línea recta única (por lo general, llamada simplemente recta) que pasa por ambos puntos. Y la recta se identifica como P_1P_2.

Cualquier recta que no es vertical en el plano tiene la propiedad de que la razón

$$m = \frac{\text{elevación}}{\text{desplazamiento}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

tiene el mismo valor para cualquier elección de los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ de la recta (figura A.7). Esto se debe a que las razones de los lados correspondientes en triángulos semejantes son iguales.

DEFINICIÓN La razón constante

$$m = \frac{\text{elevación}}{\text{desplazamiento}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

es la **pendiente** de la recta P_1P_2 que no es vertical.

La pendiente nos indica la dirección (hacia arriba o hacia abajo) y lo pronunciado de la inclinación de una recta. Una recta con pendiente positiva se eleva hacia la derecha; una con pendiente negativa desciende hacia la derecha (figura A.8). Cuanto mayor sea el valor absoluto de la pendiente, más rápido se eleva o desciende. La pendiente de una recta vertical *no está definida*. Como el desplazamiento Δx es cero en una recta vertical, no se puede formar la razón de inclinación m.

La dirección y el pronunciamiento de la inclinación de una recta también se pueden medir con un ángulo. El ángulo de inclinación de una recta que cruza el eje x es el ángulo más pequeño en sentido contrario al de las manecillas del reloj del eje x a la recta (figura A.9). La inclinación de una recta horizontal es de 0°. La inclinación de una recta vertical es de 90°. Si ϕ (la letra griega *fi*) representa la inclinación de una recta, entonces, $0 \le \phi < 180°$.

En la figura A.10 se muestra la relación entre la pendiente m de una recta que no es vertical y el ángulo de inclinación ϕ de la recta:

$$m = \tan \phi.$$

Las líneas rectas tienen ecuaciones relativamente sencillas. Todos los puntos de una *recta vertical* que pasa por el punto a en el eje x tienen una coordenada x igual a a. Por lo tanto, $x = a$ es la ecuación de una recta vertical. De manera análoga, $y = b$ es una ecuación de la *recta horizontal* que cruza el eje y en b. (Vea la figura A.11).

Se puede escribir una ecuación para la línea recta no vertical L si conocemos la pendiente m y las coordenadas de un punto $P_1(x_1, y_1)$ de ella. Si $P(x, y)$ es *cualquier* otro punto

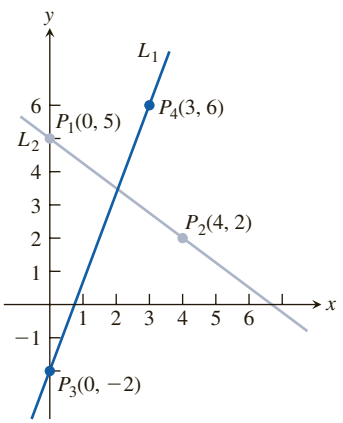


FIGURA A.8 La pendiente de L_1 es

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - (-2)}{3 - 0} = \frac{8}{3}.$$

Es decir, y se incrementa 8 unidades cada vez que x se incrementa 3 unidades. La pendiente de L_2 es

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 - 5}{4 - 0} = \frac{-3}{4}.$$

Es decir, y disminuye 3 unidades cada vez que x aumenta 4 unidades.

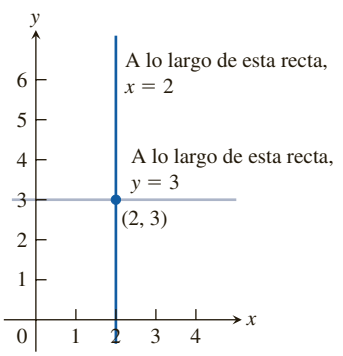


FIGURA A.11 La ecuación estándar de las rectas vertical y horizontal que pasan por (2, 3) son $x = 2$ y $y = 3$.

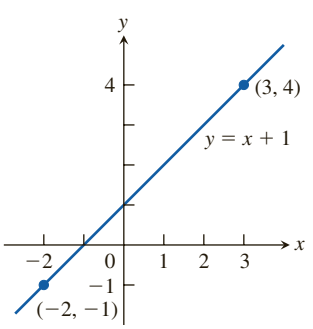


FIGURA A.12 Recta del ejemplo 3. De cualquier manera, $y = x + 1$ es una ecuación de la recta (figura A.12). ■

de L, entonces, se pueden usar los dos puntos P_1 y P para calcular la pendiente,

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

de manera que

$$y - y_1 = m(x - x_1), \qquad \text{o} \qquad y = y_1 + m(x - x_1).$$

La ecuación

$$y = y_1 + m(x - x_1)$$

es la **ecuación punto-pendiente** de la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y tiene pendiente m.

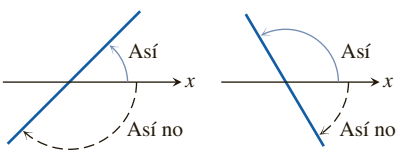


FIGURA A.9 Los ángulos de inclinación se miden en sentido contrario al de las manecillas del reloj, a partir del eje x.

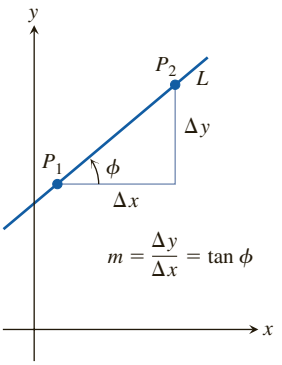


FIGURA A.10 La pendiente de una recta no vertical es la tangente de su ángulo de inclinación.

EJEMPLO 2 Escriba una ecuación para la recta que pasa por el punto (2, 3) y tiene pendiente de $-3/2$.

Solución Sustituimos $x_1 = 2$, $y_1 = 3$ y $m = -3/2$ en la ecuación punto-pendiente para obtener

$$y = 3 - \frac{3}{2}(x - 2), \qquad \text{o} \qquad y = -\frac{3}{2}x + 6.$$

Cuando $x = 0$, $y = 6$, así que la recta hace intersección con el eje y en $y = 6$. ■

EJEMPLO 3 Escriba una ecuación para la recta que pasa por los puntos $(-2, -1)$ y $(3, 4)$.

Solución La pendiente de la recta es

$$m = \frac{-1 - 4}{-2 - 3} = \frac{-5}{-5} = 1.$$

Podemos usar esta pendiente con cualquiera de los dos puntos dados en la ecuación punto-pendiente:

Con $(x_1, y_1) = (-2, -1)$	**Con $(x_1, y_1) = (3, 4)$**
$y = -1 + 1 \cdot (x - (-2))$	$y = 4 + 1 \cdot (x - 3)$
$y = -1 + x + 2$	$y = 4 + x - 3$
$y = x + 1$	$y = x + 1$

El mismo resultado

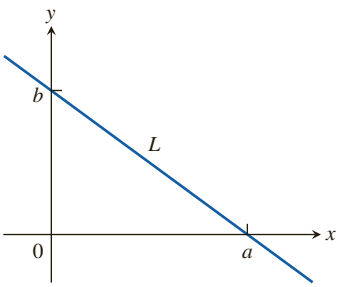


FIGURA A.13 La recta L tiene una intersección x en a y una intersección y en b.

La coordenada y del punto donde una recta no vertical interseca el eje y se denomina la **intersección y** de la recta. De manera similar, la **intersección x** de una recta no horizontal es la coordenada del punto donde cruza el eje x (figura A.13). Una recta con pendiente m e intersección y en b pasa por el punto $(0, b)$, así que tiene la ecuación

$$y = b + m(x - 0), \qquad \text{o simplemente,} \qquad y = mx + b.$$

La ecuación

$$y = mx + b$$

se denomina la **ecuación pendiente-intersección** de la recta con pendiente m e intersección y en b.

Las rectas con ecuaciones de la forma $y = mx$ tienen una intersección y igual a 0 y pasan por el origen. Las ecuaciones de las rectas se denominan ecuaciones **lineales**.

La ecuación

$$Ax + By = C \qquad (A \text{ y } B \text{ no son ambas iguales a } 0)$$

se denomina **ecuación lineal general** en x y y porque su gráfica siempre representa una recta, y todas las rectas tienen una ecuación de esta forma (incluyendo las rectas con pendiente indefinida).

Rectas paralelas y perpendiculares

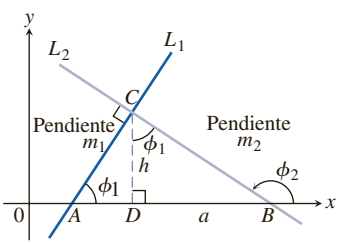


FIGURA A.14 El ΔADC es semejante al ΔCDB. Por lo tanto, ϕ_1 también es el ángulo superior en el ΔCDB. A partir de los lados del ΔCDB, obtenemos $\tan \phi_1 = a/h$.

Las rectas que son paralelas tienen ángulos de inclinación iguales, de modo que tienen la misma pendiente (si no son verticales). A la inversa, las rectas con pendientes iguales tienen ángulos de inclinación iguales y, por lo tanto, son paralelas.

Si dos rectas no verticales L_1 y L_2 son perpendiculares, sus pendientes m_1 y m_2 satisfacen el producto $m_1 m_2 = -1$, de modo que cada pendiente es el *recíproco negativo* de la otra:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}, \qquad m_2 = -\frac{1}{m_1}.$$

Para entender esto, examinemos los triángulos semejantes de la figura A.14; como se observa, $m_1 = a/h$, y $m_2 = -h/a$. Por lo tanto, $m_1 m_2 = (a/h)(-h/a) = -1$.

Distancia y circunferencia en el plano

La distancia entre puntos en el plano se calcula con una fórmula que proviene del teorema de Pitágoras (figura A.15).

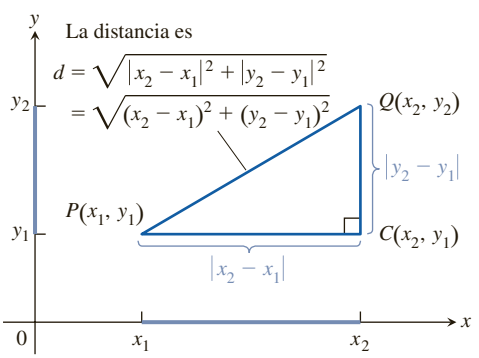


FIGURA A.15 Para calcular la distancia entre $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo PCQ.

Fórmula de la distancia entre dos puntos en el plano

La distancia entre $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

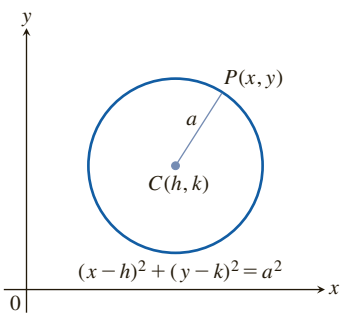


FIGURA A.16 Circunferencia de radio a en el plano xy, con centro en (h, k).

EJEMPLO 4

a) La distancia entre $P(-1, 2)$ y $Q(3, 4)$ es

$$\sqrt{(3 - (-1))^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{(4)^2 + (2)^2} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}.$$

b) La distancia del origen a $P(x, y)$ es

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$ ■

Por definición, una **circunferencia** de radio a es el conjunto de puntos $P(x, y)$ cuya distancia al centro $C(h, k)$ es igual a a (figura A.16). Según la fórmula de la distancia, P se encuentra sobre la circunferencia si y sólo si

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = a,$$

de manera que

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2. \qquad (1)$$

La ecuación (1) es la **ecuación estándar** de una circunferencia con centro (h, k) y radio a. La circunferencia de radio $a = 1$ y centro en el origen es la **circunferencia unitaria** con ecuación

$$x^2 + y^2 = 1.$$

EJEMPLO 5

a) La ecuación estándar de la circunferencia de radio 2 con centro en (3, 4) es

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 2^2 = 4.$$

b) La circunferencia

$$(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 3$$

tiene $h = 1$, $k = -5$ y $a = \sqrt{3}$. El centro es el punto $(h, k) = (1, -5)$ y el radio es $a = \sqrt{3}$. ■

Si la ecuación de una circunferencia no está en forma estándar, se puede obtener el centro y el radio de la circunferencia convirtiendo primero la ecuación a su forma estándar. La técnica algebraica que se emplea para lograrlo es *completando el cuadrado*.

EJEMPLO 6

Obtenga el centro y el radio de la circunferencia

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0.$$

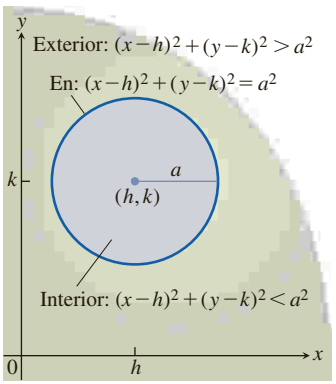


FIGURA A.17 Interior y exterior de la circunferencia $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$.

Solución Convertimos la ecuación a la forma estándar completando los cuadrados en x y y.

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$$

Se inicia con la ecuación dada. Se agrupan los términos y se pasa la constante al lado derecho.

$$(x^2 + 4x) + (y^2 - 6y) = 3$$

$$\left(x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2\right) + \left(y^2 - 6y + \left(\frac{-6}{2}\right)^2\right) = 3 + \left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-6}{2}\right)^2$$

Se suma el cuadrado de la mitad del coeficiente de x en cada lado de la ecuación. Se hace lo mismo para y. Las expresiones entre paréntesis del lado izquierdo son ahora cuadrados perfectos.

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = 3 + 4 + 9$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

Se escribe cada expresión cuadrática como una expresión lineal al cuadrado.

El centro es $(-2, 3)$ y el radio es $a = 4$. ■

Los puntos (x, y) que satisfacen la desigualdad

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 < a^2$$

generan la región **interior** de la circunferencia con centro (h, k) y radio a (figura A.17). El **exterior** de la circunferencia consiste en los puntos (x, y) que satisfacen

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 > a^2.$$

Parábolas

La definición geométrica y las propiedades de las parábolas generales se repasan en el capítulo 11 (volumen 2). Aquí consideraremos a las parábolas como las gráficas de ecuaciones de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

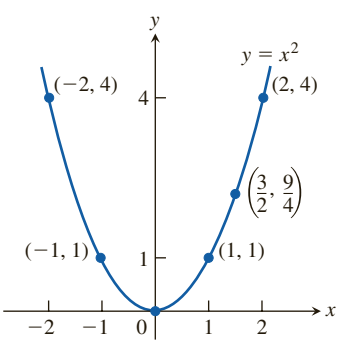


FIGURA A.18 La parábola $y = x^2$ (ejemplo 7).

EJEMPLO 7 Considere la ecuación $y = x^2$. Algunos puntos cuyas coordenadas satisfacen esta ecuación son $(0, 0)$, $(1, 1)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$, $(-1, 1)$, $(2, 4)$ y $(-2, 4)$. Estos puntos (y todos los demás que satisfacen la ecuación) forman una curva suave denominada parábola (figura A.18). ■

La gráfica de una ecuación de la forma

$$y = ax^2$$

es una **parábola** cuyo **eje** (eje de simetría) es el eje y. El **vértice** de la parábola (el punto donde la parábola y el eje se cruzan) se encuentra en el origen. La parábola abre hacia arriba si $a > 0$, y hacia abajo si $a < 0$. Cuanto más grande sea el valor de $|a|$, más angosta será la parábola (figura A.19).

Por lo general, la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ es una versión desplazada y a escala de la parábola $y = x^2$. En la sección 1.2 analizamos con más detalle el desplazamiento y los cambios de escala de gráficas.

La gráfica de $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

La gráfica de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, es una parábola. La parábola abre hacia arriba si $a > 0$, y hacia abajo si $a < 0$. Su **eje** es la recta

$$x = -\frac{b}{2a}. \tag{2}$$

El **vértice** de la parábola es el punto donde el eje y la parábola se intersecan. Su coordenada x es $x = -b/2a$; su coordenada y se obtiene sustituyendo $x = -b/2a$ en la ecuación de la parábola.

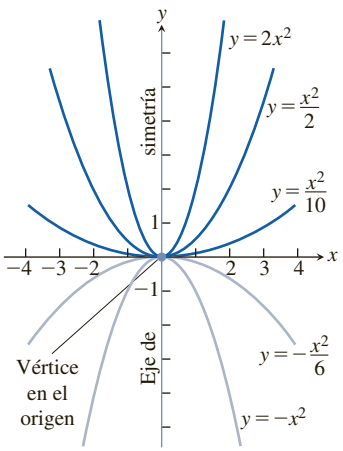


FIGURA A.19 Además de determinar en qué dirección se abre la parábola $y = ax^2$, el número a es un factor de escala. La parábola se ensancha cuando a se aproxima a cero y se hace más angosta cuando $|a|$ se vuelve más grande.

Observe que si $a = 0$, entonces, tenemos $y = bx + c$, que es la ecuación de una recta. El eje, dado por la ecuación (2), se obtiene completando el cuadrado.

EJEMPLO 8 Grafique la ecuación $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$.

Solución Al comparar la ecuación con $y = ax^2 + bx + c$, vemos que

$$a = -\frac{1}{2}, \qquad b = -1, \qquad c = 4.$$

Como $a < 0$, la parábola abre hacia abajo. Según la ecuación (2), el eje es la recta vertical

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-1)}{2(-1/2)} = -1.$$

Cuando $x = -1$, tenemos

$$y = -\frac{1}{2}(-1)^2 - (-1) + 4 = \frac{9}{2}.$$

El vértice es $(-1, 9/2)$.

Las intersecciones con x están donde $y = 0$:

$$-\frac{1}{2}x^2 - x + 4 = 0$$
$$x^2 + 2x - 8 = 0$$
$$(x - 2)(x + 4) = 0$$
$$x = 2, \qquad x = -4$$

Graficamos algunos puntos, trazamos el eje y usamos la dirección de apertura para completar la gráfica de la figura A.20. ■

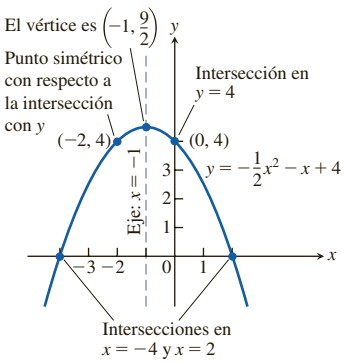


FIGURA A.20 La parábola del ejemplo 8.

Elipses

La definición geométrica y las propiedades de las elipses en general se revisan en el capítulo 11 (volumen 2). Aquí las relacionamos con las circunferencias. Aunque no son gráficas de funciones, las circunferencias se pueden alargar horizontal o verticalmente del mismo modo que las gráficas de funciones. La ecuación estándar de una circunferencia de radio r con centro en el origen es

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

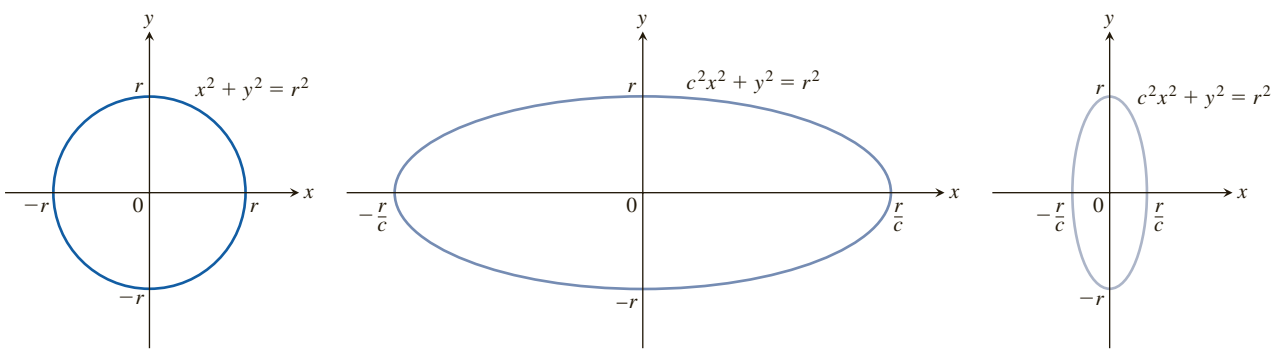


FIGURA A.21 El alargamiento y la compresión horizontales de una circunferencia generan gráficas de elipses.

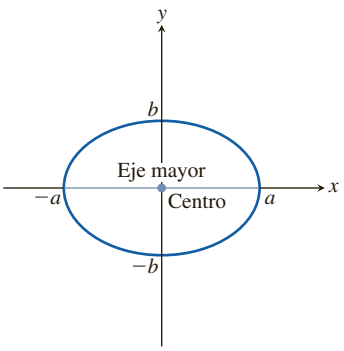


FIGURA A.22 Gráfica de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$, donde el eje mayor es horizontal.

Al sustituir x por cx en la ecuación de una circunferencia (figura A.21), obtenemos

$$c^2x^2 + y^2 = r^2. \tag{3}$$

Si $0 < c < 1$, la gráfica de la ecuación (3) alarga horizontalmente la circunferencia; si $c > 1$, la circunferencia se comprime horizontalmente. En cualquier caso, la gráfica de la ecuación (3) es una elipse (figura A.21). Observe en la figura A.21 que las intersecciones y de las tres gráficas siempre se dan en $-r$ y r. En la figura A.21*b*), el segmento de recta que une los puntos $(\pm r/c, 0)$ se denomina **eje mayor** de la elipse; el **eje menor** es el segmento de recta que une $(0, \pm r)$. Los ejes de la elipse están invertidos en la figura A.21*c*): el eje mayor es el segmento de recta que une los puntos $(0, \pm r)$, y el eje menor es el segmento de recta que une los puntos $(\pm r/c, 0)$. En ambos casos, el segmento de recta más largo es el eje mayor.

Si se dividen ambos lados de la ecuación (3) entre r^2, se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4}$$

donde $a = r/c$ y $b = r$. Si $a > b$, el eje mayor es horizontal; si $a < b$, el eje mayor es vertical. El **centro** de la elipse dado por la ecuación (4) es el origen (figura A.22).

Sustituyendo x por $x - h$, y y por $y - k$ en la ecuación (4), tenemos

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1. \tag{5}$$

La ecuación (5) es la **ecuación estándar de una elipse** con centro en (h, k).

Ejercicios A.3

Distancias, pendientes y rectas

En los ejercicios 1 y 2, una partícula se mueve de A a B en el plano coordenado. Obtenga los incrementos Δx y Δy en las coordenadas de la partícula. Además, obtenga la distancia de A a B.

1. $A(-3, 2)$, $B(-1, -2)$ **2.** $A(-3.2, -2)$, $B(-8.1, -2)$

En los ejercicios 3 y 4, describa las gráficas de las ecuaciones.

3. $x^2 + y^2 = 1$ **4.** $x^2 + y^2 \le 3$

En los ejercicios 5 y 6, grafique los puntos y calcule la pendiente (si existe) de la recta que determinan. Además, obtenga la pendiente común (si existe) de las rectas perpendiculares a la recta AB.

5. $A(-1, 2)$, $B(-2, -1)$ **6.** $A(2, 3)$, $B(-1, 3)$

En los ejercicios 7 y 8, obtenga una ecuación para ***a)*** la recta vertical y ***b)*** la recta horizontal que pasan por el punto dado.

7. $(-1, 4/3)$ **8.** $\left(0, -\sqrt{2}\right)$

En los ejercicios 9 a 15, escriba una ecuación para cada recta que se describe.

9. Pasa por el punto $(-1, 1)$ y tiene pendiente igual a -1

10. Pasa por los puntos $(3, 4)$ y $(-2, 5)$

11. Tiene pendiente igual a $-5/4$ e intersección con y igual a 6

12. Pasa por el punto $(-12, -9)$ y tiene pendiente igual a 0

13. Tiene intersección $y = 4$ e intersección $x = -1$

14. Pasa por el punto $(5, -1)$ y es paralela a la recta $2x + 5y = 15$

15. Pasa por el punto $(4, 10)$ y es perpendicular a la recta $6x - 3y = 5$

En los ejercicios 16 y 17, obtenga las intersecciones x y y y use esta información para graficar la recta.

16. $3x + 4y = 12$ **17.** $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = \sqrt{6}$

18. ¿Hay una relación especial entre las rectas $Ax + By = C_1$ y $Bx - Ay = C_2$, considerando que $A \neq 0$, $B \neq 0$? Justifique su respuesta.

19. Una partícula inicia un movimiento en $A(-2, 3)$ y sus coordenadas cambian en incrementos $\Delta x = 5$ y $\Delta y = -6$. Obtenga su nueva posición.

20. Las coordenadas de una partícula cambian por $\Delta x = 5$ y $\Delta y = 6$ cuando se desplaza de $A(x, y)$ a $B(3, -3)$. Obtenga x y y.

Circunferencias

En los ejercicios 21 a 23, obtenga una ecuación de la circunferencia con el centro $C(h, k)$ dado y radio a. Después, dibuje la circunferencia en el plano xy. Incluya el centro de la circunferencia en su dibujo. Además, identifique las intersecciones x y y, si acaso existen, con sus pares de coordenadas.

21. $C(0, 2)$, $a = 2$ **22.** $C(-1, 5)$, $a = \sqrt{10}$

23. $C\left(-\sqrt{3}, -2\right)$, $a = 2$

Grafique las circunferencias cuyas ecuaciones se dan en los ejercicios 24 a 26. Identifique cada centro y las intersecciones (si existen) con sus pares de coordenadas.

24. $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$

25. $x^2 + y^2 - 3y - 4 = 0$ **26.** $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$

Parábolas

En los ejercicios 27 a 30, grafique las parábolas. Identifique el vértice, el eje y las intersecciones en todos los casos.

27. $y = x^2 - 2x - 3$ **28.** $y = -x^2 + 4x$

29. $y = -x^2 - 6x - 5$ **30.** $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 4$

Desigualdades

En los ejercicios 31 a 34, describa las regiones definidas por las desigualdades y los pares de desigualdades.

31. $x^2 + y^2 > 7$ **32.** $(x - 1)^2 + y^2 \leq 4$

33. $x^2 + y^2 > 1, \quad x^2 + y^2 < 4$

34. $x^2 + y^2 + 6y < 0, \quad y > -3$

35. Escriba una desigualdad que describa los puntos que se encuentran dentro de la circunferencia con centro en $(-2, 1)$ y radio $\sqrt{6}$.

36. Escriba un par de desigualdades que describan los puntos que se encuentran dentro de la circunferencia con centro en $(0, 0)$ y radio $\sqrt{2}$, y sobre o a la derecha de la recta vertical que pasa por $(1, 0)$.

Teoría y ejemplos

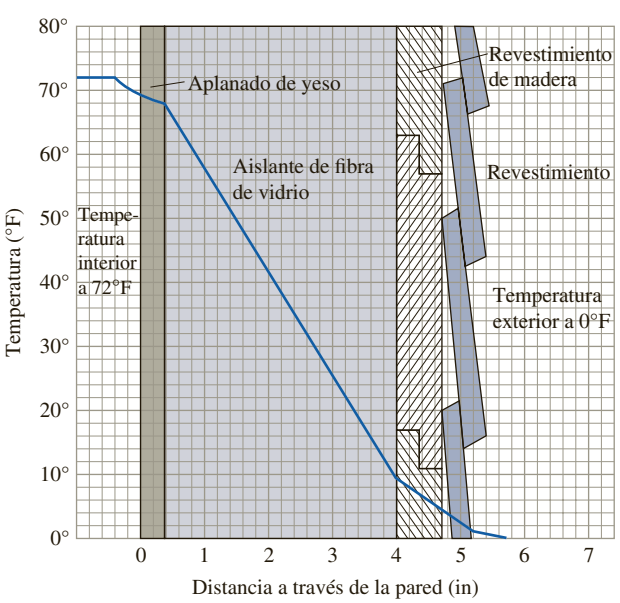
En los ejercicios 37 a 40, grafique las dos ecuaciones y obtenga los puntos en los cuales las gráficas se intersecan.

37. $y = 2x, \quad x^2 + y^2 = 1$ **38.** $y - x = 1, \quad y = x^2$

39. $y = -x^2, \quad y = 2x^2 - 1$

40. $x^2 + y^2 = 1, \quad (x - 1)^2 + y^2 = 1$

41. Aislante Midiendo las pendientes en la figura, estime (en grados por pulgada) el cambio de temperatura en ***a***) el aplanado de yeso; ***b***) el aislante de fibra de vidrio; ***c***) el revestimiento de madera.

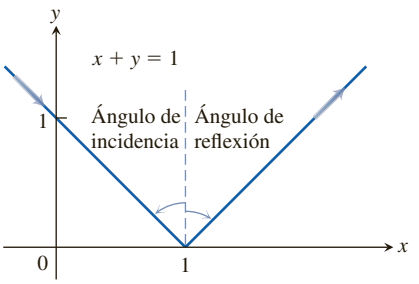


La temperatura cambia en la pared de los ejercicios 41 y 42.

42. Aislante De acuerdo con la figura del ejercicio 41, ¿cuál de los materiales es el mejor aislante? ¿Y el peor? Explique.

43. Presión bajo el agua La presión p que experimenta un buzo bajo el agua está relacionada con la profundidad d del buzo mediante una ecuación de la forma $p = kd + 1$ (k es una constante). En la superficie, la presión es de 1 atmósfera. La presión a 100 metros es de 10.94 atmósferas aproximadamente. Calcule la presión a 50 metros.

44. Luz reflejada Un rayo de luz viaja a lo largo de la recta $x + y = 1$ del segundo cuadrante y se refleja en el eje x (vea la figura). El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión. Escriba una ecuación de la recta a lo largo de la cual se aleja la luz.



La trayectoria del rayo de luz del ejercicio 44. Los ángulos de incidencia y de reflexión se miden a partir de la perpendicular.

45. Escala Fahrenheit contra escala Celsius En el plano FC, dibuje la gráfica de la ecuación

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

que vincula las temperaturas Fahrenheit y Celsius. En la misma gráfica, dibuje la recta $C = F$. ¿Hay una temperatura en la que un termómetro Celsius nos dé la misma lectura numérica de un termómetro Fahrenheit? Si es así, obténgala.

46. El tren al Monte Washington Los ingenieros civiles calcularon la pendiente del camino como la razón de la distancia que éste se eleva o desciende con respecto a la distancia recorrida horizontalmente. Llaman a esta razón el **grado** del camino, y usualmente se escribe como un porcentaje. A lo largo de la costa, los grados del camino del ferrocarril comercial normalmente son menores de 2%. En las montañas, pueden alcanzar el 4%. Los grados de una carretera usualmente son menores de 5 por ciento.

La parte más inclinada de la vía férrea que opera en el Monte Washington en New Hampshire tiene un grado excepcional del 37.1%. En esta parte del camino, los asientos del frente del vagón están a 14 ft por encima de los de atrás. ¿Aproximadamente a qué distancia están las filas de los asientos del frente con respecto a las de atrás?

47. Calculando las longitudes de sus lados, demuestre que el triángulo con vértices en los puntos $A(1, 2)$, $B(5, 5)$ y $C(4, -2)$ es isósceles y no equilátero.

48. Demuestre que el triángulo con vértices en los puntos $A(0, 0)$, $B(1, \sqrt{3})$ y $C(2, 0)$ es equilátero.

49. Demuestre que los puntos $A(2, -1)$, $B(1, 3)$ y $C(-3, 2)$ son los vértices de un cuadrado y obtenga el cuarto vértice.

50. Tres paralelogramos diferentes tienen vértices en $(-1, 1)$, $(2, 0)$ y $(2, 3)$. Dibújelos y obtenga las coordenadas del cuarto vértice de cada uno.

51. ¿Para qué valor de k la recta $2x + ky = 3$ es perpendicular a la recta $4x + y = 1$? ¿Para qué valor de k las rectas son paralelas?

52. Punto medio de un segmento Demuestre que el punto con coordenadas

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

es el punto medio del segmento de recta que une $P(x_1, y_1)$ con $Q(x_2, y_2)$.

A.4 Demostración de los teoremas de límites

En este apéndice se demuestran el teorema 1, partes 2 a 5, y el teorema 4 de la sección 2.2.

TEOREMA 1 Leyes de los límites Si L, M, c y k son números reales y

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to c} g(x) = M, \quad \text{entonces}$$

1. *Regla de la suma:* $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = L + M$

2. *Regla de la diferencia:* $\lim_{x\to c}(f(x) - g(x)) = L - M$

3. *Regla del múltiplo constante:* $\lim_{x\to c}(k \cdot f(x)) = k \cdot L$

4. *Regla del producto:* $\lim_{x\to c}(f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$

5. *Regla del cociente:* $\lim_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}, \quad M \neq 0$

6. *Regla de la potencia:* $\lim_{x\to c}[f(x)]^n = L^n$, n es un entero positivo

7. *Regla de la raíz:* $\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{1/n}$, n es un entero positivo

(Si n es par, se supone que $\lim_{x\to c} f(x) = L > 0$).

En la sección 2.3 demostramos la regla de la suma; en cuanto a las reglas de la potencia y de la raíz, su demostración se incluye en textos más avanzados. La regla de la diferencia se obtiene reemplazando $g(x)$ por $-g(x)$ y M por $-M$ en la regla de la suma. La regla del múltiplo constante, $g(x) = k$, es un caso especial de la regla del producto. Esto sólo nos deja pendientes las reglas del producto y del cociente.

Demostración de la regla del producto de límites Demostraremos que para cualquier $\epsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que para toda x en la intersección D de los dominios de f y g,

$$0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)g(x) - LM| < \epsilon\,.$$

Supongamos entonces que ϵ es un número positivo, y escribimos $f(x)$ y $g(x)$ como

$$f(x) = L + (f(x) - L), \qquad g(x) = M + (g(x) - M).$$

Multiplicamos estas expresiones y restamos LM:

$$\begin{aligned} f(x)\cdot g(x) - LM &= (L + (f(x) - L))(M + (g(x) - M)) - LM \\ &= LM + L(g(x) - M) + M(f(x) - L) \\ &\quad + (f(x) - L)(g(x) - M) - LM \\ &= L(g(x) - M) + M(f(x) - L) + (f(x) - L)(g(x) - M). \end{aligned} \tag{1}$$

Como f y g tienen los límites L y M cuando $x \to c$, existen números positivos δ_1, δ_2, δ_3 y δ_4 tales que para toda x en D

$$\begin{aligned} 0 < |x - c| < \delta_1 \quad &\Rightarrow \quad |f(x) - L| < \sqrt{\epsilon/3} \\ 0 < |x - c| < \delta_2 \quad &\Rightarrow \quad |g(x) - M| < \sqrt{\epsilon/3} \\ 0 < |x - c| < \delta_3 \quad &\Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon/(3(1 + |M|)) \\ 0 < |x - c| < \delta_4 \quad &\Rightarrow \quad |g(x) - M| < \epsilon/(3(1 + |L|)). \end{aligned} \tag{2}$$

Si tomamos a δ como el menor de los números δ_1 a δ_4, las desigualdades del lado derecho de las implicaciones (2) serán válidas simultáneamente para $0 < |x - c| < \delta$. Por lo tanto, para toda x en D, $0 < |x - c| < \delta$ implica

$$\begin{aligned}
&|f(x)\cdot g(x) - LM| && \text{Desigualdad del triángulo aplicada a la ecuación (1)}\\
&\le |L||g(x) - M| + |M||f(x) - L| + |f(x) - L||g(x) - M|\\
&\le (1 + |L|)|g(x) - M| + (1 + |M|)|f(x) - L| + |f(x) - L||g(x) - M|\\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \sqrt{\frac{\epsilon}{3}}\sqrt{\frac{\epsilon}{3}} = \epsilon. && \text{Valores de (2).}
\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración de la regla del producto de límites. ■

Demostración de la regla del cociente de límites Demostraremos que $\lim_{x\to c}(1/g(x)) = 1/M$. Podemos decir que

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right) = \lim_{x\to c} f(x)\cdot\lim_{x\to c}\frac{1}{g(x)} = L\cdot\frac{1}{M} = \frac{L}{M}$$

según la regla del producto de límites.

Sea $\epsilon > 0$. Para demostrar que $\lim_{x\to c}(1/g(x)) = 1/M$, debemos comprobar que existe una $\delta > 0$ tal que para toda x

$$0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| < \epsilon\,.$$

Como $|M| > 0$, existe un número positivo δ_1 tal que para toda x

$$0 < |x - c| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |g(x) - M| < \frac{M}{2}. \tag{3}$$

Es posible demostrar que para números A y B cualesquiera, $|A| - |B| \le |A - B|$ y $|B| - |A| \le |A - B|$, a partir de lo cual se deduce que $||A| - |B|| \le |A - B|$. Con $A = g(x)$ y $B = M$, esto se convierte en

$$||g(x)| - |M|| \le |g(x) - M|,$$

lo cual, a la vez, se puede combinar con la desigualdad de la derecha en la implicación (3) para obtener

$$\begin{aligned}
||\,g(x)\,| - |\,M\,|| &< \frac{|M|}{2}\\
-\frac{|M|}{2} < |g(x)| - |M| &< \frac{|M|}{2}\\
\frac{|M|}{2} < |g(x)| &< \frac{3|M|}{2}\\
|M| < 2|g(x)| &< 3|M|\\
\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|M|} &< \frac{3}{|g(x)|}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Por lo tanto, $0 < |x - c| < \delta_1$ implica que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| &= \left|\frac{M - g(x)}{Mg(x)}\right| \le \frac{1}{|M|}\cdot\frac{1}{|g(x)|}\cdot|M - g(x)|\\
&< \frac{1}{|M|}\cdot\frac{2}{|M|}\cdot|M - g(x)|. && \text{Desigualdad (4)}
\end{aligned} \tag{5}$$

Como $(1/2)|M|^2\epsilon > 0$, existe un número $\delta_2 > 0$ tal que para toda x

$$0 < |x - c| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |M - g(x)| < \frac{\epsilon}{2}|M|^2. \tag{6}$$

Si consideramos δ como el menor de los números δ_1 y δ_2, las conclusiones en (5) y (6) son válidas para toda x tal que $0 < |x - c| < \delta$. Al combinar estas conclusiones, se obtiene

$$0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| < \epsilon.$$

Con esto concluye la demostración de la regla del cociente de límites. ■

TEOREMA 4 Teorema del sándwich Suponga que $g(x) \le f(x) \le h(x)$ para toda x en algún intervalo abierto I que contiene a c, excepto posiblemente en la propia $x = c$. Suponga además que $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$. Entonces, $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

Demostración de límites por la derecha Supongamos que $\lim_{x\to c^+} g(x) = \lim_{x\to c^+} h(x) = L$. Entonces, para cualquier $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que para toda x el intervalo $c < x < c + \delta$ está contenido en I, y la desigualdad implica

$$L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon \qquad \text{y} \qquad L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon.$$

Estas desigualdades se combinan con la desigualdad $g(x) \le f(x) \le h(x)$ para obtener

$$\begin{aligned} L - \epsilon < g(x) \le f(x) \le h(x) < L + \epsilon, \\ L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon, \\ -\epsilon < f(x) - L < \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para toda x, la desigualdad $c < x < c + \delta$ implica que $|f(x) - L| < \epsilon$.

Demostración de límites por la izquierda Supongamos que $\lim_{x\to c^-} g(x) = \lim_{x\to c^-} h(x) = L$. Entonces, para cualquier $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que para toda x el intervalo $c - \delta < x < c$ está contenido en I, y la desigualdad implica

$$L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon \qquad \text{y} \qquad L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon.$$

Concluimos como antes, que para toda x, $c - \delta < x < c$ implica que $|f(x) - L| < \epsilon$.

Demostración de límites bilaterales Si $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$, entonces, $g(x)$ y $h(x)$ se aproximan a L cuando $x \to c^+$ y cuando $x \to c^-$; así, $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ y $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$. Por lo tanto, $\lim_{x\to c} f(x)$ existe y es igual a L. ■

Ejercicios A.4

1. Suponga que las funciones $f_1(x)$, $f_2(x)$ y $f_3(x)$ tienen los límites L_1, L_2 y L_3, respectivamente, cuando $x \to c$. Demuestre que su suma tiene el límite $L_1 + L_2 + L_3$. Utilice la inducción matemática (apéndice 2) para generalizar este resultado como la suma de cualquier número finito de funciones.
2. Utilice inducción matemática y la regla del producto de límites que se analizó en el teorema 1 para demostrar que si las funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ tienen los límites $L_1, L_2, \ldots, L_n$, cuando $x \to c$, entonces,

$$\lim_{x\to c} f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \cdots \cdot f_n(x) = L_1 \cdot L_2 \cdot \cdots \cdot L_n.$$

3. Considere el hecho de que $\lim_{x\to c} x = c$ y el resultado del ejercicio 2 para demostrar que $\lim_{x\to c} x^n = c^n$ para cualquier entero $n > 1$.
4. **Límites de polinomios** Considere los resultados de los ejercicios 1 y 3 junto con el hecho de que $\lim_{x\to c}(k) = k$ para cualquier número k, con la finalidad de demostrar que $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ para cualquier función polinomial

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

5. Límites de funciones racionales Utilice el teorema 1 y el resultado del ejercicio 4 para demostrar que si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones polinomiales y $g(c) \neq 0$, entonces,

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)}.$$

6. Composición de funciones continuas La figura A.23 muestra un diagrama de una demostración de que la composición de dos funciones continuas también es continua. Reconstruya la demostración a partir del diagrama. El enunciado a demostrar es el siguiente: Si f es continua en $x = c$ y g es continua en $f(c)$, entonces, $g \circ f$ es continua en c.

Suponga que c es un punto interior del dominio de f, y que $f(c)$ es un punto interior del dominio de g. Esto hace que los límites implicados sean límites bilaterales. (Los argumentos para los casos de límites unilaterales son similares).

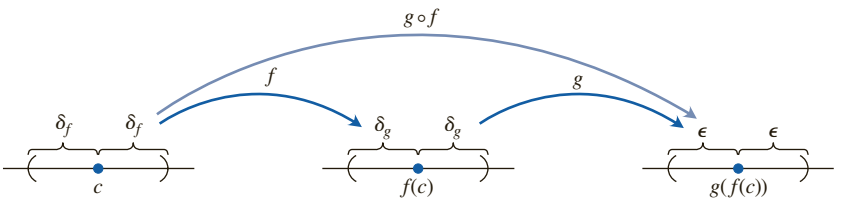


FIGURA A.23 Diagrama de la demostración de que la composición de dos funciones continuas es continua.

A.5 Límites que se presentan comúnmente

En este apéndice se comprueban los límites (4) a (6) del teorema 5 de la sección 10.1.

Límite 4: Si $|x| < 1$, $\lim_{n \to \infty} x^n = 0$ Necesitamos demostrar que para cada $\epsilon > 0$ existe un entero correspondiente N tan grande que $|x^n| < \epsilon$ para toda n mayor que N. Como $\epsilon^{1/n} \to 1$, cuando $|x| < 1$, existe un entero N para el que $\epsilon^{1/N} > |x|$. En otras palabras,

$$|x^N| = |x|^N < \epsilon. \tag{1}$$

Éste es el entero que buscamos, ya que si $|x| < 1$, entonces,

$$|x^n| < |x^N| \quad \text{para toda } n > N. \tag{2}$$

Al combinar (1) y (2), se obtiene $|x^n| < \epsilon$ para toda $n > N$, con lo que concluye la demostración. ■

Límite 5: Para cualquier número x, $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ Sea

$$a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Entonces,

$$\ln a_n = \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) \to x,$$

como podemos ver mediante la siguiente aplicación de la regla de L'Hôpital, en la cual derivamos con respecto a n:

$$\lim_{n \to \infty} n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln(1 + x/n)}{1/n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\left(\frac{1}{1 + x/n}\right) \cdot \left(-\frac{x}{n^2}\right)}{-1/n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{x}{1 + x/n} = x.$$

Se aplica el teorema 3, de la sección 10.1, con $f(x) = e^x$ para concluir que

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = a_n = e^{\ln a_n} \to e^x.$$

■

Límite 6: Para cualquier número x, $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ Como

$$-\frac{|x|^n}{n!} \le \frac{x^n}{n!} \le \frac{|x|^n}{n!},$$

basta demostrar que $|x|^n/n! \to 0$. Luego, podemos aplicar el teorema del sándwich para sucesiones (teorema 2 de la sección 10.1) para concluir que $x^n/n! \to 0$.

El primer paso para demostrar que $|x|^n/n! \to 0$ es elegir un entero $M > |x|$, de manera que $(|x|/M) < 1$. Usando el límite 4 recién demostrado, tenemos que $(|x|/M)^n \to 0$. Luego, restringimos nuestra atención a los valores de $n > M$. Para estos valores de n, podemos escribir

$$\frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^n}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot \underbrace{M \cdot (M+1) \cdot (M+2) \cdot \cdots \cdot n}_{(n-M)\text{ factores}}}$$

$$\le \frac{|x|^n}{M!M^{n-M}} = \frac{|x|^n M^M}{M!M^n} = \frac{M^M}{M!}\left(\frac{|x|}{M}\right)^n.$$

Por lo tanto,

$$0 \le \frac{|x|^n}{n!} \le \frac{M^M}{M!}\left(\frac{|x|}{M}\right)^n.$$

Ahora bien, la constante $M^M/M!$ no cambia al aumentar n. Así, el teorema del sándwich nos dice que $|x|^n/n! \to 0$, pues $(|x|/M)^n \to 0$. ■

A.6 Teoría de los números reales

Un desarrollo riguroso del cálculo se basa en las propiedades de los números reales. Muchos resultados de funciones, derivadas e integrales serían falsos si se les enunciara para funciones definidas sólo por los números racionales. En este apéndice examinamos brevemente algunos conceptos básicos de la teoría de los números reales que indican lo que debería aprenderse en un estudio teórico más profundo del cálculo.

Tres tipos de propiedades hacen de los números reales lo que son. Se trata de las propiedades **algebraicas**, de **orden** y de **completitud**. Las propiedades algebraicas implican la suma y el producto, la resta y la división, y se aplican a números racionales, complejos y reales.

La estructura de los números se construye alrededor de un conjunto con operaciones de suma y multiplicación. Las operaciones de suma y multiplicación deben cumplir con las siguientes propiedades.

S1 $a + (b + c) = (a + b) + c$ para toda a, b, c.
S2 $a + b = b + a$ para toda a, b.
S3 Existe un número llamado "0" tal que $a + 0 = a$ para toda a.
S4 Para cada número a, existe un número b tal que $a + b = 0$.
M1 $a(bc) = (ab)c$ para toda a, b, c.
M2 $ab = ba$ para toda a, b.
M3 Existe un número llamado "1", tal que $a \cdot 1 = a$ para toda a.
M4 Para cada a diferente de cero, existe una b tal que $ab = 1$.
D $a(b + c) = ab + ac$ para toda a, b, c.

S1 y M1 son *leyes asociativas*; S2 y M2 son *leyes conmutativas*; S3 y M3 son *leyes de identidad*, y D es la *ley distributiva*. Los conjuntos que tienen estas propiedades algebraicas

son ejemplos de **campos** y se estudian con profundidad en el área de la matemática teórica llamada álgebra abstracta.

Las propiedades de **orden** nos permiten comparar el tamaño de dos números cualesquiera. Las propiedades de orden son

O1 Para cualquier a y b, $a \le b$ o $b \le a$ o ambos.

O2 Si $a \le b$ y $b \le a$, entonces, $a = b$.

O3 Si $a \le b$ y $b \le c$, entonces, $a \le c$.

O4 Si $a \le b$, entonces, $a + c \le b + c$.

O5 Si $a \le b$ y $0 \le c$, entonces, $ac \le bc$.

O3 es la *ley de transitividad*, mientras que O4 y O5 se relacionan con la suma y la multiplicación.

Podemos ordenar los números reales, los enteros y los racionales, pero no los números complejos. No hay una manera razonable de saber si un número como $i = \sqrt{-1}$ es mayor o menor que cero. Un campo donde se puede comparar el tamaño de dos elementos cualesquiera, como se acaba de mencionar, se denomina **campo ordenado**. Tanto los números racionales como los números reales son campos ordenados, y hay muchos otros.

Geométricamente, podemos visualizar los números reales alineados como puntos sobre una recta. La propiedad de **completitud** dice que los números reales corresponden a todos los puntos en la recta, sin "huecos" ni "espacios" entre ellos. En contraste, los racionales omiten puntos como $\sqrt{2}$ y π, y los enteros dejan fuera fracciones como $1/2$. Los reales, al tener la propiedad de completitud, no omiten puntos.

¿Qué queremos decir exactamente con esta idea de los "huecos"? Para responder esto, debemos dar una definición más precisa de completitud. Un número M es una **cota superior** de un conjunto de números si todos los números en el conjunto son menores o iguales que M. M es una **mínima cota superior** si es la cota superior más pequeña. Por ejemplo, $M = 2$ es una cota superior para los números negativos. También lo es $M = 1$, lo que demuestra que $M = 2$ no es una mínima cota superior. La mínima cota superior para el conjunto de números negativos es $M = 0$. Definimos un campo ordenado **completo** como aquél donde todo conjunto no vacío, acotado por arriba, tiene una mínima cota superior.

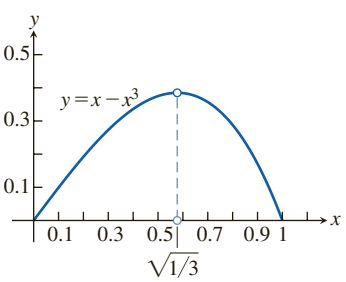


FIGURA A.24 El valor máximo de $y = x - x^3$ en [0, 1] se presenta en el número irracional $x = \sqrt{1/3}$.

Si trabajamos sólo con los números racionales, el conjunto de números menores que $\sqrt{2}$ está acotado, pero no tiene una mínima cota superior racional, ya que cualquier cota superior racional M puede reemplazarse con un número racional ligeramente menor, que siga siendo mayor que $\sqrt{2}$. Así, los racionales no son completos. En los números reales, un conjunto que está acotado por arriba siempre tiene una mínima cota superior. Los reales son un campo ordenado completo.

La propiedad de completitud es la base de muchos resultados que se obtienen en cálculo. Un ejemplo se da al buscar el valor máximo de una función en un intervalo cerrado $[a, b]$, como se hizo en la sección 4.1. La función $x - x^3$ tiene un valor máximo en [0, 1] en el punto x que satisface $1 - 3x^2 = 0$, o $x = \sqrt{1/3}$. Si limitáramos nuestra atención a las funciones definidas sólo con números racionales, tendríamos que concluir que la función no tiene máximo, pues $\sqrt{1/3}$ es irracional (figura A.24). El teorema del valor extremo (sección 4.1), el cual implica que las funciones continuas en intervalos cerrados $[a, b]$ tienen un valor máximo, no es válido para funciones definidas sólo con los racionales.

El teorema del valor intermedio implica que una función continua f en un intervalo $[a, b]$ con $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$ debe ser cero en algún punto de $[a, b]$. Los valores de la función no pueden pasar de negativos a positivos sin que haya algún punto x en $[a, b]$ donde $f(x) = 0$. El teorema del valor intermedio también se basa en la completitud de los números reales, y es falso para funciones continuas definidas sólo con los racionales. La función $f(x) = 3x^2 - 1$ cumple $f(0) = -1$ y $f(1) = 2$, pero si consideramos a f sólo en los números racionales, su valor nunca será igual a cero. El único valor de x para el que $f(x) = 0$ es $x = \sqrt{1/3}$, un número irracional.

Hemos enunciado las propiedades necesarias de los números reales al decir que éstos constituyen un campo ordenado completo. Pero aún no hemos terminado. Los matemáticos griegos de la escuela de Pitágoras trataron de imponer otra propiedad a los números de la

recta real: la condición de que todos los números fueran cocientes de enteros. Se dieron cuenta de que su esfuerzo estaba destinado al fracaso cuando descubrieron números irracionales como $\sqrt{2}$. ¿Cómo saber que nuestros esfuerzos por especificar los números reales no serán también infructuosos debido a una razón imprevista? Escher, el artista, dibujó ilusiones ópticas con escaleras espirales que subían y subían hasta encontrarse consigo mismas en la parte inferior. Si un ingeniero tratara de construir tal escalera, se daría cuenta de la imposibilidad de concretar en una estructura los planos basados en tales ilusiones ópticas. ¿Podría ocurrir que nuestro diseño de los números reales tuviera una contradicción sutil que nos impidiera construir tal sistema numérico?

Resolveremos este asunto dando una descripción específica de los números reales, y verificando que las propiedades algebraicas, de orden y de completitud se satisfacen en este modelo. Esto se conoce como la **construcción** de los números reales, y tal como las escaleras se construyen con madera, piedra o acero, existen muchas formas de construir los números reales. Una de ellas considera a los números reales como todos los decimales infinitos,

$$a.d_1d_2d_3d_4\ldots$$

Desde este punto de vista, un número real es un entero a seguido por una sucesión de dígitos decimales $d_1, d_2, d_3, \ldots,$ cada uno entre 0 y 9. Esta sucesión puede detenerse, repetirse con un patrón periódico, o continuar indefinidamente sin patrón alguno. De esta forma, 2.00, $0.3333333\ldots$ y $3.1415926535898\ldots$ representan números reales conocidos. Explicar el verdadero resultado de los puntos "…" después de estos dígitos requiere un desarrollo de la teoría de sucesiones y series, como en el capítulo 10. Cada número real se construye como el límite de una sucesión de números racionales, dados por sus aproximaciones decimales finitas. Un decimal infinito es entonces lo mismo que una serie

$$a + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} + \cdots.$$

Esta construcción decimal de los números reales no es tan directa. Es fácil comprobar que proporciona números que satisfacen las propiedades de completitud y orden, pero la verificación de las propiedades algebraicas es más compleja. Incluso la suma o multiplicación de dos números requiere una cantidad infinita de operaciones. Dar sentido a la división requiere de un argumento cuidadoso que implica límites de aproximaciones racionales a los decimales infinitos.

El matemático alemán Richard Dedekind (1831-1916) adoptó un enfoque distinto, logrando la primera construcción rigurosa de los números reales en 1872. Dado cualquier número real x, podemos separar los números racionales en dos conjuntos: los menores o iguales que x, y los mayores que x. Ingeniosamente, Dedekind invirtió este razonamiento y definió un número real como una división de los números racionales en dos conjuntos de este tipo. Esto parecería un enfoque extraño, pero tales métodos indirectos de construcción de nuevas estructuras a partir de otras anteriores son comunes en las matemáticas teóricas.

Se pueden usar éste y otros enfoques para construir un sistema de números con las propiedades algebraicas, de orden y de completitud deseadas. Un último aspecto a considerar es si todas estas construcciones dan el mismo resultado. ¿Es posible que las distintas construcciones produzcan diferentes sistemas numéricos que satisfagan todas las propiedades requeridas? Si es así, ¿cuál de estos sistemas es el de los números reales? Por fortuna, la respuesta a la primera pregunta es no. Los números reales constituyen el único sistema numérico que satisface las propiedades algebraicas, de orden y de completitud.

La confusión en torno a la naturaleza de los números y los límites causó una gran controversia durante las primeras etapas de desarrollo del cálculo. Al tratar de averiguar qué ocurre con el cociente de diferencias

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

cuando tanto Δy como Δx tienden a cero, los pioneros del cálculo, como Leibniz, Newton y sus sucesores, hablaban de la derivada resultante como si fuera un cociente entre dos cantidades infinitamente pequeñas. Estos "infinitésimos", que se escriben como dx y dy, se con-

sideraban como números de un nuevo tipo, menores que cualquier número fijo, pero distintos de cero. De manera similar, se imaginaba que una integral definida era la suma de una cantidad infinita de infinitésimos

$$f(x) \cdot dx$$

conforme x variaba en un intervalo cerrado. Antes de que la aproximación del cociente de diferencias $\Delta y/\Delta x$ se entendiera tanto como ahora, se pensaba que era el cociente de cantidades infinitesimales, y no un límite, el que captaba el significado de la derivada. Esta manera de pensar condujo a dificultades lógicas, ya que los intentos de definición y el manejo de los infinitésimos dieron lugar a contradicciones e inconsistencias. Los cocientes de diferencias más concretos y cuantificables no provocaron tales problemas, pero sólo se les consideraba una herramienta útil para realizar los cálculos. Los cocientes de diferencias se utilizaron para obtener el valor numérico de la derivada y para deducir fórmulas generales para los cálculos, pero no se les consideraba la parte medular para responder qué era realmente una derivada. En la actualidad nos damos cuenta de que los problemas lógicos asociados a los infinitésimos pueden evitarse *definiendo* la derivada como el límite de su aproximación a los cocientes de diferencias. Las ambigüedades del antiguo enfoque ya no existen, y en la teoría estándar del cálculo los infinitésimos no se necesitan ni se utilizan.

A.7 Números complejos

Los números complejos se expresan en la forma $a + ib$, o $a + bi$, donde a y b son números reales e i es el símbolo de $\sqrt{-1}$. Por desgracia, la palabra "real" e "imaginario" tienen connotaciones que de alguna manera colocan a $\sqrt{-1}$ en una posición menos favorable en nuestras mentes que a $\sqrt{2}$. De hecho, se requirió de una gran imaginación, en el sentido de *inventiva*, para construir el sistema de números *reales*, que es la base del cálculo (vea el apéndice 6). En este apéndice revisaremos las diversas etapas de esta invención, para luego presentar el desarrollo posterior del sistema de números complejos.

El desarrollo de los números reales

La primera etapa del desarrollo de los números fue el reconocimiento de los **números para contar**, 1, 2, 3,…, que ahora llamamos **números naturales** o **enteros positivos**. Es posible realizar algunas operaciones aritméticas sencillas con estos números, como sumas y multiplicaciones, sin salir del sistema. Con esto queremos decir que si m y n son enteros positivos cualesquiera, entonces,

$$m + n = p \qquad \text{y} \qquad mn = q \tag{1}$$

también son enteros positivos. Dados los dos enteros positivos del lado izquierdo de cualquiera de las ecuaciones (1), podemos obtener el entero positivo correspondiente del lado derecho. Además, algunas veces podemos especificar enteros positivos m y p y obtener un entero positivo n tal que $m + n = p$. Por ejemplo, $3 + n = 7$ se puede resolver cuando los únicos números que conocemos son los enteros positivos. Pero la ecuación $7 + n = 3$ no puede resolverse, a menos que se amplíe el sistema numérico.

El cero y los números enteros negativos se inventaron para resolver ecuaciones como $7 + n = 3$. En una civilización que reconoce todos los **enteros**

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{2}$$

las personas con instrucción siempre serán capaces de obtener el entero faltante que resuelva la ecuación $m + n = p$ cuando se conozcan dos enteros de la ecuación.

Suponga que estas personas también saben cómo multiplicar dos enteros cualesquiera de la lista (2). Si en las ecuaciones (1) se conocen m y q, se darán cuenta de que en algunas ocasiones se puede obtener n y otras no. Usando la imaginación, podrían inspirarse para inventar más números e introducir las fracciones, que no son sino pares ordenados m/n de enteros m y n. El número cero tiene propiedades especiales que podrían causar un poco de

molestia, pero en última instancia se descubrirá que es bueno tener todos los cocientes de enteros m/n, excluyendo sólo aquéllos con cero en el denominador. Este sistema, llamado el conjunto de **números racionales**, será lo suficientemente rico para realizar las **operaciones racionales** de la aritmética:

1. ***a***) suma
   b) resta
2. ***a***) multiplicación
   b) división

con dos números cualesquiera del sistema, *excepto que no es posible dividir entre cero*, pues esto carece de sentido.

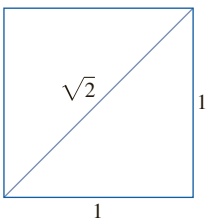


FIGURA A.25 Con regla y compás, es posible construir un segmento de longitud irracional.

La geometría del cuadrado unitario (figura A.25) y el teorema de Pitágoras demostraron que es posible construir un segmento de recta que, en términos de alguna unidad de longitud básica, tiene una longitud igual a $\sqrt{2}$. Por lo tanto, pudieron resolver la ecuación

$$x^2 = 2$$

con una construcción geométrica. Pero después descubrieron que el segmento de recta que representa a $\sqrt{2}$ es una cantidad inconmensurable. Esto significa que $\sqrt{2}$ no puede expresarse como la razón de dos múltiplos *enteros* de cierta unidad de longitud. Es decir, la gente instruida era incapaz de obtener una solución numérica racional de la ecuación $x^2 = 2$.

No existe un número racional cuyo cuadrado sea igual a 2. Para entender por qué, supongamos que sí existe tal número racional, de manera que podríamos obtener enteros p y q sin factores comunes diferentes de 1, tales que

$$p^2 = 2q^2. \tag{3}$$

Como p y q son enteros, p debe ser par, ya que, de otra forma, al multiplicarlo por sí mismo daría por resultado un número impar. En símbolos, $p = 2p_1$, donde p_1 es un entero. Esto nos lleva a $2p_1^2 = q^2$, lo que quiere decir que q debe ser par, digamos $q = 2q_1$, donde q_1 es un entero. Esto hace que 2 sea un factor de p y q, contrario a nuestra opción de enteros sin factores comunes diferentes de 1. Por lo tanto, no hay un número racional cuyo cuadrado sea 2.

Aunque las personas de las que hemos hablado no podrían obtener una solución racional para la ecuación $x^2 = 2$, sí serían capaces de obtener una sucesión de números racionales

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{7}{5}, \quad \frac{41}{29}, \quad \frac{239}{169}, \quad \cdots, \tag{4}$$

cuyos cuadrados forman una sucesión

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{49}{25}, \quad \frac{1681}{841}, \quad \frac{57\,121}{28\,561}, \quad \cdots, \tag{5}$$

que converge en 2 como su límite. Esta vez, la imaginación sugería la necesidad del concepto de límite de una sucesión de números racionales. Si aceptamos el hecho de que una sucesión creciente acotada por arriba siempre se aproxima a un límite (teorema 6 de la sección 10.1) y observamos que la sucesión (4) tiene estas propiedades, desearíamos que tuviera un límite L. Esto también significa, según (5), que $L^2 = 2$ y, por lo tanto, que L *no* es uno de nuestros números racionales. Si agregamos a los números racionales los límites de todas las sucesiones de números racionales crecientes y acotadas, llegamos al sistema de todos los números "reales". Escribimos la palabra *real* entre comillas porque ninguna característica de este sistema lo hace "más real" o "menos real" que cualquier otro sistema matemático.

Los números complejos

Durante el desarrollo del sistema de números reales se recurrió muchas veces a la imaginación. De hecho, fue necesario hacer alarde de inventiva al menos en tres momentos durante la construcción del sistema que hemos analizado hasta el momento:

1. En la *invención del primer* sistema: el conjunto de *todos los enteros*, construido a partir de los números para contar.

2. En la *invención del segundo* sistema: el conjunto de los números racionales m/n, construido a partir de los enteros.

3. En la *invención del tercer* sistema: el conjunto de todos los *números reales x*, construido a partir de los números racionales.

Estos sistemas, producto de la inventiva, forman una jerarquía en la que cada sistema contiene al anterior. Cada sistema es también más rico que su predecesor, en el sentido de que permite realizar operaciones adicionales sin necesidad de recurrir a otros:

1. El sistema de todos los enteros nos permite resolver todas las ecuaciones de la forma

$$x + a = 0, \tag{6}$$

donde a puede ser cualquier entero.

2. El sistema de todos los números racionales nos permite resolver todas las ecuaciones de la forma

$$Ax + b = 0, \tag{7}$$

siempre y cuando a y b sean números racionales y $a \neq 0$.

3. El sistema de todos los números reales nos permite resolver todas las ecuaciones de los tipos (6) y (7) y, además, todas las ecuaciones cuadráticas

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con} \quad a \neq 0 \quad \text{y} \quad b^2 - 4ac \geq 0. \tag{8}$$

Es probable que usted conozca la fórmula que da las soluciones de la ecuación (8), a saber,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{9}$$

y que también esté al tanto de que, cuando el discriminante $b^2 - 4ac$ es negativo, las soluciones de la ecuación (9) *no* pertenecen a los sistemas que hemos analizado. De hecho, la sencillísima ecuación cuadrática

$$x^2 + 1 = 0$$

es imposible de resolver si los únicos sistemas numéricos que pueden utilizarse son los tres mencionados hasta ahora.

Así, hemos llegado al *cuarto sistema inventado*: el conjunto de *todos los números complejos* $a + ib$. Podríamos omitir el símbolo i y usar la notación de pares ordenados (a, b). Como desde el punto de vista de las operaciones algebraicas los números a y b se tratan de manera un tanto diferente, es esencial mantener el *orden*. Por lo tanto, decimos que el **sistema de números complejos** consta del conjunto de todos los pares ordenados de números reales (a, b), junto con las reglas que rigen su igualdad, suma, multiplicación, etcétera, que se presentan más adelante. Usaremos las notaciones (a, b) y $a + ib$ en el siguiente análisis. Llamaremos a a la **parte real**, y b a la **parte imaginaria** del número complejo (a, b).

Tenemos las siguientes definiciones.

Igualdad	
$a + ib = c + id$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$.	Dos números complejos (a, b) y (c, d) son *iguales* si y sólo si $a = c$ y $b = d$.
Suma	
$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$	La *suma* de dos números complejos (a, b) y (c, d) es el número complejo $(a + c, b + d)$.
Multiplicación	
$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$	El *producto* de dos números complejos (a, b) y (c, d) es el número complejo $(ac - bd, ad + bc)$.
$c(a + ib) = ac + i(bc)$	El producto de un número real c por un número complejo (a, b) es el número complejo (ac, bc).

El conjunto de todos los números complejos (a, b), donde el segundo número b es igual a cero, tiene todas las propiedades del conjunto de números reales a. Por ejemplo, la suma y la multiplicación de $(a, 0)$ y $(c, 0)$ da

$$(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0),$$
$$(a, 0) \cdot (c, 0) = (ac, 0),$$

que son números del mismo tipo, con su parte imaginaria igual a cero. Además, si multiplicamos un "número real" $(a, 0)$ por el número complejo (c, d), obtenemos

$$(a, 0) \cdot (c, d) = (ac, ad) = a(c, d).$$

En particular, el número complejo (0, 0) desempeña el papel del *cero* en el sistema de números complejos, y el número complejo (1, 0) el de la *unidad* o *uno*.

El par de números (0, 1), con parte real igual a 0 y parte imaginaria igual a 1, tiene la propiedad de que su cuadrado,

$$(0, 1)(0, 1) = (-1, 0),$$

tiene una parte real igual a -1 y una parte imaginaria igual a 0. Por lo tanto, en el sistema de números complejos (a, b), existe un número $x = (0, 1)$ cuyo cuadrado puede sumarse a la unidad (1, 0) para producir el cero (0, 0); es decir,

$$(0, 1)^2 + (1, 0) = (0, 0).$$

Por lo tanto, la ecuación

$$x^2 + 1 = 0$$

tiene una solución $x = (0, 1)$ en el nuevo sistema numérico.

Quizás usted esté más familiarizado con la notación $a + ib$ que con la notación (a, b). Y como las leyes algebraicas para los pares ordenados nos permiten escribir

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1),$$

mientras (1, 0) se comporte como la unidad y (0, 1) como la raíz cuadrada de -1, no debemos dudar en escribir $a + ib$ en lugar de (a, b). Asociada a b, la i es como un trazador que señala la parte imaginaria de $a + ib$. Podemos pasar a voluntad del ámbito de los pares ordenados (a, b) al de las expresiones $a + ib$, y viceversa. Pero una vez que se han aprendido las leyes algebraicas para el sistema de números complejos como pares ordenados (a, b), el símbolo $(0, 1) = i$ no es menos "real" que el símbolo $(1, 0) = 1$.

Para reducir cualquier combinación racional de números complejos a un número complejo único, aplicamos las leyes del álgebra elemental, reemplazando i^2 por -1 siempre que aparezca. Desde luego, no podemos dividir entre el número complejo $(0, 0) = 0 + i0$. Pero si $a + ib \neq 0$, podemos realizar una división como sigue:

$$\frac{c + id}{a + ib} = \frac{(c + id)(a - ib)}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{(ac + bd) + i(ad - bc)}{a^2 + b^2}.$$

El resultado es un número complejo $x + iy$ con

$$x = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2}, \qquad y = \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}$$

y $a^2 + b^2 \neq 0$, ya que $a + ib = (a, b) \neq (0, 0)$.

El número $a - ib$ que se utiliza como factor para eliminar i del denominador es el **conjugado complejo** de $a + ib$. Se acostumbra utilizar $\bar{z}$ para denotar el conjugado complejo de z; por lo tanto,

$$z = a + ib, \qquad \bar{z} = a - ib.$$

Al multiplicar el numerador y el denominador de la fracción $(c + id)/(a + ib)$ por el conjugado complejo del denominador, éste se reemplaza siempre por un número real.

EJEMPLO 1 A continuación damos algunos ejemplos de operaciones aritméticas con números complejos.

a) $(2 + 3i) + (6 - 2i) = (2 + 6) + (3 - 2)i = 8 + i$

b) $(2 + 3i) - (6 - 2i) = (2 - 6) + (3 - (-2))i = -4 + 5i$

c) $(2 + 3i)(6 - 2i) = (2)(6) + (2)(-2i) + (3i)(6) + (3i)(-2i)$

$$= 12 - 4i + 18i - 6i^2 = 12 + 14i + 6 = 18 + 14i$$

d) $$\frac{2 + 3i}{6 - 2i} = \frac{2 + 3i}{6 - 2i}\frac{6 + 2i}{6 + 2i}$$

$$= \frac{12 + 4i + 18i + 6i^2}{36 + 12i - 12i - 4i^2}$$

$$= \frac{6 + 22i}{40} = \frac{3}{20} + \frac{11}{20}i$$

■

Diagramas de Argand

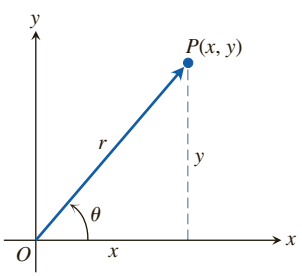


FIGURA A.26 Este diagrama de Argand representa a $z = x + iy$ como un punto $P(x, y)$ y como un vector $\overrightarrow{OP}$.

El número complejo $z = x + iy$ tiene dos representaciones geométricas:

1. como el punto $P(x, y)$ en el plano xy y
2. como el vector $\overrightarrow{OP}$, que va del origen a P.

En cada representación, el eje x se llama **eje real**, y el eje y es el **eje imaginario**. Ambas representaciones son **diagramas de Argand** para $x + iy$ (figura A.26).

En términos de las coordenadas polares de x y y, tenemos

$$x = r\cos\theta, \qquad y = \text{r sen } \theta$$

y

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta). \tag{10}$$

Definimos el **valor absoluto** de un número complejo $x + iy$ como la longitud r de un vector $\overrightarrow{OP}$, que va del origen a $P(x, y)$. Denotamos el valor absoluto con barras verticales; por consiguiente,

$$|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Si siempre elegimos las coordenadas polares r y θ, de modo que r sea no negativo, entonces,

$$r = |x + iy|.$$

El ángulo polar θ es el **argumento** de z y se escribe como $\theta = \arg z$. Desde luego, se puede sumar cualquier múltiplo entero de 2π a θ para producir otro ángulo adecuado.

La siguiente ecuación nos da una fórmula útil que relaciona un número complejo z, su conjugado $\bar{z}$, y su valor absoluto $|z|$, a saber,

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2.$$

Fórmula de Euler

La identidad

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta,$$

llamada **fórmula de Euler**, nos permite escribir la ecuación (10) como

$$z = re^{i\theta}.$$

La notación $\exp(A)$ también sirve para e^A.

Esta fórmula, a la vez, nos lleva a las siguientes reglas para el cálculo de productos, cocientes, potencias y raíces de números complejos. También nos conduce a los diagramas de Argand para $e^{i\theta}$. Como $\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ es lo que obtenemos de la ecuación (10) al considerar $r = 1$, podemos decir que $e^{i\theta}$ se representa como un vector unitario que forma un ángulo θ con el eje x positivo, como muestra la figura A.27.

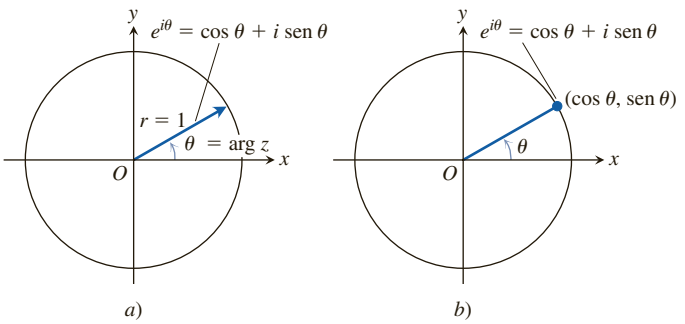


FIGURA A.27 Diagramas de Argand para $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$ *a*) como un vector y *b*) como un punto.

Productos

Para multiplicar dos números complejos, multiplicamos sus valores absolutos y sumamos sus ángulos. Sean

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \qquad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}, \tag{11}$$

de modo que

$$|z_1| = r_1, \qquad \arg z_1 = \theta_1; \qquad |z_2| = r_2, \qquad \arg z_2 = \theta_2.$$

Entonces,

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= r_1 r_2 = |z_1| \cdot |z_2| \\ \arg(z_1 z_2) &= \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2. \end{aligned} \tag{12}$$

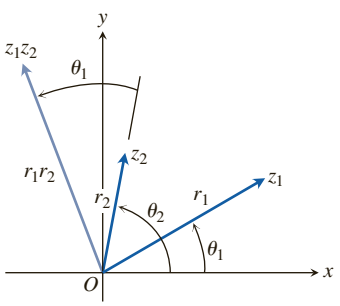


FIGURA A.28 Al multiplicar z_1 y z_2, $|z_1 z_2| = r_1 \cdot r_2$ y $\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2$.

De esta forma, el producto de dos números complejos se representa con un vector cuya longitud es el producto de las longitudes de los dos factores, y cuyo argumento es la suma de sus argumentos (figura A.28). En particular, según la ecuación (12), vemos que un vector puede girar en sentido contrario al de las manecillas del reloj un ángulo θ al multiplicarlo por $e^{i\theta}$. La multiplicación por i provoca un giro de 90°, por -1 provoca un giro de 180°, por $-i$ uno de 270°, etcétera.

EJEMPLO 2 Sea $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$. Graficamos estos números complejos en un diagrama de Argand (figura A.29), de donde obtenemos las representaciones polares

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}, \qquad z_2 = 2e^{-i\pi/6}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 2\sqrt{2}\exp\left(\frac{i\pi}{4} - \frac{i\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}\exp\left(\frac{i\pi}{12}\right) \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{12}\right) \approx 2.73 + 0.73i. \end{aligned}$$

■

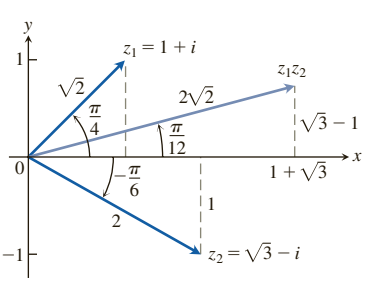


FIGURA A.29 Para multiplicar dos números complejos, multiplicamos sus valores absolutos y sumamos sus argumentos.

Cocientes

Supongamos que $r_2 \neq 0$ en la ecuación (11). Entonces,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Por lo tanto,

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{y} \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 = \arg z_1 - \arg z_2.$$

Es decir, dividimos las longitudes y restamos los ángulos para obtener el cociente de números complejos.

EJEMPLO 3 Sean $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = \sqrt{3} - i$, como en el ejemplo 2. Entonces,

$$\frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{-i\pi/6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{5\pi i/12} \approx 0.707\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{12}\right)$$
$$\approx 0.183 + 0.683i.$$

Potencias

Si n es un entero positivo, podemos aplicar las fórmulas del producto en la ecuación (12) para obtener

$$z^n = z \cdot z \cdot \cdots \cdot z. \qquad n \text{ factores}$$

Con $z = re^{i\theta}$, obtenemos

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{i(\theta+\theta+\cdots+\theta)} \qquad n \text{ sumandos}$$
$$= r^n e^{in\theta}. \tag{13}$$

La longitud $r = |z|$ se eleva a la n-ésima potencia, y el ángulo $\theta = \arg z$ se multiplica por n.

Si consideramos $r = 1$ en la ecuación (13), obtenemos el teorema de De Moivre.

Teorema de De Moivre

$$(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta. \tag{14}$$

Si desarrollamos el lado izquierdo de la ecuación de De Moivre según el teorema del binomio y lo reducimos a la forma $a + ib$, obtenemos fórmulas para cos $n\theta$ y sen $n\theta$ como polinomios de grado n en cos θ y sen θ.

EJEMPLO 4 Si $n = 3$ en la ecuación (14), tenemos

$$(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^3 = \cos 3\theta + i\,\text{sen}\,3\theta.$$

El lado izquierdo de esta ecuación se desarrolla como

$$\cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta - 3\cos\theta\,\text{sen}^2\theta - i\,\text{sen}^3\theta.$$

La parte real de la expresión anterior debe ser igual a cos 3θ, y la parte imaginaria debe ser igual a sen 3θ. Por lo tanto,

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\text{sen}^2\theta,$$
$$\text{sen}\,3\theta = 3\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}^3\theta.$$

Raíces

Si $z = re^{i\theta}$ es un número complejo diferente de cero y n es un número entero positivo, existen exactamente n números complejos diferentes $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$, que son raíces n-ésimas de z. Para comprender por qué, sea $w = \theta e^{i\theta}$ una raíz n-ésima de $z = re^{i\theta}$, de modo que

$$w^n = z$$

o

$$\rho^n e^{in\alpha} = re^{i\theta}.$$

Entonces,

$$\rho = \sqrt[n]{r}$$

es la n-ésima raíz real positiva de r. En cuanto al argumento, aunque no podemos decir que $n\alpha$ y θ deben ser iguales, sí es posible afirmar que sólo difieren en un múltiplo entero de 2π. Es decir,

$$n\alpha = \theta + 2k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Por lo tanto,

$$\alpha = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}.$$

Así, todas las raíces n-ésimas de $z = re^{i\theta}$ están dadas por

$$\sqrt[n]{re^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}\exp i\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right), \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{15}$$

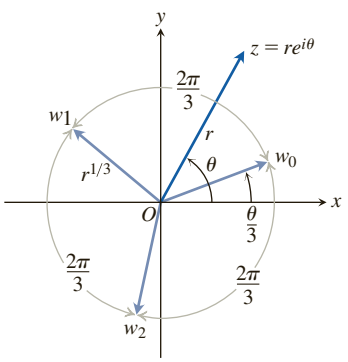


FIGURA A.30 Las tres raíces cúbicas de $z = re^{i\theta}$.

Parecería que hay una infinidad de respuestas diferentes correspondientes a la infinidad de valores posibles de k, pero $k = n + m$ nos da la misma respuesta que $k = m$ en la ecuación (15). Así, sólo necesitamos considerar n valores consecutivos de k para obtener todas las n-ésimas raíces diferentes de z. Por conveniencia, consideramos

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1.$$

Todas las raíces n-ésimas de $re^{i\theta}$ están en una circunferencia con centro en el origen, con radio igual a la n-ésima raíz real positiva de r. Una de ellas tiene argumento $\alpha = \theta/n$; las demás se distribuyen de manera uniforme en la circunferencia, cada una separada de sus vecinas por un ángulo igual a $2\pi/n$. La figura A.30 ilustra la distribución de las tres raíces cúbicas, w_0, w_1, w_2, del número complejo $z = re^{i\theta}$.

EJEMPLO 5 Obtenga las cuatro raíces cuartas de -16.

Solución Como primer paso, localizamos el número -16 en un diagrama de Argand (figura A.31) y determinamos su representación polar $re^{i\theta}$. En este caso, $z = -16$, $r = +16$ y $\theta = \pi$. Una de las raíces cuartas de $16e^{i\pi}$ es $2e^{i\pi/4}$. Obtenemos las demás con sumas sucesivas de $2\pi/4 = \pi/2$ al argumento de esta primera raíz. Por lo tanto,

$$\sqrt[4]{16\exp i\pi} = 2\exp i\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right),$$

y las cuatro raíces son

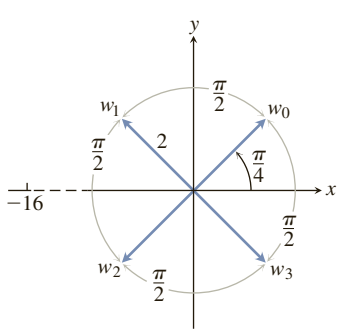


FIGURA A.31 Las cuatro raíces cuartas de -16.

$$w_0 = 2\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right] = \sqrt{2}(1 + i)$$

$$w_1 = 2\left[\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right] = \sqrt{2}(-1 + i)$$

$$w_2 = 2\left[\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{4}\right] = \sqrt{2}(-1 - i)$$

$$w_3 = 2\left[\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right] = \sqrt{2}(1 - i).$$

■

El teorema fundamental del álgebra

Alguien podría decir que la invención de $\sqrt{-1}$ está muy bien, y que conduce a un sistema numérico más rico que el de los números reales, pero ¿en qué momento se detendrá este proceso? ¿Tendremos que inventar más sistemas para obtener $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[6]{-1}$, y así sucesivamente? Resulta que esto no es necesario. Tales números pueden expresarse ya en términos del sistema de números complejos $a + ib$. De hecho, el teorema fundamental del álgebra afirma que con la introducción de los números complejos se tienen los números suficientes para factorizar cualquier polinomio como un producto de factores lineales y, por lo tanto, los números suficientes para resolver cualquier ecuación polinomial posible.

Teorema fundamental del álgebra

Toda ecuación polinomial de la forma

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0,$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números complejos cualesquiera, cuyo grado n es mayor o igual que 1, y cuyo coeficiente principal a_n no es cero, tiene exactamente n raíces en el sistema de números complejos, siempre y cuando cada raíz múltiple con multiplicidad m se cuente como m raíces.

En casi todos los textos sobre la teoría de funciones de una variable compleja aparece una demostración de este teorema.

Ejercicios A.7

Operaciones con números complejos

1. ¿Cómo multiplican números complejos las computadoras? Obtenga $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

a) $(2, 3) \cdot (4, -2)$ ***b)*** $(2, -1) \cdot (-2, 3)$

c) $(-1, -2) \cdot (2, 1)$

(Ésta es la forma en que las computadoras multiplican números complejos).

2. Resuelva las siguientes ecuaciones en términos de los números reales x y y.

a) $(3 + 4i)^2 - 2(x - iy) = x + iy$

b) $\left(\dfrac{1 + i}{1 - i}\right)^2 + \dfrac{1}{x + iy} = 1 + i$

c) $(3 - 2i)(x + iy) = 2(x - 2iy) + 2i - 1$

Graficación y geometría

3. ¿Cómo se pueden obtener geométricamente los siguientes números complejos a partir de $z = x + iy$? Grafique.

a) $\bar{z}$ *b)* $\overline{(-z)}$

c) $-z$ *d)* $1/z$

4. Demuestre que la distancia entre los dos puntos z_1 y z_2 en un diagrama de Argand es $|z_1 - z_2|$.

En los ejercicios 5 a 10, grafique los puntos $z = x + iy$ que satisfacen las condiciones dadas.

5. ***a)*** $|z| = 2$ ***b)*** $|z| < 2$ ***c)*** $|z| > 2$

6. $|z - 1| = 2$ **7.** $|z + 1| = 1$

8. $|z + 1| = |z - 1|$ **9.** $|z + i| = |z - 1|$

10. $|z + 1| \geq |z|$

En los ejercicios 11 a 14, exprese los números complejos en la forma $re^{i\theta}$, con $r \geq 0$ y $-\pi < \theta \leq \pi$. Dibuje un diagrama de Argand para cada cálculo.

11. $\left(1 + \sqrt{-3}\right)^2$ **12.** $\dfrac{1 + i}{1 - i}$

13. $\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$ **14.** $(2 + 3i)(1 - 2i)$

Potencias y raíces

Utilice el teorema de De Moivre para expresar las funciones trigonométricas de los ejercicios 15 y 16 en términos de $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$.

15. $\cos 4\theta$ **16.** $\operatorname{sen} 4\theta$

17. Obtenga las tres raíces cúbicas de 1.

18. Obtenga las dos raíces cuadradas de i.

19. Obtenga las tres raíces cúbicas de $-8i$.

20. Obtenga las seis raíces sextas de 64.

21. Obtenga las cuatro soluciones de la ecuación $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$.

22. Obtenga las seis soluciones de la ecuación $z^6 + 2z^3 + 2 = 0$.

23. Obtenga todas las soluciones de la ecuación $x^4 + 4x^2 + 16 = 0$.

24. Resuelva la ecuación $x^4 + 1 = 0$.

Teoría y ejemplos

25. Números complejos y vectores en el plano Use un diagrama de Argand para demostrar que la ley para la suma de números complejos es la misma que la ley del paralelogramo para la suma de vectores.

26. Aritmética compleja con conjugados Demuestre que el conjugado de la suma (el producto o el cociente) de dos números complejos z_1 y z_2 es igual a la suma (el producto o el cociente) de sus conjugados.

27. Las raíces complejas de polinomios con cocientes reales vienen en pares de números complejos-conjugados

a) Amplíe los resultados del ejercicio 26 para demostrar que $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ si

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

es un polinomio con coeficientes reales $a_0, \ldots, a_n$.

b) Si z es una raíz de la ecuación $f(z) = 0$, donde $f(z)$ es un polinomio con coeficientes reales como en el inciso *a*), demuestre que el conjugado $\bar{z}$ también es una raíz de la ecuación. [*Sugerencia:* Sea $f(z) = u + iv = 0$; entonces, u y v son iguales a cero. Considere el hecho de que $]f(\bar{z}) = \overline{f(z)} = u - iv]$.

28. Valor absoluto de un conjugado Demuestre que $|\bar{z}| = |z|$..

29. Cuando $z = \bar{z}$ Si z y $\bar{z}$ son iguales, ¿qué se puede decir acerca de la ubicación del punto z en el plano complejo?

30. Partes real e imaginaria Sean $\mathrm{Re}(z)$ la parte real de z e $\mathrm{Im}(z)$ la parte imaginaria. Demuestre que las siguientes relaciones se cumplen para números complejos z, z_1 y z_2 cualesquiera.

a) $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$

b) $z - \bar{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$

c) $|\mathrm{Re}(z)| \le |z|$

d) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$

e) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

A.8 Ley distributiva para el producto cruz de vectores

En este apéndice demostraremos la ley distributiva

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w},$$

que es la propiedad 2 de la sección 12.4.

Demostración Para deducir la ley distributiva, construimos $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ de una nueva manera. Trazamos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ desde el punto común O y construimos un plano M perpendicular a $\mathbf{u}$ en O (figura A.32). Luego, proyectamos $\mathbf{v}$ de manera ortogonal hacia M, obteniendo un vector $\mathbf{v}'$con longitud $|\mathbf{v}|$ sen θ. Giramos $\mathbf{v}'$ 90° en sentido positivo alrededor de $\mathbf{u}$ para obtener un vector $\mathbf{v}''$. Por último, multiplicamos $\mathbf{v}''$ por la longitud de $\mathbf{u}$. El vector resultante $|\mathbf{u}|\mathbf{v}''$ es igual a $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, pues $\mathbf{v}''$ tiene la misma dirección que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ debido a su construcción (figura A.32) y

$$|\mathbf{u}||\mathbf{v}''| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}'| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\mathrm{sen}\,\theta = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|.$$

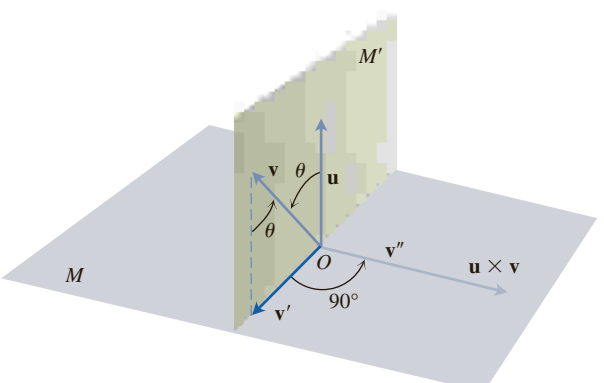


FIGURA A.32 Como se explica en el texto, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = |\mathbf{u}|\mathbf{v}''$. (Las comillas son exclusivamente símbolos de notación y no representan derivadas).

Ahora bien, cada una de estas operaciones, a saber,

1. la proyección sobre M
2. la rotación de 90° alrededor de $\mathbf{u}$
3. la multiplicación por el escalar $|\mathbf{u}|$

produce un nuevo triángulo cuando se aplica a un triángulo cuyo plano no es paralelo a **u**. Si partimos del triángulo con lados **v**, **w** y **v** + **w** (figura A.33) y aplicamos estos tres pasos, obtendremos lo siguiente:

1. Un triángulo cuyos lados son $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$ y $(\mathbf{v}+\mathbf{w})'$ que satisfacen la ecuación vectorial
$$\mathbf{v}' + \mathbf{w}' = (\mathbf{v} + \mathbf{w})'$$
2. Un triángulo cuyos lados son $\mathbf{v}''$, $\mathbf{w}''$ y $(\mathbf{v}+\mathbf{w})''$, que satisfacen la ecuación vectorial
$$\mathbf{v}'' + \mathbf{w}'' = (\mathbf{v} + \mathbf{w})''$$
(Las comillas de cada vector tienen el mismo significado que en la figura A.32).

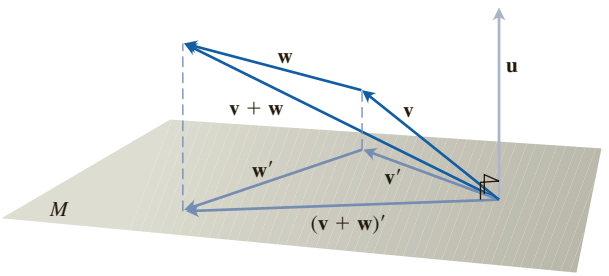


FIGURA A.33 Los vectores **v**, **w**, **v** + **w** y sus proyecciones sobre un plano perpendicular a **u**.

3. Un triángulo cuyos lados son $|\mathbf{u}|\mathbf{v}''$, $|\mathbf{u}|\mathbf{w}''$ y $|\mathbf{u}|(\mathbf{v}+\mathbf{w})''$, que satisfacen la ecuación vectorial
$$|\mathbf{u}|\mathbf{v}'' + |\mathbf{u}|\mathbf{w}'' = |\mathbf{u}|(\mathbf{v} + \mathbf{w})''.$$

Al sustituir en esta ecuación $|\mathbf{u}|\mathbf{v}'' = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, $|\mathbf{u}|\mathbf{w}'' = \mathbf{u} \times \mathbf{w}$ y $|\mathbf{u}|(\mathbf{v}+\mathbf{w})'' = \mathbf{u} \times (\mathbf{v}+\mathbf{w})$ de acuerdo con nuestro análisis anterior, obtenemos

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}),$$

que es la ley que queríamos establecer. ■

A.9 El teorema de la derivada mixta y el teorema del incremento

Este apéndice presenta una deducción del teorema de la derivada mixta (teorema 2, sección 14.3) y del teorema del incremento para funciones de dos variables (teorema 3, sección 14.3). Euler publicó por primera vez el teorema de la derivada mixta en 1734, en una serie de artículos que escribió sobre hidrodinámica.

TEOREMA 2 Teorema de la derivada mixta Si $f(x, y)$ y sus derivadas parciales f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx} están definidas en una región abierta que contiene un punto (a, b) y todas son continuas en (a, b), entonces,
$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b).$$

Demostración La igualdad de $f_{xy}(a, b)$ y $f_{yx}(a, b)$ se puede establecer mediante cuatro aplicaciones del teorema del valor medio (teorema 4, sección 4.2). Por hipótesis, el punto (a, b) está en el interior de un rectángulo R en el plano xy donde f, f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx} están defini-

das. Sean h y k números tales que el punto $(a + h, b + k)$ también está en R, y consideramos la diferencia

$$\Delta = F(a + h) - F(a), \tag{1}$$

donde

$$F(x) = f(x, b + k) - f(x, b). \tag{2}$$

Aplicamos el teorema del valor medio a F, que es continua por ser diferenciable. Entonces, la ecuación (1) se convierte en

$$\Delta = hF'(c_1), \tag{3}$$

donde c_1 se encuentra entre a y $a + h$. Según la ecuación (2),

$$F'(x) = f_x(x, b + k) - f_x(x, b),$$

de modo que la ecuación (3) se convierte en

$$\Delta = h[f_x(c_1, b + k) - f_x(c_1, b)]. \tag{4}$$

Ahora aplicamos el teorema del valor medio a la función $g(y) = f_x(c_1, y)$, y tenemos

$$g(b + k) - g(b) = kg'(d_1),$$

o bien,

$$f_x(c_1, b + k) - f_x(c_1, b) = kf_{xy}(c_1, d_1)$$

para alguna d_1 entre b y $b + k$. Al sustituir esto en la ecuación (4), tenemos

$$\Delta = hkf_{xy}(c_1, d_1) \tag{5}$$

para algún punto (c_1, d_1) en el rectángulo R' cuyos vértices son los cuatro puntos (a, b), $(a + h, b)$, $(a + h, b + k)$ y $(a, b + k)$. (Vea la figura A.34).

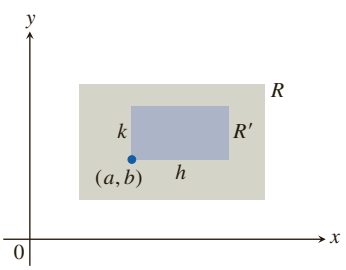


FIGURA A.34 La clave para demostrar que $f_{xy}(a, b)$ y $f_{yx}(a, b)$ es que sin importar lo pequeño que sea R', f_{xy} y f_{yx} asumen los mismos valores en algún punto dentro de R' (aunque no necesariamente en el mismo punto).

Sustituyendo la ecuación (2) en la ecuación (1), también podemos escribir

$$\begin{aligned}\Delta &= f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b)\\ &= [f(a + h, b + k) - f(a, b + k)] - [f(a + h, b) - f(a, b)]\\ &= \phi(b + k) - \phi(b),\end{aligned} \tag{6}$$

donde

$$\phi(y) = f(a + h, y) - f(a, y). \tag{7}$$

El teorema del valor medio aplicado a la ecuación (6) nos da ahora

$$\Delta = k\phi'(d_2) \tag{8}$$

para alguna d_2 entre b y $b + k$. Según la ecuación (7),

$$\phi'(y) = f_y(a + h, y) - f_y(a, y). \tag{9}$$

Al sustituir la ecuación (9) en la ecuación (8), se obtiene

$$\Delta = k[f_y(a + h, d_2) - f_y(a, d_2)].$$

Por último, aplicamos el teorema del valor medio a la expresión entre corchetes para obtener

$$\Delta = khf_{yx}(c_2, d_2) \tag{10}$$

para alguna c_2 entre a y $a + h$.

Juntas, las ecuaciones (5) y (10) demuestran que

$$f_{xy}(c_1, d_1) = f_{yx}(c_2, d_2), \tag{11}$$

donde (c_1, d_1) y (c_2, d_2) están en el rectángulo R' (figura A.34). La ecuación (11) no es precisamente el resultado que buscamos, pues sólo nos dice que f_{xy} tiene el mismo valor en (c_1, d_1) que f_{yx} en (c_2, d_2). Sin embargo, los números h y k pueden hacerse tan pequeños

como se desee. La hipótesis de que f_{xy} y f_{yx} son continuas en (a, b) significa que $f_{xy}(c_1, d_1) = f_{xy}(a, b) + \epsilon_1$ y $f_{yx}(c_2, d_2) = f_{yx}(a, b) + \epsilon_2$, donde $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ cuando $h, k \to 0$. Por lo tanto, si h y k tienden a cero, tenemos que $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$. ■

La igualdad entre $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ puede demostrarse con hipótesis más débiles que las planteadas. Por ejemplo, basta que f, f_x y f_y existan en R y que f_{xy} sea continua en (a, b). Entonces, f_{yx} existe en (a, b) y es igual a f_{xy} en ese punto.

TEOREMA 3 Teorema del incremento para funciones de dos variables

Suponga que las primeras derivadas parciales de $f(x, y)$ están definidas en una región abierta R que contiene al punto (x_0, y_0), y que f_x y f_y son continuas en (x_0, y_0). Entonces, el cambio

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, x_0)$$

en el valor de f que resulta de moverse de (x_0, y_0) a otro punto $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ en R satisface una ecuación de la forma

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

en la que $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta x, \Delta y \to 0$.

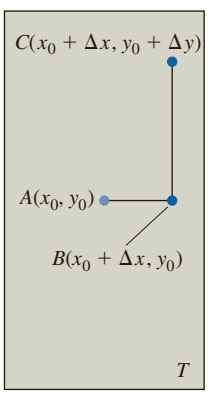


FIGURA A.35 Región rectangular T en la demostración del teorema del incremento. La figura se dibuja para Δx y Δy positivas, pero los incrementos pueden ser cero o negativos.

Demostración Trabajamos dentro de un rectángulo T con centro en $A(x_0, y_0)$, que está dentro de R, y suponemos que Δx y Δy ya son lo bastante pequeños como para que el segmento de recta que une A con $B(x_0 + \Delta x, y_0)$ y el segmento de recta que une B con $C(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ estén en el interior de T (figura A.35).

Podemos visualizar Δz como la suma de $\Delta z_1 + \Delta z_2$ de dos incrementos, donde

$$\Delta z_1 = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

es el cambio en el valor de f de A a B y

$$\Delta z_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)$$

es el cambio en el valor de f de B a C (figura A.36).

En el intervalo cerrado de valores de x que va de x_0 a $x_0 + \Delta x$, la función $F(x) = f(x, y_0)$ es una función diferenciable (y por lo tanto continua) de x, con derivada

$$F'(x) = f_x(x, y_0).$$

Según el teorema del valor medio (teorema 4, sección 4.2), existe un valor c de x entre x_0 y $x_0 + \Delta x$ en el que

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = F'(c)\,\Delta x$$

o

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = f_x(c, y_0)\,\Delta x$$

o

$$\Delta z_1 = f_x(c, y_0)\,\Delta x. \tag{12}$$

De manera similar, $G(y) = f(x_0 + \Delta x, y)$ es una función diferenciable (y por lo tanto continua) de y en el intervalo cerrado en y que va de y_0 a $y_0 + \Delta y$ con derivada

$$G'(y) = f_y(x_0 + \Delta x, y).$$

Por lo tanto, existe un valor d de y entre y_0 y $y_0 + \Delta y$ donde

$$G(y_0 + \Delta y) - G(y_0) = G'(d)\,\Delta y$$

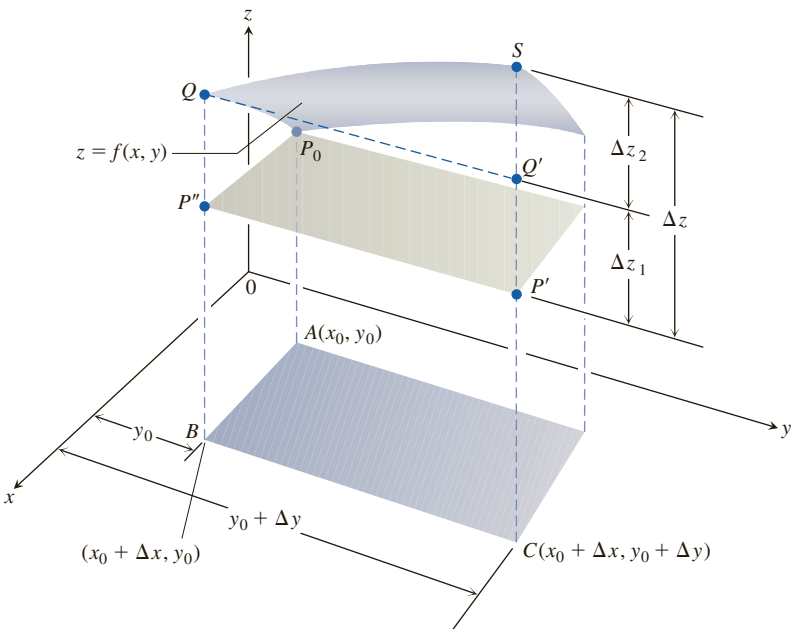


FIGURA A.36 Parte de la superficie $z = f(x, y)$ cerca de $P_0(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$. Los puntos P_0, P' y P'' tienen la misma altura $z_0 = f(x_0, y_0)$ sobre el plano xy. El cambio en z es $\Delta z = P'S$. El cambio

$$\Delta z_1 = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

mostrado como $P''Q = P'Q'$, es causado al variar x de x_0 a $x_0 + \Delta x$, manteniendo a y igual a y_0. Luego, manteniendo x igual a $x_0 + \Delta x$,

$$\Delta z_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)$$

es el cambio en z al variar y de y_0 a $y_0 + \Delta y$, lo que se representa como $Q'S$. El cambio total en z es la suma de Δz_1 y Δz_2,

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y) = f_y(x_0 + \Delta x, d)\,\Delta y$$

o

$$\Delta z_2 = f_y(x_0 + \Delta x, d)\,\Delta y. \tag{13}$$

Ahora bien, cuando Δx y Δy tienden a cero, sabemos que $c \to x_0$ y $d \to y_0$. Por lo tanto, como f_x y f_y son continuas en (x_0, y_0), las cantidades

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= f_x(c, y_0) - f_x(x_0, y_0), \\ \epsilon_2 &= f_y(x_0 + \Delta x, d) - f_y(x_0, y_0) \end{aligned} \tag{14}$$

tienden a cero cuando Δx y $\Delta y \to 0$.

Por último,

$$\begin{aligned} \Delta z &= \Delta z_1 + \Delta z_2 \\ &= f_x(c, y_0)\Delta x + f_y(x_0 + \Delta x, d)\Delta y && \text{Según las ecuaciones (12) y (13)} \\ &= [\,f_x(x_0, y_0) + \epsilon_1\,]\Delta x + [\,f_y(x_0, y_0) + \epsilon_2\,]\Delta y && \text{Según la ecuación (14)} \\ &= f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y, \end{aligned}$$

donde ϵ_1 y $\epsilon_2 \to 0$ cuando Δx, y $\Delta y \to 0$, que era lo que teníamos que demostrar. ■

Resultados análogos son válidos para funciones con cualquier número finito de variables independientes. Suponga que las primeras derivadas parciales de $w = f(x, y, z)$ se definen en toda una región abierta que contiene el punto (x_0, y_0, z_0), y que f_x, f_y y f_z son continuas en (x_0, y_0, z_0). Entonces,

$$\begin{aligned}\Delta w &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) \\ &= f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y + \epsilon_3 \Delta z, \end{aligned} \tag{15}$$

donde $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \to 0$ cuando $\Delta x, \Delta y$ y $\Delta z \to 0$.

Las derivadas parciales f_x, f_y y f_z de la ecuación (15) deben evaluarse en el punto (x_0, y_0, z_0).

La ecuación (15) puede demostrarse considerando Δw como la suma de tres incrementos,

$$\Delta w_1 = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0) \tag{16}$$

$$\Delta w_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) \tag{17}$$

$$\Delta w_3 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0), \tag{18}$$

y aplicando el teorema del valor medio a cada uno por separado. Dos coordenadas permanecen constantes y sólo una varía en cada uno de estos incrementos parciales Δw_1, Δw_2 y Δw_3. En la ecuación (17), por ejemplo, sólo varía y, pues x se mantiene igual a $x_0 + \Delta x$, y z se mantiene igual a z_0. Como $f(x_0 + \Delta x, y, z_0)$ es una función continua de y con una derivada f_y, se encuentra sujeta al teorema del valor medio; así, tenemos

$$\Delta w_2 = f_y(x_0 + \Delta x, y_1, z_0)\, \Delta y$$

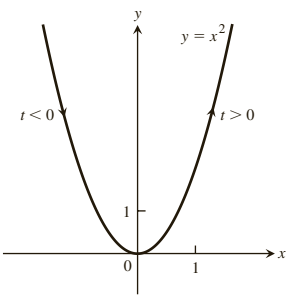
para alguna y_1 entre y_0 y $y_0 + \Delta y$.

Respuestas a los ejercicios con número impar

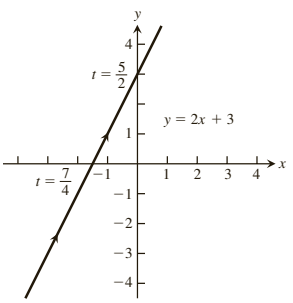
Capítulo 11

Sección 11.1, páginas 647 a 649

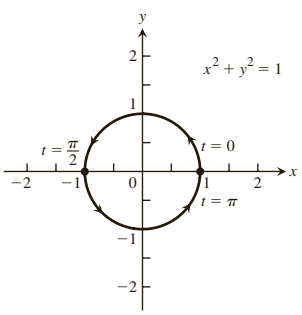
1.



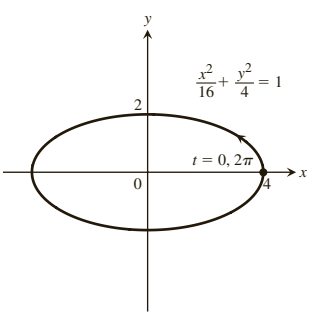
3.



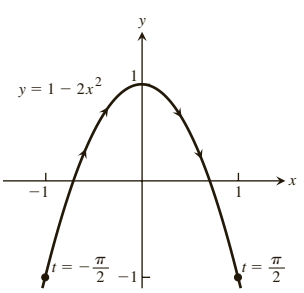
5.



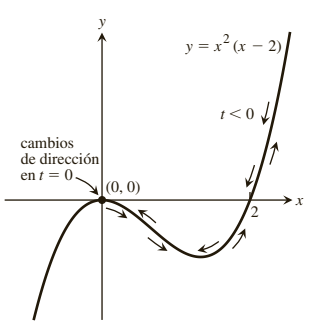
7.



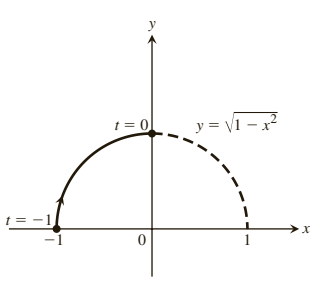
9.



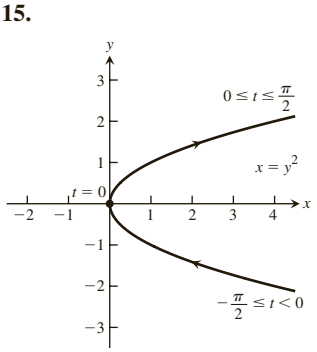
11.



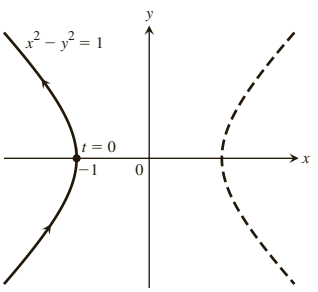
13.



15.



17.



19. ***a)*** $x = a\cos t, \quad y = -a \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi$
b) $x = a\cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi$
c) $x = a\cos t, \quad y = -a \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 4\pi$
d) $x = a\cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 4\pi$

21. Posible respuesta: $x = -1 + 5t, \quad y = -3 + 4t, \quad 0 \le t \le 1$

23. Posible respuesta: $x = t^2 + 1, \quad y = t, \quad t \le 0$

25. Posible respuesta: $x = 2 - 3t, \quad y = 3 - 4t, \quad t \ge 0$

27. Posible respuesta: $x = 2\cos t, \quad y = 2\,|\operatorname{sen} t|, \quad 0 \le t \le 4\pi$

29. Posible respuesta: $x = \dfrac{-at}{\sqrt{1 + t^2}}, \quad y = \dfrac{a}{\sqrt{1 + t^2}}, \quad -\infty < t < \infty$

31. Posible respuesta: $x = \dfrac{4}{1 + 2\tan\theta}, \quad y = \dfrac{4\tan\theta}{1 + 2\tan\theta},$
$0 \le \theta < \pi/2$ y $x = 0, y = 2$ sí $\theta = \pi/2$

33. Posible respuesta: $x = 2 - \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

35. $x = 2\cot t, \quad y = 2\operatorname{sen}^2 t, \quad 0 < t < \pi$

37. $x = a\operatorname{sen}^2 t \tan t, \quad y = a\operatorname{sen}^2 t, \quad 0 \le t < \pi/2$ **39.** (1, 1)

Sección 11.2, páginas 657 a 659

1. $y = -x + 2\sqrt{2}, \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\sqrt{2}$

3. $y = -\dfrac{1}{2}x + 2\sqrt{2}, \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

5. $y = x + \dfrac{1}{4}, \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = -2$ **7.** $y = 2x - \sqrt{3}, \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = -3\sqrt{3}$

9. $y = x - 4, \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{2}$

11. $y = \sqrt{3}x - \dfrac{\pi\sqrt{3}}{3} + 2, \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = -4$

13. $y = 9x - 1, \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = 108$ **15.** $-\dfrac{3}{16}$ **17.** -6

19. 1 **21.** $3a^2\pi$ **23.** $|ab|\pi$ **25.** 4 **27.** 12

29. π^2 **31.** $8\pi^2$ **33.** $\dfrac{52\pi}{3}$ **35.** $3\pi\sqrt{5}$

37. $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{12}{\pi} - \frac{24}{\pi^2}, \frac{24}{\pi^2} - 2\right)$

39. $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{1}{3}, \pi - \frac{4}{3}\right)$ **41.** ***a)*** π ***b)*** π

43. ***a)*** $x = 1, \quad y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$ ***b)*** $x = 0, \quad y = 3, \quad \frac{dy}{dx} = 0$

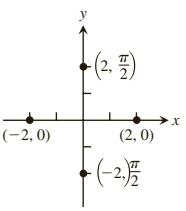
c) $x = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \quad y = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 2}$

45. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$, $y = 2x$ en $t = 0$, $y = -2x$ en $t = \pi$

47. ***a)*** 8a ***b)*** $\frac{64\pi}{3}$

Sección 11.3, páginas 662 a 663

1. a, e; b, g; c, h; d, f **3.**



a) $\left(2, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$ y $\left(-2, \frac{\pi}{2} + (2n + 1)\pi\right)$, n es un entero

b) $(2, 2n\pi)$ y $(-2, (2n + 1)\pi)$, n es un entero

c) $\left(2, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right)$ y $\left(-2, \frac{3\pi}{2} + (2n + 1)\pi\right)$, n es un entero

d) $(2, (2n + 1)\pi)$ y $(-2, 2n\pi)$, n es un entero

5. ***a)*** $(3, 0)$ ***b)*** $(-3, 0)$ ***c)*** $\left(-1, \sqrt{3}\right)$ ***d)*** $\left(1, \sqrt{3}\right)$
e) $(3, 0)$ ***f)*** $\left(1, \sqrt{3}\right)$ ***g)*** $(-3, 0)$ ***h)*** $\left(-1, \sqrt{3}\right)$

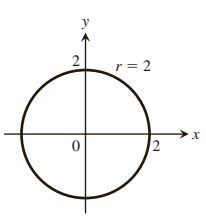
7. ***a)*** $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ ***b)*** $(3, \pi)$ ***c)*** $\left(2, \frac{11\pi}{6}\right)$

d) $\left(5, \pi - \tan^{-1}\frac{4}{3}\right)$

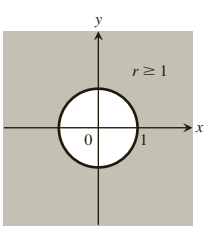
9. ***a)*** $\left(-3\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$ ***b)*** $(-1, 0)$ ***c)*** $\left(-2, \frac{5\pi}{3}\right)$

d) $\left(-5, \pi - \tan^{-1}\frac{3}{4}\right)$

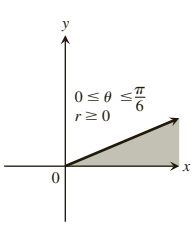
11.



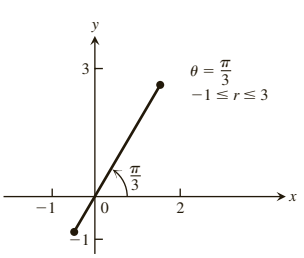
13.



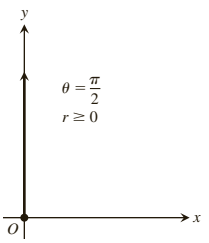
15.



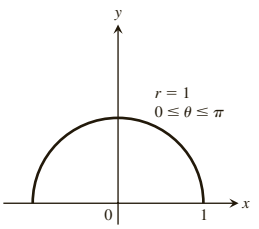
17.



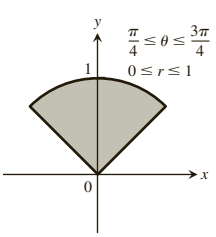
19.



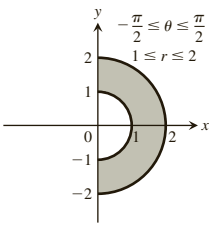
21.



23.



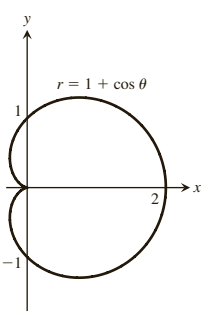
25.

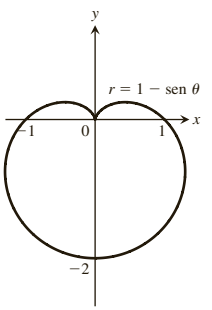


27. $x = 2$, , línea vertical a través de $(2, 0)$ **29.** $y = 0$, el eje x
31. $y = 4$, línea horizontal a través de $(0, 4)$
33. $x + y = 1$, recta, $m = -1, b = 1$
35. $x^2 + y^2 = 1$, circunferencia, $C(0, 0)$, radio 1
37. $y - 2x = 5$, recta, $m = 2, b = 5$
39. $y^2 = x$, parábola, vértice $(0, 0)$, abre a la derecha
41. $y = e^x$, gráfica de una función exponencial natural
43. $x + y = \pm 1$, dos líneas rectas con pendiente -1, intersección en y, $b = \pm 1$
45. $(x + 2)^2 + y^2 = 4$, circunferencia, $C(-2, 0)$, radio 2
47. $x^2 + (y - 4)^2 = 16$, circunferencia, $C(0, 4)$, radio 4
49. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$, circunferencia, $C(1, 1)$, radio $\sqrt{2}$
51. $\sqrt{3}y + x = 4$ **53.** $r \cos\theta = 7$ **55.** $\theta = \pi/4$
57. $r = 2$ o $r = -2$ **59.** $4r^2\cos^2\theta + 9r^2\,\text{sen}^2\theta = 36$
61. $r\,\text{sen}^2\theta = 4\cos\theta$ **63.** $r = 4\,\text{sen}\,\theta$
65. $r^2 = 6r\cos\theta - 2r\,\text{sen}\,\theta - 6$
67. $(0, \theta)$, donde θ es cualquier ángulo

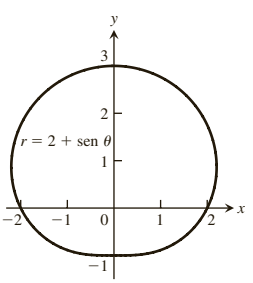
Sección 11.4, páginas 666 a 667

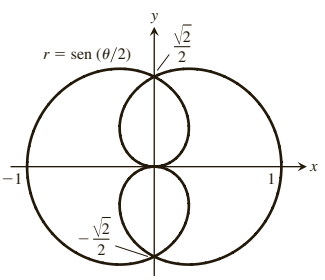
1. Eje x **3.** Eje y



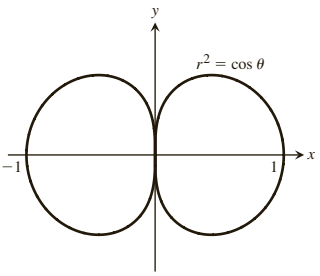


5. Eje y **7.** Eje x, eje y, origen

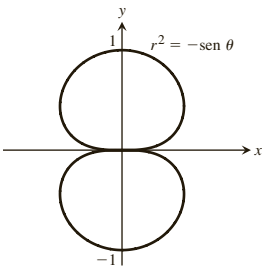




9. Eje x, eje y, origen

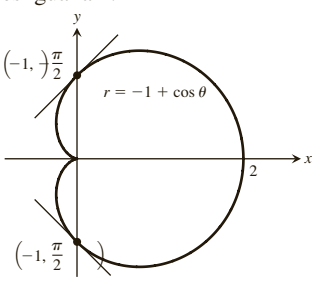


11. Eje y, eje x, origen

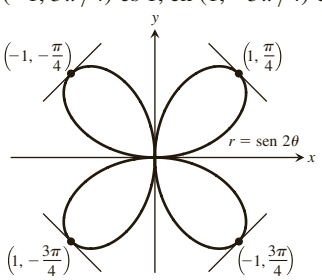


13. Eje x, eje y, origen **15.** Origen

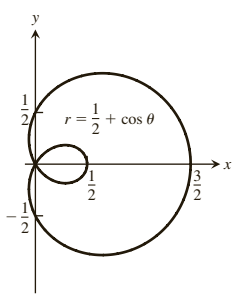
17. La pendiente en $(-1, \pi/2)$ es igual a -1, y en $(-1, -\pi/2)$ es igual a 1.



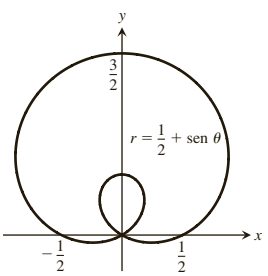
19. La pendiente en $(1, \pi/4)$ es igual a -1, en $(-1, -\pi/4)$ es 1, en $(-1, 3\pi/4)$ es 1, en $(1, -3\pi/4)$ es -1.



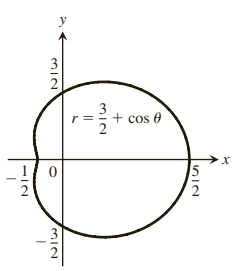
21. ***a)***



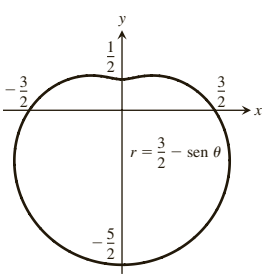
b)



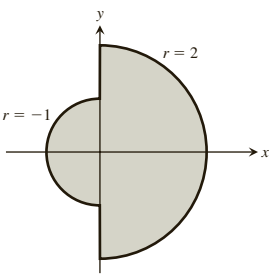
23. ***a)***



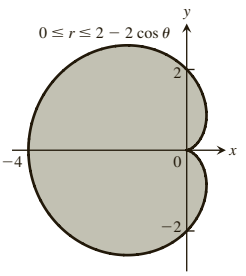
b)



25.



27.



29. Ecuación *a)*

Sección 11.5, páginas 670 a 671

1. $\frac{1}{6}\pi^3$ **3.** 18π **5.** $\frac{\pi}{8}$ **7.** 2 **9.** $\frac{\pi}{2} - 1$

11. $5\pi - 8$ **13.** $3\sqrt{3} - \pi$ **15.** $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

17. $\frac{8\pi}{3} + \sqrt{3}$ **19.** ***a)*** $\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}$ **21.** $19/3$ **23.** 8

25. $3\left(\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right)$ **27.** $\frac{\pi}{8} + \frac{3}{8}$

31. ***a)*** a ***b)*** a ***c)*** $2a/\pi$

Sección 11.6, páginas 677 a 680

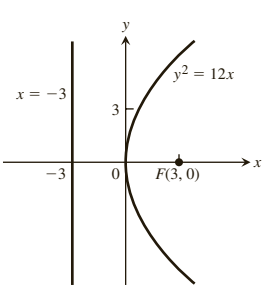
1. $y^2 = 8x$, $F(2, 0)$, directriz: $x = -2$

3. $x^2 = -6y$, $F(0, -3/2)$, directriz: $y = 3/2$

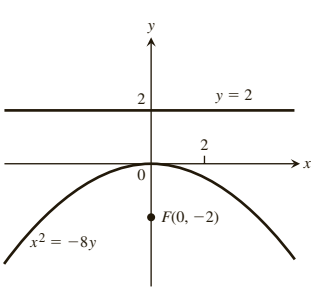
5. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, $F\left(\pm\sqrt{13}, 0\right)$, $V(\pm 2, 0)$, asíntotas: $y = \pm\frac{3}{2}x$

7. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, $F(\pm 1, 0)$, $V\left(\pm\sqrt{2}, 0\right)$

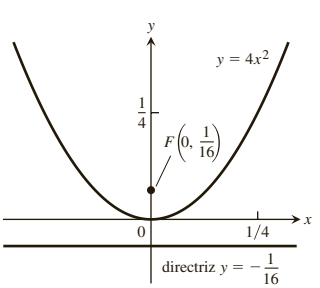
9.



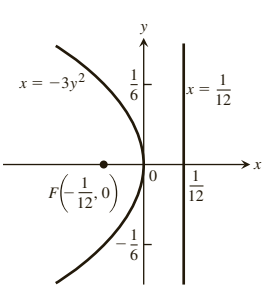
11.



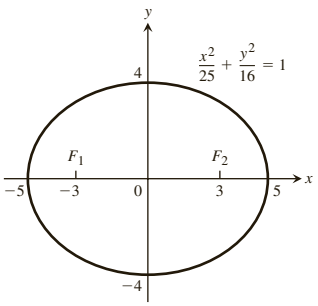
13.



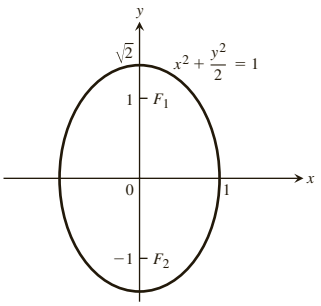
15.



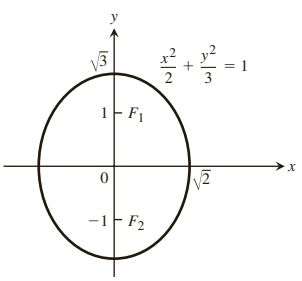
17.



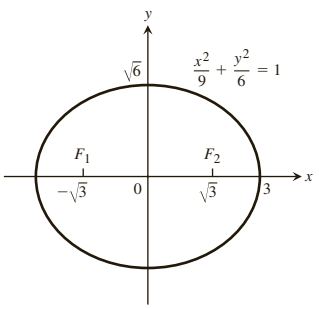
19.



21.

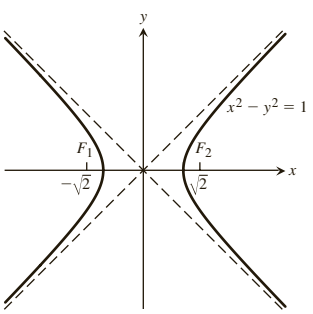


23.

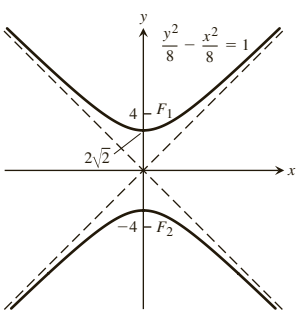


25. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = 1$

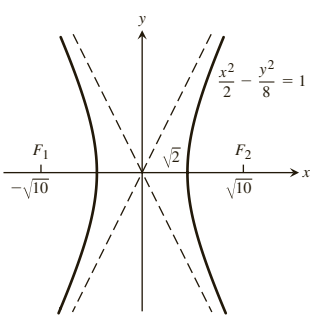
27. Asíntotas: $y = \pm x$



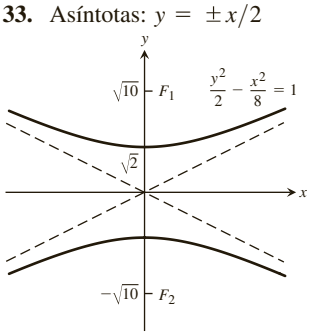
29. Asíntotas: $y = \pm x$



31. Asíntotas: $y = \pm 2x$



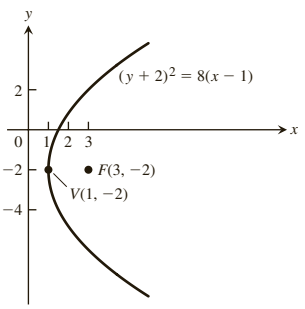
33. Asíntotas: $y = \pm x/2$



35. $y^2 - x^2 = 1$ **37.** $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

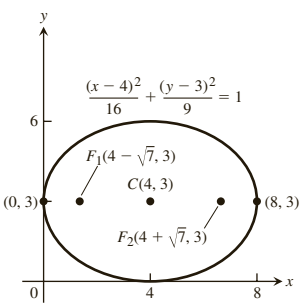
39. ***a***) Vértice: $(1, -2)$; foco: $(3, -2)$; directriz: $x = -1$

b)



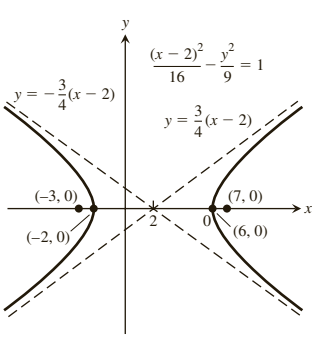
41. ***a***) Focos: $\left(4 \pm \sqrt{7}, 3\right)$; vértices: (8, 3) y (0, 3); centro: (4, 3)

b)



43. ***a***) Centro; (2, 0); focos: (7, 0) y (−3, 0); vértices: (6, 0) y (−2, 0); asíntotas: $y = \pm\dfrac{3}{4}(x - 2)$

b)



45. $(y + 3)^2 = 4(x + 2)$, $V(-2, -3)$, $F(-1, -3)$, directriz: $x = -3$

47. $(x - 1)^2 = 8(y + 7)$, $V(1, -7)$, $F(1, -5)$, directriz: $y = -9$

49. $\dfrac{(x + 2)^2}{6} + \dfrac{(y + 1)^2}{9} = 1$, $F\left(-2, \pm\sqrt{3} - 1\right)$, $V(-2, \pm 3 - 1)$, $C(-2, -1)$

51. $\dfrac{(x - 2)^2}{3} + \dfrac{(y - 3)^2}{2} = 1$, $F(3, 3)$ y $F(1, 3)$, $V\left(\pm\sqrt{3} + 2, 3\right)$, $C(2, 3)$

53. $\dfrac{(x - 2)^2}{4} - \dfrac{(y - 2)^2}{5} = 1$, $C(2, 2)$, $F(5, 2)$ y $F(-1, 2)$, $V(4, 2)$ y $V(0, 2)$; asíntotas: $(y - 2) = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}(x - 2)$

55. $(y+1)^2-(x+1)^2=1$, $C(-1,-1)$, $F\left(-1,\sqrt{2}-1\right)$ y $F\left(-1,-\sqrt{2}-1\right)$, $V(-1,0)$ y $V(-1,-2)$; asíntotas: $(y+1)=\pm(x+1)$

57. $C(-2,0)$, $a=4$ **59.** $V(-1,1)$, $F(-1,0)$

61. Elipse: $\dfrac{(x+2)^2}{5}+y^2=1$, $C(-2,0)$, $F(0,0)$ y $F(-4,0)$, $V\left(\sqrt{5}-2,0\right)$ y $V\left(-\sqrt{5}-2,0\right)$

63. Elipse: $\dfrac{(x-1)^2}{2}+(y-1)^2=1$, $C(1,1)$, $F(2,1)$ y $F(0,1)$, $V\left(\sqrt{2}+1,1\right)$ y $V\left(-\sqrt{2}+1,1\right)$

65. Hipérbola: $(x-1)^2-(y-2)^2=1$, $C(1,2)$, $F\left(1+\sqrt{2},2\right)$ y $F\left(1-\sqrt{2},2\right)$, $V(2,2)$ y $V(0,2)$; asíntotas: $(y-2)=\pm(x-1)$

67. Hipérbola: $\dfrac{(y-3)^2}{6}-\dfrac{x^2}{3}=1$, $C(0,3)$, $F(0,6)$ y $F(0,0)$, $V\left(0,\sqrt{6}+3\right)$ y $V\left(0,-\sqrt{6}+3\right)$; asíntotas: $y=\sqrt{2}x+3$ o $y=-\sqrt{2}x+3$

69. ***b)*** 1 : 1 **73.** Largo $=2\sqrt{2}$, ancho $=\sqrt{2}$, área $=4$

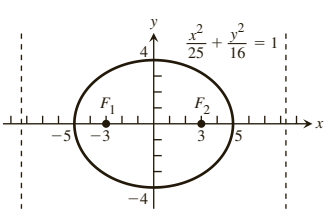
75. 24π

77. $x=0, y=0$: $y=-2x$; $x=0, y=2$: $y=2x+2$; $x=4, y=0$: $y=2x-8$

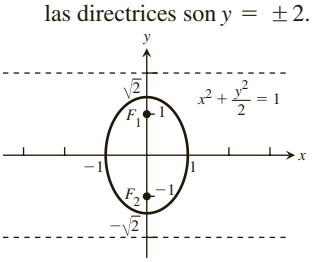
79. $\bar{x}=0$, $\bar{y}=\dfrac{16}{3\pi}$

Sección 11.7, páginas 685 a 686

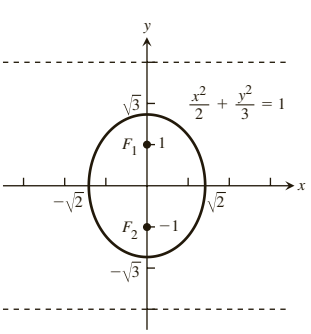
1. $e=\dfrac{3}{5}$, $F(\pm3,0)$; las directrices son $x=\pm\dfrac{25}{3}$.



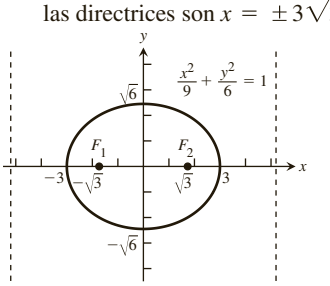
3. $e=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $F(0,\pm1)$; las directrices son $y=\pm2$.



5. $e=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $F(0,\pm1)$; las directrices son $y=\pm3$.



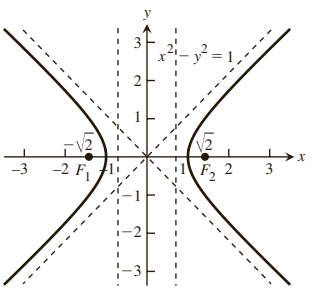
7. $e=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $F\left(\pm\sqrt{3},0\right)$; las directrices son $x=\pm3\sqrt{3}$.



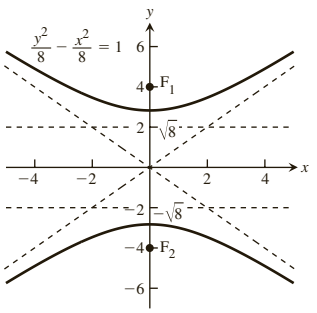
9. $\dfrac{x^2}{27}+\dfrac{y^2}{36}=1$ **11.** $\dfrac{x^2}{4851}+\dfrac{y^2}{4900}=1$

13. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ **15.** $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{48}=1$

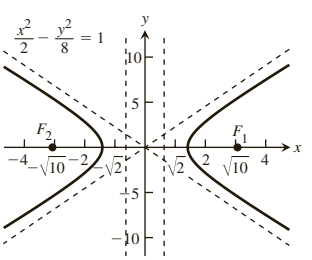
17. $e=\sqrt{2}$; $F\left(\pm\sqrt{2},0\right)$; las directrices son $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.



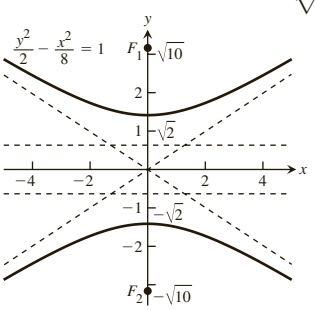
19. $e=\sqrt{2}$; $F(0,\pm4)$; las directrices son $y=\pm2$.



21. $e=\sqrt{5}$; $F\left(\pm\sqrt{10},0\right)$; las directrices son $x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{10}}$.



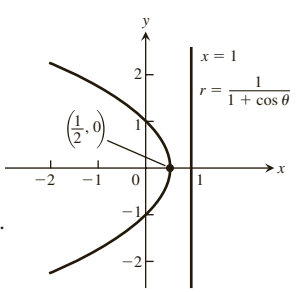
23. $e=\sqrt{5}$; $F\left(0,\pm\sqrt{10}\right)$; las directrices son $y=\pm\dfrac{2}{\sqrt{10}}$.



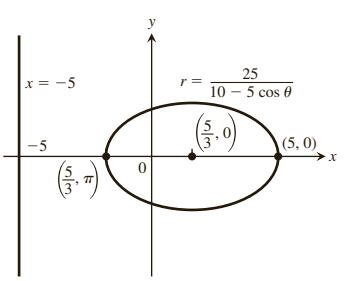
25. $y^2-\dfrac{x^2}{8}=1$ **27.** $x^2-\dfrac{y^2}{8}=1$ **29.** $r=\dfrac{2}{1+\cos\theta}$

31. $r=\dfrac{30}{1-5\operatorname{sen}\theta}$ **33.** $r=\dfrac{1}{2+\cos\theta}$ **35.** $r=\dfrac{10}{5-\operatorname{sen}\theta}$

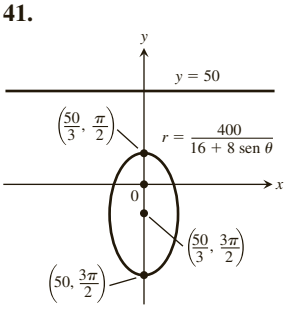
37.



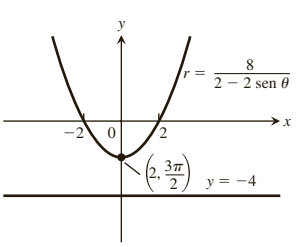
39.



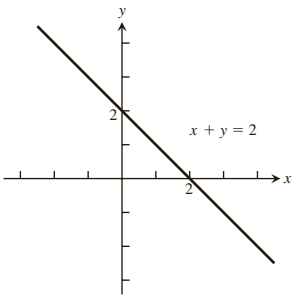
41.



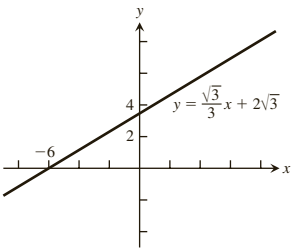
43.



45. $y = 2 - x$



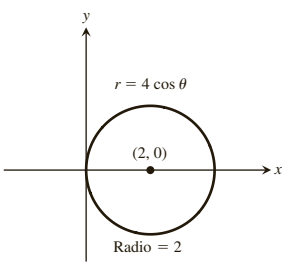
47. $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3}$



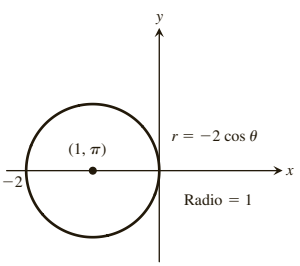
49. $r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 3$

51. $r\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = 5$

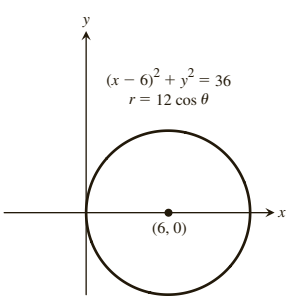
53.



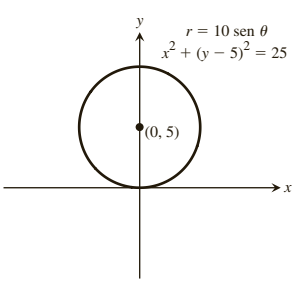
55.



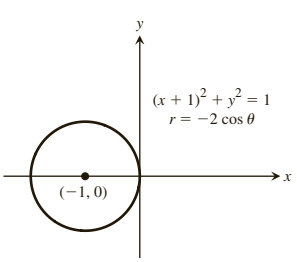
57. $r = 12\cos\theta$



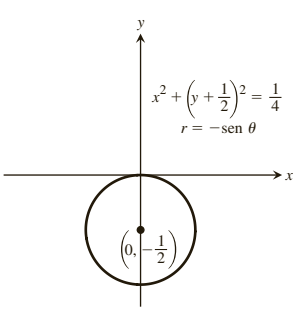
59. $r = 10\operatorname{sen}\theta$



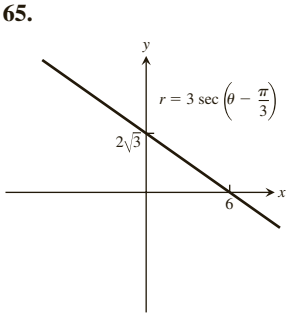
61. $r = -2\cos\theta$



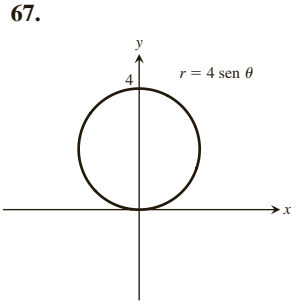
63. $r = -\operatorname{sen}\theta$



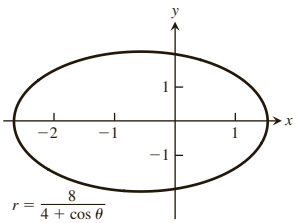
65.



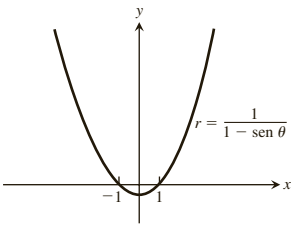
67.



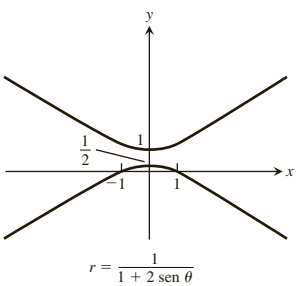
69.



71.



73.

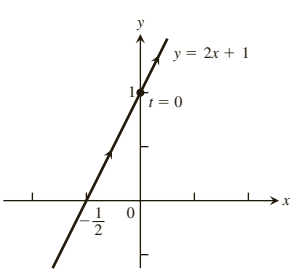


75. *b*)

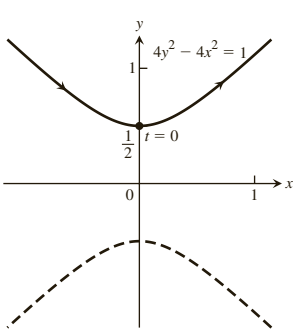
Planeta	Perihelio	Afelio
Mercurio	0.3075 UA	0.4667 UA
Venus	0.7184 UA	0.7282 UA
Tierra	0.9833 UA	1.0167 UA
Marte	1.3817 UA	1.6663 UA
Júpiter	4.9512 UA	5.4548 UA
Saturno	9.0210 UA	10.0570 UA
Urano	18.2977 UA	20.0623 UA
Neptuno	29.8135 UA	30.3065 UA

Ejercicios de práctica, páginas 687 a 689

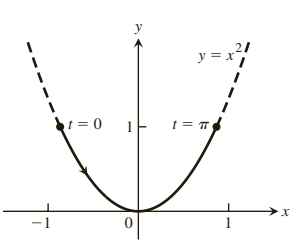
1.



3.



5.



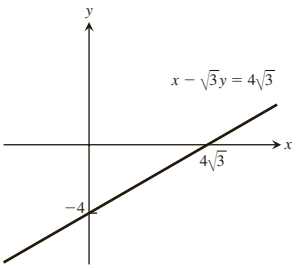
7. $x = 3\cos t, \quad y = 4\operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

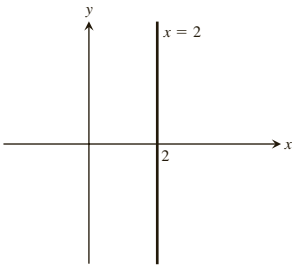
9. $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$

11. ***a)*** $y = \dfrac{\pm |x|^{3/2}}{8} - 1$ ***b)*** $y = \dfrac{\pm\sqrt{1 - x^2}}{x}$

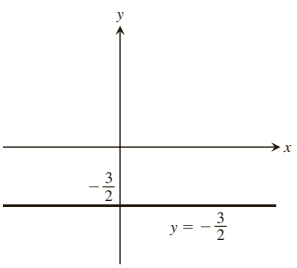
13. $\dfrac{10}{3}$ **15.** $\dfrac{285}{8}$ **17.** 10 **19.** $\dfrac{9\pi}{2}$ **21.** $\dfrac{76\pi}{3}$

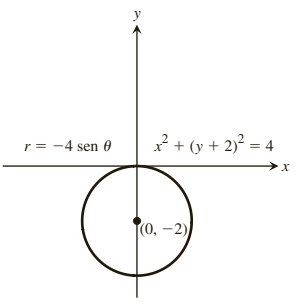
23. $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x - 4$ **25.** $x = 2$



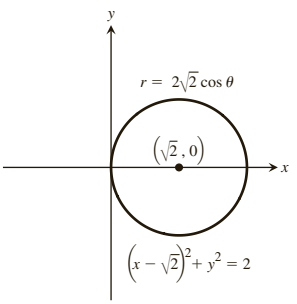


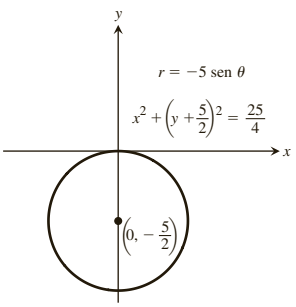
27. $y = -\dfrac{3}{2}$ **29.** $x^2 + (y + 2)^2 = 4$



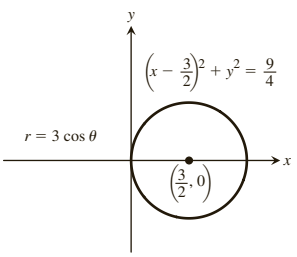


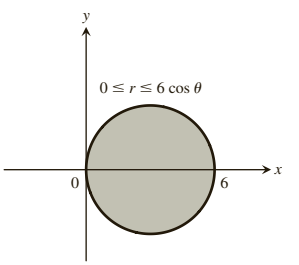
31. $\left(x - \sqrt{2}\right)^2 + y^2 = 2$ **33.** $r = -5 \operatorname{sen}\theta$





35. $r = 3\cos\theta$ **37.**

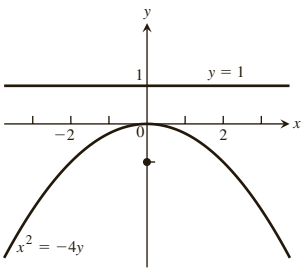




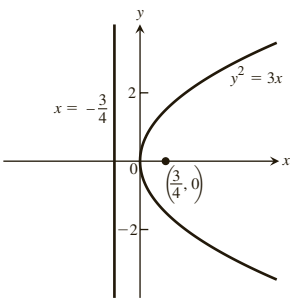
39. d **41.** l **43.** k **45.** i **47.** $\dfrac{9}{2}\pi$ **49.** $2 + \dfrac{\pi}{4}$

51. 8 **53.** $\pi - 3$

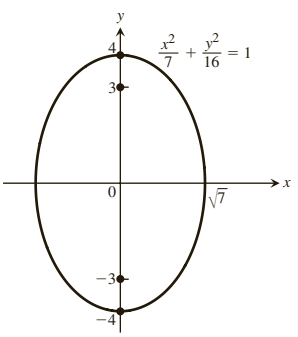
55. El foco es $(0, -1)$, la directriz es $y = 1$.



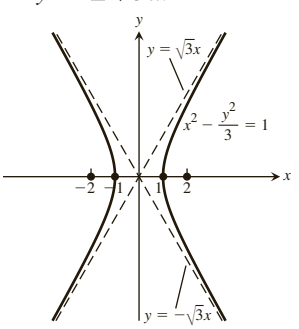
57. El foco es $\left(\dfrac{3}{4}, 0\right)$, la directriz es $x = -\dfrac{3}{4}$.



59. $e = \dfrac{3}{4}$



61. $e = 2$; las asíntotas son $y = \pm\sqrt{3}\,x$.



63. $(x - 2)^2 = -12(y - 3)$, $V(2, 3)$, $F(2, 0)$, la directriz es $y = 6$.

65. $\dfrac{(x + 3)^2}{9} + \dfrac{(y + 5)^2}{25} = 1$, $C(-3, -5)$, $F(-3, -1)$ y $F(-3, -9)$, $V(-3, -10)$ y $V(-3, 0)$.

67. $\dfrac{\left(y - 2\sqrt{2}\right)^2}{8} - \dfrac{(x - 2)^2}{2} = 1$, $C\left(2, 2\sqrt{2}\right)$, $F\left(2, 2\sqrt{2} \pm \sqrt{10}\right)$, $V\left(2, 4\sqrt{2}\right)$ y $V(2, 0)$, las asíntotas son $y = 2x - 4 + 2\sqrt{2}$ y $y = -2x + 4 + 2\sqrt{2}$.

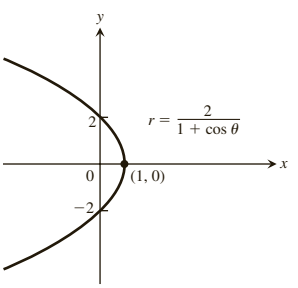
69. Hipérbola: $C(2, 0)$, $V(0, 0)$ y $V(4, 0)$, los focos son $F\left(2 \pm \sqrt{5}, 0\right)$, y las asíntotas son $y = \pm\dfrac{x - 2}{2}$.

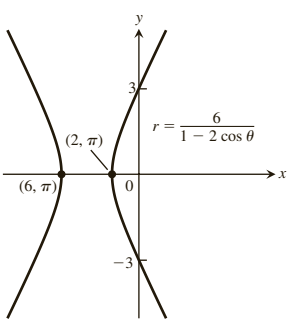
71. Parábola: $V(-3, 1)$, $F(-7, 1)$, y la directriz es $x = 1$.

73. Elipse: $C(-3, 2)$, $F\left(-3 \pm \sqrt{7}, 2\right)$, $V(1, 2)$ y $V(-7, 2)$

75. Circunferencia: $C(1, 1)$ y radio $= \sqrt{2}$

77. $V(1, 0)$ **79.** $V(2, \pi)$ y $V(6, \pi)$



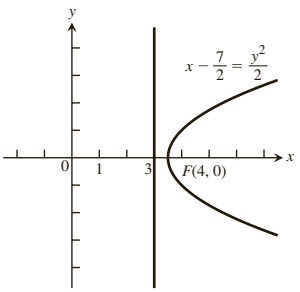


81. $r = \dfrac{4}{1 + 2\cos\theta}$ **83.** $r = \dfrac{2}{2 + \operatorname{sen}\theta}$

85. ***a***) 24π ***b***) 16π

Ejercicios adicionales y avanzados, páginas 689 a 691

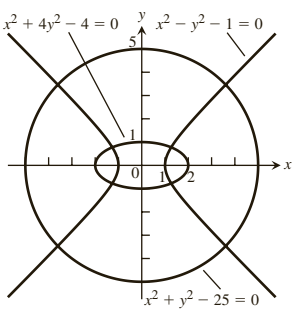
1. $x - \dfrac{7}{2} = \dfrac{y^2}{2}$



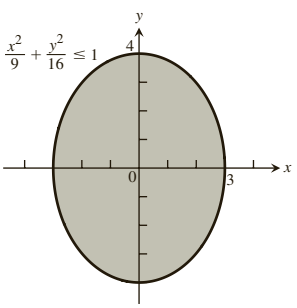
3. $3x^2 + 3y^2 - 8y + 4 = 0$ **5.** $F(0, \pm 1)$

7. ***a***) $\dfrac{(y-1)^2}{16} - \dfrac{x^2}{48} = 1$ ***b***) $\dfrac{\left(y + \frac{3}{4}\right)^2}{\left(\frac{25}{16}\right)} - \dfrac{x^2}{\left(\frac{75}{2}\right)} = 1$

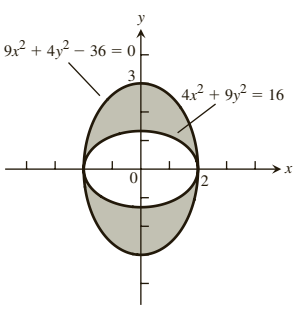
11.



13.



15.



17. ***a***) $r = e^{2\theta}$ ***b***) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}(e^{4\pi} - 1)$

19. $r = \dfrac{4}{1 + 2\cos\theta}$ **21.** $r = \dfrac{2}{2 + \operatorname{sen}\theta}$

23. $x = (a + b)\cos\theta - b\cos\left(\dfrac{a+b}{b}\theta\right)$,

$y = (a + b)\operatorname{sen}\theta - b\operatorname{sen}\left(\dfrac{a+b}{b}\theta\right)$

27. $\dfrac{\pi}{2}$

Capítulo 12

Sección 12.1, páginas 695 a 696

1. La recta a través del punto (2, 3, 0) paralela al eje z

3. El eje x

5. La circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ en el plano xy

7. La circunferencia $x^2 + z^2 = 4$ en el plano xz

9. La circunferencia $y^2 + z^2 = 1$ en el plano yz

11. La circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ en el plano xy

13. La elipse formada por la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el plano $z = y$

15. La parábola $y = x^2$ en el plano xy

17. ***a***) El primer cuadrante del plano xy

b) El cuarto cuadrante del plano xy

19. ***a***) La pelota de radio 1 con centro en el origen

b) Todos los puntos mayores que 1 a partir del origen

21. ***a***) La pelota de radio 2 con centro en el origen, con el interior de la pelota de radio 1 con centro en el origen removido

b) El hemisferio sólido superior de radio 1 con centro en el origen

23. ***a***) La región sobre o dentro de la parábola $y = x^2$ en el plano xy y todos los puntos arriba de esta región

b) La región sobre o a la izquierda de la parábola $x = y^2$ en el plano xy y todos los puntos arriba de ella que están a 2 unidades o menos del plano xy

25. ***a***) $x = 3$ ***b***) $y = -1$ ***c***) $z = -2$

27. ***a***) $z = 1$ ***b***) $x = 3$ ***c***) $y = -1$

29. ***a***) $x^2 + (y-2)^2 = 4, z = 0$

b) $(y-2)^2 + z^2 = 4, x = 0$ ***c***) $x^2 + z^2 = 4, y = 2$

31. ***a***) $y = 3, z = -1$ ***b***) $x = 1, z = -1$

c) $x = 1, y = 3$

33. $x^2 + y^2 + z^2 = 25, z = 3$ **35.** $0 \le z \le 1$ **37.** $z \le 0$

39. ***a***) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 < 1$

b) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 > 1$

41. 3 **43.** 7 **45.** $2\sqrt{3}$ **47.** $C(-2, 0, 2), a = 2\sqrt{2}$

49. $C\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\right), a = \sqrt{2}$

51. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$

53. $(x+1)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{16}{81}$

55. $C(-2, 0, 2), a = \sqrt{8}$ **57.** $C\left(-\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{4}\right), a = \dfrac{5\sqrt{3}}{4}$

59. ***a***) $\sqrt{y^2 + z^2}$ ***b***) $\sqrt{x^2 + z^2}$ ***c***) $\sqrt{x^2 + y^2}$

61. $\sqrt{17} + \sqrt{33} + 6$ **63.** $y = 1$

65. ***a***) $(0, 3, -3)$ ***b***) $(0, 5, -5)$

Sección 12.2, páginas 704 a 706

1. ***a***) $\langle 9, -6 \rangle$ ***b***) $3\sqrt{13}$ **3.** ***a***) $\langle 1, 3 \rangle$ ***b***) $\sqrt{10}$

5. ***a***) $\langle 12, -19 \rangle$ ***b***) $\sqrt{505}$

7. ***a***) $\left\langle \dfrac{1}{5}, \dfrac{14}{5} \right\rangle$ ***b***) $\dfrac{\sqrt{197}}{5}$ **9.** $\langle 1, -4 \rangle$

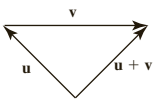
11. $\langle -2, -3 \rangle$ **13.** $\left\langle -\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle$ **15.** $\left\langle -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2} \right\rangle$

17. $-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ **19.** $-3\mathbf{i} + 16\mathbf{j}$

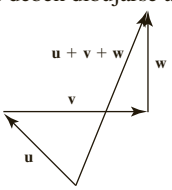
21. $3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$

23. El vector **v** es horizontal y de 1 in de largo. Los vectores **u** y **w** son de $\frac{11}{16}$ in de largo, **w** es vertical y **u** forma un ángulo de 45° con la horizontal. Todos los vectores deben dibujarse a escala.

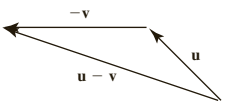
a)



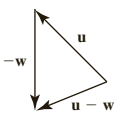
b)



c)



d)



25. $3\left(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}\right)$ **27.** $5(\mathbf{k})$

29. $\sqrt{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}\right)$

31. ***a)*** $2\mathbf{i}$ ***b)*** $-\sqrt{3}\mathbf{k}$ ***c)*** $\frac{3}{10}\mathbf{j} + \frac{2}{5}\mathbf{k}$ ***d)*** $6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

33. $\frac{7}{13}(12\mathbf{i} - 5\mathbf{k})$

35. ***a)*** $\frac{3}{5\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{4}{5\sqrt{2}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$ ***b)*** $(1/2, 3, 5/2)$

37. ***a)*** $-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$ ***b)*** $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right)$

39. $A(4, -3, 5)$ **41.** $a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}$

43. $\approx \langle -338.095, 725.046 \rangle$

45. $|\mathbf{F}_1| = \frac{100 \cos 45°}{\operatorname{sen} 75°} \approx 73.205$ N,

$|\mathbf{F}_2| = \frac{100 \cos 30°}{\operatorname{sen} 75°} \approx 89.658$ N,

$\mathbf{F}_1 = \langle -|\mathbf{F}_1| \cos 30°, |\mathbf{F}_1| \operatorname{sen} 30° \rangle \approx \langle -63.397, 36.603 \rangle$,

$\mathbf{F}_2 = \langle |\mathbf{F}_2| \cos 45°, |\mathbf{F}_2| \operatorname{sen} 45° \rangle \approx \langle 63.397, 63.397 \rangle$

47. $w = \frac{100 \operatorname{sen} 75°}{\cos 40°} \approx 126.093$ N,

$|\mathbf{F}_1| = \frac{w \cos 35°}{\operatorname{sen} 75°} \approx 106.933$ N

49. ***a)*** $(5 \cos 60°, 5 \operatorname{sen} 60°) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

b) $(5 \cos 60° + 10 \cos 315°, 5 \operatorname{sen} 60° + 10 \operatorname{sen} 315°) = \left(\frac{5 + 10\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{3} - 10\sqrt{2}}{2}\right)$

51. ***a)*** $\frac{3}{2}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ ***b)*** $\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ***c)*** $(2, 2, 1)$

Sección 12.3, páginas 712 a 714

1. ***a)*** $-25, 5, 5$ ***b)*** -1 ***c)*** -5 ***d)*** $-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \sqrt{5}\mathbf{k}$

3. ***a)*** $25, 15, 5$ ***b)*** $\frac{1}{3}$ ***c)*** $\frac{5}{3}$ ***d)*** $\frac{1}{9}(10\mathbf{i} + 11\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$

5. ***a)*** $2, \sqrt{34}, \sqrt{3}$ ***b)*** $\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{34}}$ ***c)*** $\frac{2}{\sqrt{34}}$

d) $\frac{1}{17}(5\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$

7. ***a)*** $10 + \sqrt{17}, \sqrt{26}, \sqrt{21}$ ***b)*** $\frac{10 + \sqrt{17}}{\sqrt{546}}$

c) $\frac{10 + \sqrt{17}}{\sqrt{26}}$ ***d)*** $\frac{10 + \sqrt{17}}{26}(5\mathbf{i} + \mathbf{j})$

9. 0.75 rad **11.** 1.77 rad

13. Ángulo en $A = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 63.435$ grados, ángulo en

$B = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 53.130$ grados, ángulo en

$C = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 63.435$ grados.

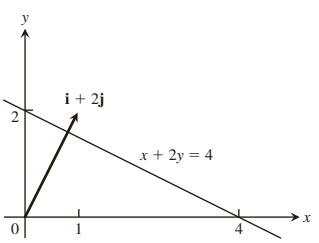
23. Componente horizontal: ≈ 1188 ft/s, componente vertical: ≈ 1188 ft/s

25. ***a)*** Puesto que $|\cos\theta| \leq 1$, tenemos que $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\,|\cos\theta| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\,(1) = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$.

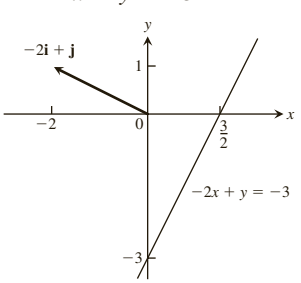
b) Existe igualdad precisamente cuando $|\cos\theta| = 1$ o cuando **u** o **v** o ambos son **0**. En el caso de vectores diferentes de cero, existe igualdad cuando $\theta = 0$ o π, es decir, cuando los vectores son paralelos.

27. *a*

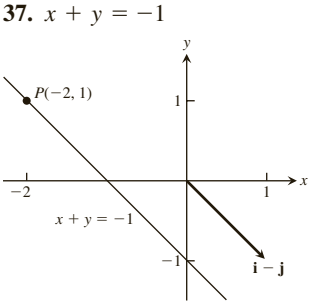
33. $x + 2y = 4$



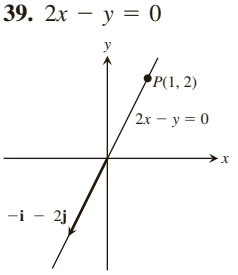
35. $-2x + y = -3$



37. $x + y = -1$



39. $2x - y = 0$



41. 5 J **43.** 3464 J **45.** $\frac{\pi}{4}$ **47.** $\frac{\pi}{6}$ **49.** 0.14

Sección 12.4, páginas 718 a 720

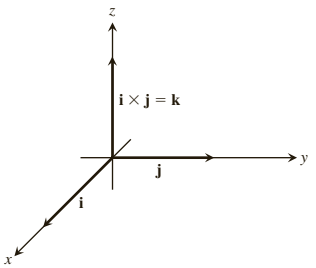
1. $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = 3$, la dirección es $\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$; $|\mathbf{v} \times \mathbf{u}| = 3$, la dirección es $-\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$

3. $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = 0$, sin dirección; $|\mathbf{v} \times \mathbf{u}| = 0$, sin dirección

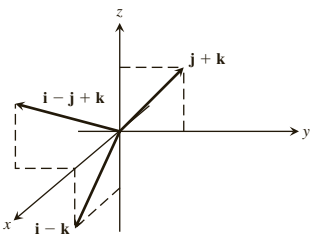
5. $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = 6$, la dirección es $-\mathbf{k}$; $|\mathbf{v} \times \mathbf{u}| = 6$, la dirección es $\mathbf{k}$

7. $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = 6\sqrt{5}$, la dirección es $\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$; $|\mathbf{v} \times \mathbf{u}| = 6\sqrt{5}$, la dirección es $-\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$

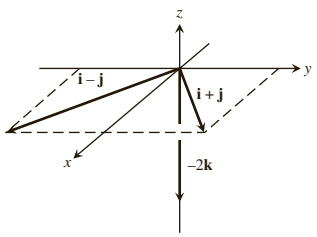
9.



11.



13.



15. *a*) $2\sqrt{6}$ *b*) $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$

17. *a*) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ *b*) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i}-\mathbf{j})$

19. 8 **21.** 7 **23.** *a*) Ninguno *b*) **u** y **w**

25. $10\sqrt{3}$ lb-ft

27. *a*) Verdadero *b*) No siempre verdadero *c*) Verdadero
d) Verdadero *e*) No siempre verdadero *f*) Verdadero
g) Verdadero *h*) Verdadero

29. *a*) $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}=\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}$ *b*) $\pm\,\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ *c*) $\pm(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}$
d) $|(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}|$ *e*) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times(\mathbf{u}\times\mathbf{w})$ *f*) $|\mathbf{u}|\,\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$

31. *a*) Sí *b*) No *c*) Sí *d*) No

33. No, **v** no necesita ser igual a **w**. Por ejemplo, $\mathbf{i}+\mathbf{j}\neq-\mathbf{i}+\mathbf{j}$, pero $\mathbf{i}\times(\mathbf{i}+\mathbf{j})=\mathbf{i}\times\mathbf{i}+\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{0}+\mathbf{k}=\mathbf{k}$ y $\mathbf{i}\times(-\mathbf{i}+\mathbf{j})=-\mathbf{i}\times\mathbf{i}+\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{0}+\mathbf{k}=\mathbf{k}$.

35. 2 **37.** 13 **39.** $\sqrt{129}$ **41.** $\frac{11}{2}$ **43.** $\frac{25}{2}$

45. $\frac{3}{2}$ **47.** $\frac{\sqrt{21}}{2}$

49. Si $\mathbf{A}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}$ y $\mathbf{B}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}$, entonces,

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\a_1&a_2&0\\b_1&b_2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\mathbf{k}$$

y el área del triángulo es

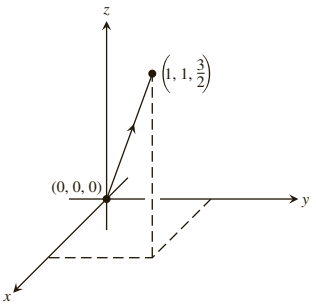
$$\frac{1}{2}\left|\mathbf{A}\times\mathbf{B}\right|=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}.$$

El signo correspondiente es (+) si el ángulo agudo de **A** a **B** va en sentido contrario al de las manecillas del reloj en el plano *xy*, y (−) si va en el mismo sentido de las manecillas del reloj.

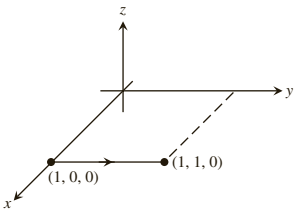
Sección 12.5, páginas 726 a 728

1. $x=3+t,\quad y=-4+t,\quad z=-1+t$
3. $x=-2+5t,\quad y=5t,\quad z=3-5t$
5. $x=0,\quad y=2t,\quad z=t$
7. $x=1,\quad y=1,\quad z=1+t$
9. $x=t,\quad y=-7+2t,\quad z=2t$
11. $x=t,\quad y=0,\quad z=0$

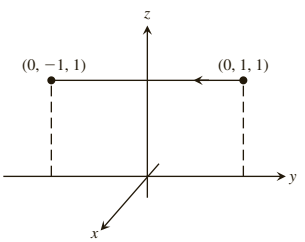
13. $x=t,\quad y=t,\quad z=\frac{3}{2}t,\quad 0\le t\le 1$



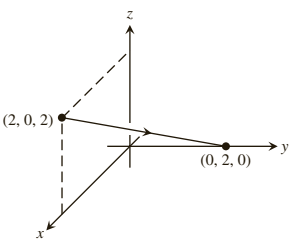
15. $x=1,\quad y=1+t,\quad z=0,\quad -1\le t\le 0$



17. $x=0,\quad y=1-2t,\quad z=1,\quad 0\le t\le 1$



19. $x=2-2t,\quad y=2t,\quad z=2-2t,\quad 0\le t\le 1$



21. $3x-2y-z=-3$ **23.** $7x-5y-4z=6$
25. $x+3y+4z=34$ **27.** $(1,2,3),\ -20x+12y+z=7$

29. $y+z=3$ **31.** $x-y+z=0$ **33.** $2\sqrt{30}$ **35.** 0

37. $\frac{9\sqrt{42}}{7}$ **39.** 3 **41.** $19/5$ **43.** $5/3$ **45.** $9/\sqrt{41}$

47. $\pi/4$ **49.** 1.38 rad **51.** 0.82 rad **53.** $\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$

55. (1, 1, 0) **57.** $x=1-t,\quad y=1+t,\quad z=-1$
59. $x=4,\quad y=3+6t,\quad z=1+3t$
61. $L1$ interseca a $L2$; $L2$ es paralela a $L3$; $\sqrt{5}/3$; $L1$ y $L3$ son oblicuas $10\sqrt{2}/3$
63. $x=2+2t,\quad y=-4-t,\quad z=7+3t;\quad x=-2-t,\quad y=-2+(1/2)t,\quad z=1-(3/2)t$

65. $\left(0,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right),(-1,0,-3),(1,-1,0)$

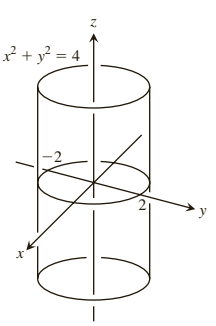
69. Hay muchas respuestas posibles. Una posibilidad es $x+y=3$ y $2y+z=7$.

71. $(x/a)+(y/b)+(z/c)=1$ describe todos los planos *excepto* aquellos que pasan por el origen o son paralelos a los ejes de coordenadas.

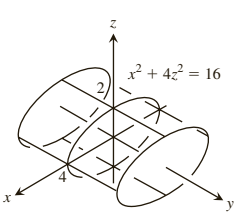
Sección 12.6, páginas 732 a 733

1. ***d***), elipsoide **3.** ***a***), cilindro **5.** ***l***), paraboloide hiperbólico
7. ***b***), cilindro **9.** ***k***), paraboloide hiperbólico **11.** ***h***), cono

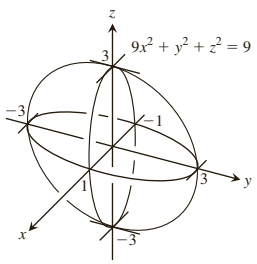
13.



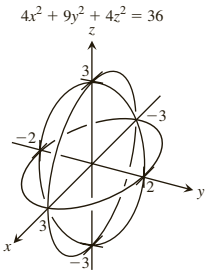
15.



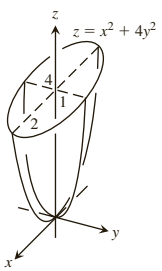
17.



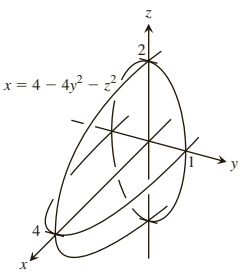
19.



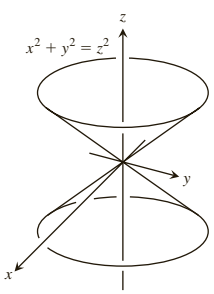
21.



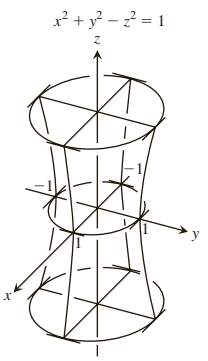
23.



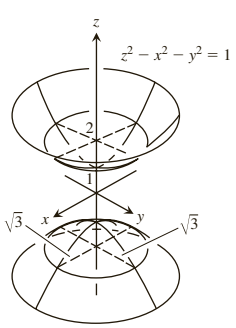
25.



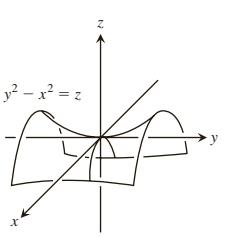
27.



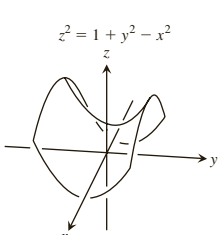
29.



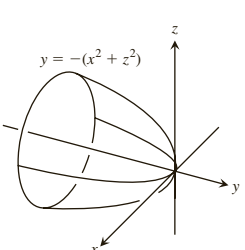
31.



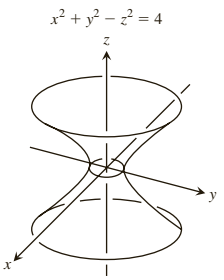
33.



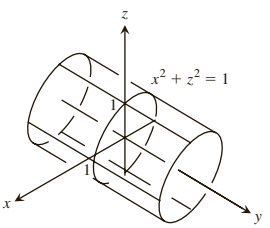
35.



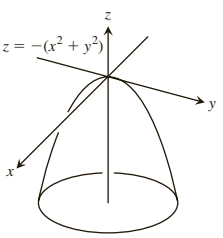
37.



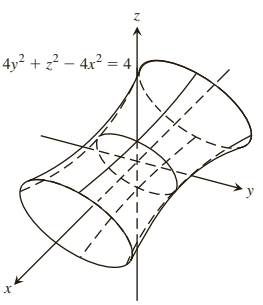
39.



41.



43.



45. *a*) $\dfrac{2\pi(9 - c^2)}{9}$ *b*) 8π *c*) $\dfrac{4\pi abc}{3}$

Ejercicios de práctica, páginas 734 a 735

1. *a*) $\langle -17, 32 \rangle$ *b*) $\sqrt{1313}$

3. *a*) $\langle 6, -8 \rangle$ *b*) 10

5. $\left\langle -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2} \right\rangle$ [se supone sentido contrario al de las manecillas del reloj]

7. $\left\langle \dfrac{8}{\sqrt{17}}, -\dfrac{2}{\sqrt{17}} \right\rangle$

9. Longitud $= 2$, la dirección es $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$.

11. $\mathbf{v}(\pi/2) = 2(-\mathbf{i})$

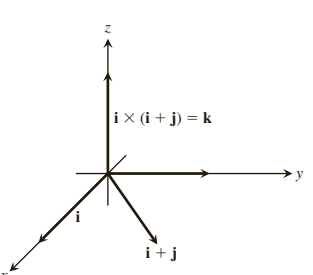
13. Longitud $= 7$, la dirección es $\dfrac{2}{7}\mathbf{i} - \dfrac{3}{7}\mathbf{j} + \dfrac{6}{7}\mathbf{k}$.

15. $\dfrac{8}{\sqrt{33}}\mathbf{i} - \dfrac{2}{\sqrt{33}}\mathbf{j} + \dfrac{8}{\sqrt{33}}\mathbf{k}$

17. $|\mathbf{v}| = \sqrt{2}$, $|\mathbf{u}| = 3$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3$, $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $|\mathbf{v} \times \mathbf{u}| = 3$, $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$, $|\mathbf{u}| \cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$, $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \dfrac{3}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$

19. $\dfrac{4}{3}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$

21. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{k}$



23. $2\sqrt{7}$ **25.** *a*) $\sqrt{14}$ *b*) 1 **29.** $\sqrt{78}/3$

31. $x = 1 - 3t, \quad y = 2, \quad z = 3 + 7t$ **33.** $\sqrt{2}$

35. $2x + y + z = 5$ **37.** $-9x + y + 7z = 4$

39. $\left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right), (-1, 0, -3), (1, -1, 0)$ **41.** $\pi/3$

43. $x = -5 + 5t, \quad y = 3 - t, \quad z = -3t$

45. *b*) $x = -12t, \quad y = 19/12 + 15t, \quad z = 1/6 + 6t$

47. Sí, $\mathbf{v}$ es paralelo al plano.

49. 3 **51.** $-3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

53. $\frac{2}{\sqrt{35}}(5\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k})$ **55.** $\left(\frac{11}{9}, \frac{26}{9}, -\frac{7}{9}\right)$

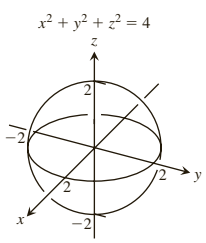
57. $(1, -2, -1); \; x = 1 - 5t, \quad y = -2 + 3t, \quad z = -1 + 4t$

59. $2x + 7y + 2z + 10 = 0$

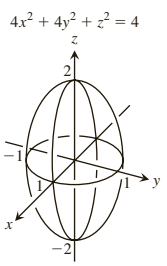
61. *a*) No *b*) No *c*) No *d*) No *e*) Sí

63. $11/\sqrt{107}$

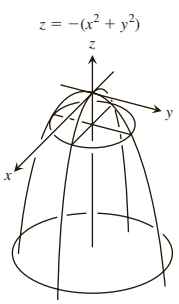
65.



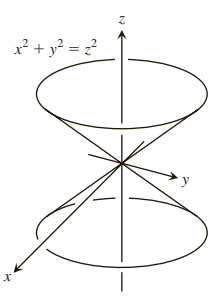
67.



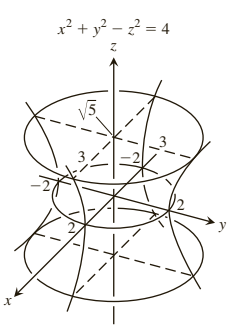
69.



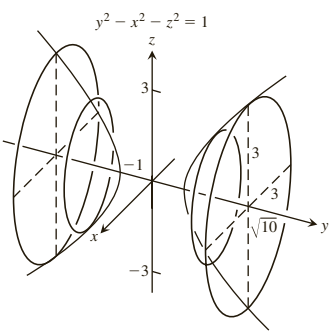
71.



73.



75.



Ejercicios adicionales y avanzados, páginas 736 a 738

1. $(26, 23, -1/3)$ **3.** $|\mathbf{F}| = 20$ lb

5. *a*) $|\mathbf{F}_1| = 80$ lb, $|\mathbf{F}_2| = 60$ lb, $\mathbf{F}_1 = \langle -48, 64 \rangle$,

$\mathbf{F}_2 = \langle 48, 36 \rangle, \quad \alpha = \tan^{-1}\frac{4}{3}, \quad \beta = \tan^{-1}\frac{3}{4}$

b) $|\mathbf{F}_1| = \frac{2400}{13} \approx 184.615$ lb, $|\mathbf{F}_2| = \frac{1000}{13} \approx 76.923$ lb,

$\mathbf{F}_1 = \left\langle \frac{-12{,}000}{169}, \frac{28{,}800}{169} \right\rangle \approx \langle -71.006, 170.414 \rangle,$

$\mathbf{F}_2 = \left\langle \frac{12{,}000}{169}, \frac{5000}{169} \right\rangle \approx \langle 71.006, 29.586 \rangle,$

$\alpha = \tan^{-1}\frac{12}{5}, \; \beta = \tan^{-1}\frac{5}{12}$

9. *a*) $\theta = \tan^{-1}\sqrt{2} \approx 54.74°$ *b*) $\theta = \tan^{-1} 2\sqrt{2} \approx 70.53°$

13. *b*) $\frac{6}{\sqrt{14}}$ *c*) $2x - y + 2z = 8$

d) $x - 2y + z = 3 + 5\sqrt{6}$ y $x - 2y + z = 3 - 5\sqrt{6}$

15. $\frac{32}{41}\mathbf{i} + \frac{23}{41}\mathbf{j} - \frac{13}{41}\mathbf{k}$

17. *a*) $\mathbf{0}, \mathbf{0}$ *b*) $-10\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, -9\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$

c) $-4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

d) $-10\mathbf{i} - 10\mathbf{k}, -12\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$

19. La fórmula siempre es verdadera.

Capítulo 13

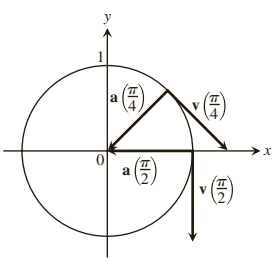
Sección 13.1, páginas 745 a 747

1. $y = x^2 - 2x, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \quad \mathbf{a} = 2\mathbf{j}$

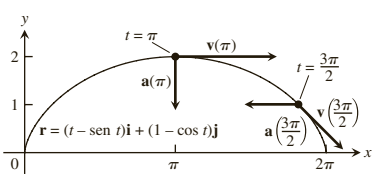
3. $y = \frac{2}{9}x^2, \quad \mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, \quad \mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

5. $t = \frac{\pi}{4}$: $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}, \quad \mathbf{a} = \frac{-\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j};$

$t = \pi/2$: $\mathbf{v} = -\mathbf{j}, \quad \mathbf{a} = -\mathbf{i}$



7. $t = \pi$: $\mathbf{v} = 2\mathbf{i}, \quad \mathbf{a} = -\mathbf{j}; \quad t = \frac{3\pi}{2}$: $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}, \quad \mathbf{a} = -\mathbf{i}$



9. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}; \; \mathbf{a} = 2\mathbf{j}$; rapidez: 3; dirección: $\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$;

$\mathbf{v}(1) = 3\left(\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}\right)$

11. $\mathbf{v} = (-2 \text{ sen } t)\mathbf{i} + (3 \cos t)\mathbf{j} + 4\mathbf{k};$

$\mathbf{a} = (-2 \cos t)\mathbf{i} - (3 \text{ sen } t)\mathbf{j}$; rapidez: $2\sqrt{5}$;

dirección: $\left(-1/\sqrt{5}\right)\mathbf{i} + \left(2/\sqrt{5}\right)\mathbf{k}$;

$\mathbf{v}(\pi/2) = 2\sqrt{5}\left[\left(-1/\sqrt{5}\right)\mathbf{i} + \left(2/\sqrt{5}\right)\mathbf{k}\right]$

13. $\mathbf{v} = \left(\frac{2}{t+1}\right)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$; $\mathbf{a} = \left(\frac{-2}{(t+1)^2}\right)\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$;
rapidez: $\sqrt{6}$; dirección: $\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$;
$\mathbf{v}(1) = \sqrt{6}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}\right)$

15. $\pi/2$ **17.** $\pi/2$

19. $x = t, \quad y = -1, \quad z = 1 + t$ **21.** $x = t, \quad y = \frac{1}{3}t, \quad z = t$

23. ***a*)** **i.** Tiene rapidez constante 1 **ii.** Sí
iii. Sentido contrario al de las manecillas del reloj **iv.** Sí

***b*)** **i.** Tiene rapidez constante 2 **ii.** Sí
iii. Sentido contrario al de las manecillas del reloj **iv.** Sí

***c*)** **i.** Tiene rapidez constante 1 **ii.** Sí
iii. Sentido contrario al de las manecillas del reloj
iv. Inicia en $(0, -1)$ en vez de $(1, 0)$

***d*)** **i.** Tiene rapidez constante 1 **ii.** Sí
iii. En el sentido de las manecillas del reloj **iv.** Sí

***e*)** **i.** Tiene rapidez variable **ii.** No
iii. Sentido contrario al de las manecillas del reloj **iv.** Sí

25. $\mathbf{v} = 2\sqrt{5}\mathbf{i} + \sqrt{5}\mathbf{j}$

Sección 13.2, páginas 753 a 756

1. $(1/4)\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + (3/2)\mathbf{k}$ **3.** $\left(\frac{\pi + 2\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

5. $(\ln 4)\mathbf{i} + (\ln 4)\mathbf{j} + (\ln 2)\mathbf{k}$

7. $\frac{e-1}{2}\mathbf{i} + \frac{e-1}{e}\mathbf{j} + \mathbf{k}$ **9.** $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \frac{\pi}{4}\mathbf{k}$

11. $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{-t^2}{2} + 1\right)\mathbf{i} + \left(\frac{-t^2}{2} + 2\right)\mathbf{j} + \left(\frac{-t^2}{2} + 3\right)\mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}(t) = ((t+1)^{3/2} - 1)\mathbf{i} + (-e^{-t} + 1)\mathbf{j} + (\ln(t+1) + 1)\mathbf{k}$

15. $\mathbf{r}(t) = 8t\mathbf{i} + 8t\mathbf{j} + (-16t^2 + 100)\mathbf{k}$

17. $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{3}{2}t^2 + \frac{6}{\sqrt{11}}t + 1\right)\mathbf{i} - \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\sqrt{11}}t - 2\right)\mathbf{j}$
$+\left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\sqrt{11}}t + 3\right)\mathbf{k} = \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{2t}{\sqrt{11}}\right)(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$
$+(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$

19. 50 s

21. ***a*)** 72.2 s; 25,510 m ***b*)** 4020 m ***c*)** 6378 m

23. ***a*)** $v_0 \approx 9.9$ m/s ***b*)** $\alpha \approx 18.4°$ o $71.6°$

25. 39.3° o 50.7° **31.** ***b*)** $\mathbf{v}_0$ bisecaría $\angle AOR$.

33. ***a*)** (Suponiendo que "x" es cero en el punto de impacto)
$\mathbf{r}(t) = (x(t))\mathbf{i} + (y(t))\mathbf{j}$, donde $x(t) = (35\cos 27°)t$ y $y(t) = 4 + (35 \operatorname{sen} 27°)t - 16t^2$.

***b*)** En $t \approx 0.497$ s, alcanza su máxima altura de aproximadamente 7.945 ft.

***c*)** Rango ≈ 37.45 ft; tiempo de vuelo ≈ 1.201 s

***d*)** En $t \approx 0.254$ y $t \approx 0.740$ s, cuando es ≈ 29.532 y ≈ 14.376 ft desde donde aterrizará

***e*)** Sí. Las cosas cambian porque la pelota no pasará la red.

35. 4.00 ft, 7.80 ft/s

43. ***a*)** $\mathbf{r}(t) = (x(t))\mathbf{i} + (y(t))\mathbf{j}$; donde
$x(t) = \left(\frac{1}{0.08}\right)(1 - e^{-0.08t})(152\cos 20° - 17.6)$ y
$y(t) = 3 + \left(\frac{152}{0.08}\right)(1 - e^{-0.08t})(\operatorname{sen} 20°)$
$+\left(\frac{32}{0.08^2}\right)(1 - 0.08t - e^{-0.08t})$

***b*)** En $t \approx 1.527$ s alcanza la altura máxima de aproximadamente 41.893 ft.

***c*)** Rango ≈ 351.734 ft; tiempo de vuelo ≈ 3.181 s

***d*)** En $t \approx 0.877$ y 2.190 s, cuando está aproximadamente a 106.028 y 251.530 ft del home

***e*)** No

Sección 13.3, páginas 759 a 760

1. $\mathbf{T} = \left(-\frac{2}{3}\operatorname{sen} t\right)\mathbf{i} + \left(\frac{2}{3}\cos t\right)\mathbf{j} + \frac{\sqrt{5}}{3}\mathbf{k}, 3\pi$

3. $\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{1+t}}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1+t}}\mathbf{k}, \frac{52}{3}$ **5.** $\mathbf{T} = -\cos t\mathbf{j} + \operatorname{sen} t\mathbf{k}, \frac{3}{2}$

7. $\mathbf{T} = \left(\frac{\cos t - t\operatorname{sen} t}{t+1}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\operatorname{sen} t + t\cos t}{t+1}\right)\mathbf{j}$
$+\left(\frac{\sqrt{2}t^{1/2}}{t+1}\right)\mathbf{k}, \frac{\pi^2}{2} + \pi$

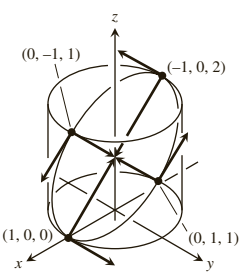
9. $(0, 5, 24\pi)$

11. $s(t) = 5t, \quad L = \frac{5\pi}{2}$

13. $s(t) = \sqrt{3}e^t - \sqrt{3}, \quad L = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ **15.** $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$

17. ***a*)** El cilindro es $x^2 + y^2 = 1$; el plano es $x + z = 1$.

***b*)** y ***c*)**



***d*)** $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 t}\, dt$ ***e*)** $L \approx 7.64$

Sección 13.4, páginas 765 a 766

1. $\mathbf{T} = (\cos t)\mathbf{i} - (\operatorname{sen} t)\mathbf{j}, \quad \mathbf{N} = (-\operatorname{sen} t)\mathbf{i} - (\cos t)\mathbf{j}, \quad \kappa = \cos t$

3. $\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{i} - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{j}, \quad \mathbf{N} = \frac{-t}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\mathbf{j},$
$\kappa = \frac{1}{2\left(\sqrt{1+t^2}\right)^3}$

5. ***b*)** $\cos x$

7. *b)* $\mathbf{N} = \dfrac{-2e^{2t}}{\sqrt{1 + 4e^{4t}}}\mathbf{i} + \dfrac{1}{\sqrt{1 + 4e^{4t}}}\mathbf{j}$

c) $\mathbf{N} = -\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{4 - t^2}\,\mathbf{i} + t\mathbf{j}\right)$

9. $\mathbf{T} = \dfrac{3\cos t}{5}\mathbf{i} - \dfrac{3\operatorname{sen} t}{5}\mathbf{j} + \dfrac{4}{5}\mathbf{k}$, $\mathbf{N} = (-\operatorname{sen} t)\mathbf{i} - (\cos t)\mathbf{j}$, $\kappa = \dfrac{3}{25}$

11. $\mathbf{T} = \left(\dfrac{\cos t - \operatorname{sen} t}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{i} + \left(\dfrac{\cos t + \operatorname{sen} t}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{j}$,

$\mathbf{N} = \left(\dfrac{-\cos t - \operatorname{sen} t}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{i} + \left(\dfrac{-\operatorname{sen} t + \cos t}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{j}$, $\kappa = \dfrac{1}{e^t\sqrt{2}}$

13. $\mathbf{T} = \dfrac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}\mathbf{i} + \dfrac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}\mathbf{j}$, $\mathbf{N} = \dfrac{\mathbf{i}}{\sqrt{t^2 + 1}} - \dfrac{t\mathbf{j}}{\sqrt{t^2 + 1}}$, $\kappa = \dfrac{1}{t(t^2 + 1)^{3/2}}$

15. $\mathbf{T} = \left(\operatorname{sech}\dfrac{t}{a}\right)\mathbf{i} + \left(\tanh\dfrac{t}{a}\right)\mathbf{j}$,

$\mathbf{N} = \left(-\tanh\dfrac{t}{a}\right)\mathbf{i} + \left(\operatorname{sech}\dfrac{t}{a}\right)\mathbf{j}$,

$\kappa = \dfrac{1}{a}\operatorname{sech}^2\dfrac{t}{a}$

19. $1/(2b)$

21. $\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^2 + y^2 = 1$

23. $\kappa(x) = 2/(1 + 4x^2)^{3/2}$

25. $\kappa(x) = |\operatorname{sen} x|/(1 + \cos^2 x)^{3/2}$

Sección 13.5, páginas 771 a 772

1. $\mathbf{a} = |a|\mathbf{N}$ **3.** $\mathbf{a}(1) = \dfrac{4}{3}\mathbf{T} + \dfrac{2\sqrt{5}}{3}\mathbf{N}$ **5.** $\mathbf{a}(0) = 2\mathbf{N}$

7. $\mathbf{r}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{T}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$, $\mathbf{N}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$, $\mathbf{B}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \mathbf{k}$; plano osculador: $z = -1$; plano normal: $-x + y = 0$; plano rectificante: $x + y = \sqrt{2}$

9. $\mathbf{B} = \left(\dfrac{4}{5}\cos t\right)\mathbf{i} - \left(\dfrac{4}{5}\operatorname{sen} t\right)\mathbf{j} - \dfrac{3}{5}\mathbf{k}$, $\tau = -\dfrac{4}{25}$

11. $\mathbf{B} = \mathbf{k}$, $\tau = 0$ **13.** $\mathbf{B} = -\mathbf{k}$, $\tau = 0$ **15.** $\mathbf{B} = \mathbf{k}$, $\tau = 0$

17. Sí. Si el carro se mueve en una trayectoria curva ($\kappa \neq 0$), de manera que $a_N = \kappa|\mathbf{v}|^2 \neq 0$ y $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.

23. $\kappa = \dfrac{1}{t}$, $\rho = t$

27. Componentes de **v**: −1.8701, 0.7089, 1.0000
Componentes de **a**: −1.6960, −2.0307, 0
Rapidez: 2.2361; Componentes de **T**: −0.8364, 0.3170, 0.4472
Componentes de **N**: −0.4143, −0.8998, −0.1369
Componentes de **B**: 0.3590, −0.2998, 0.8839; Curvatura: 0.5060
Torsión: 0.2813; Componente tangencial de la aceleración: 0.7746
Componente normal de la aceleración: 2.5298

29. Componentes de **v**: 2.0000, 0, −0.1629
Componentes de **a**: 0, −1.0000, −0.0086; Rapidez: 2.0066
Componentes de **T**: 0.9967, 0, −0.0812
Componentes de **N**: −0.0007, −1.0000, −0.0086
Componentes de **B**: −0.0812, 0.0086, 0.9967;
Curvatura: 0.2484
Torsión: 0.0411; Componente tangencial de la aceleración: 0.0007
Componente normal de la aceleración: 1.0000

Sección 13.6, páginas 775 a 776

1. $\mathbf{v} = (3a\operatorname{sen}\theta)\mathbf{u}_r + 3a(1 - \cos\theta)\mathbf{u}_\theta$
$\mathbf{a} = 9a(2\cos\theta - 1)\mathbf{u}_r + (18a\operatorname{sen}\theta)\mathbf{u}_\theta$

3. $\mathbf{v} = 2ae^{a\theta}\mathbf{u}_r + 2e^{a\theta}\mathbf{u}_\theta$
$\mathbf{a} = 4e^{a\theta}(a^2 - 1)\mathbf{u}_r + 8ae^{a\theta}\mathbf{u}_\theta$

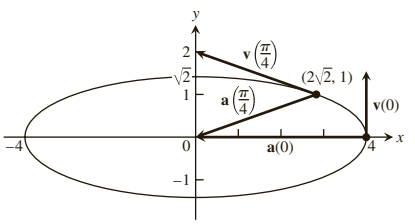
5. $\mathbf{v} = (-8\operatorname{sen} 4t)\mathbf{u}_r + (4\cos 4t)\mathbf{u}_\theta$
$\mathbf{a} = (-40\cos 4t)\mathbf{u}_r - (32\operatorname{sen} 4t)\mathbf{u}_\theta$

11. $\approx 29.93 \times 10^{10}$ m **13.** $\approx 2.25 \times 10^9$ km^2/s

15. $\approx 1.876 \times 10^{27}$ kg

Ejercicios de práctica, páginas 776 a 778

1. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{2} = 1$



En $t = 0$: $a_T = 0$, $a_N = 4$, $\kappa = 2$;

En $t = \dfrac{\pi}{4}$: $a_T = \dfrac{7}{3}$, $a_N = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$, $\kappa = \dfrac{4\sqrt{2}}{27}$

3. $|\mathbf{v}|_{\text{máx}} = 1$ **5.** $\kappa = 1/5$

7. $dy/dt = -x$; en el sentido de las manecillas del reloj

11. Sobre el suelo, aproximadamente a 66 ft 3 in del stopboard (el tope que ayuda al lanzador a contrarrestar la inercia que ha acumulado en el lanzamiento).

15. Longitud $= \dfrac{\pi}{4}\sqrt{1 + \dfrac{\pi^2}{16}} + \ln\left(\dfrac{\pi}{4} + \sqrt{1 + \dfrac{\pi^2}{16}}\right)$

17. $\mathbf{T}(0) = \dfrac{2}{3}\mathbf{i} - \dfrac{2}{3}\mathbf{j} + \dfrac{1}{3}\mathbf{k}$; $\mathbf{N}(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$;

$\mathbf{B}(0) = -\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\mathbf{i} + \dfrac{1}{3\sqrt{2}}\mathbf{j} + \dfrac{4}{3\sqrt{2}}\mathbf{k}$; $\kappa = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$; $\tau = \dfrac{1}{6}$

19. $\mathbf{T}(\ln 2) = \dfrac{1}{\sqrt{17}}\mathbf{i} + \dfrac{4}{\sqrt{17}}\mathbf{j}$; $\mathbf{N}(\ln 2) = -\dfrac{4}{\sqrt{17}}\mathbf{i} + \dfrac{1}{\sqrt{17}}\mathbf{j}$;

$\mathbf{B}(\ln 2) = \mathbf{k}$; $\kappa = \dfrac{8}{17\sqrt{17}}$; $\tau = 0$

21. $\mathbf{a}(0) = 10\mathbf{T} + 6\mathbf{N}$

23. $\mathbf{T} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)\mathbf{i} - (\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)\mathbf{k}$;

$\mathbf{N} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} t\right)\mathbf{i} - (\cos t)\mathbf{j} - \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} t\right)\mathbf{k}$;

$\mathbf{B} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$; $\kappa = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\tau = 0$

25. $\dfrac{\pi}{3}$ **27.** $x = 1 + t$, $y = t$, $z = -t$ **31.** $\kappa = \dfrac{1}{a}$

Ejercicios adicionales y avanzados, páginas 778 a 779

1. ***a***) $\left.\dfrac{d\theta}{dt}\right|_{\theta=2\pi} = 2\sqrt{\dfrac{\pi gb}{a^2+b^2}}$

b) $\theta = \dfrac{gbt^2}{2(a^2+b^2)}, \quad z = \dfrac{gb^2t^2}{2(a^2+b^2)}$

c) $\mathbf{v}(t) = \dfrac{gbt}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathbf{T}$;

$\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \dfrac{bg}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathbf{T} + a\left(\dfrac{bgt}{a^2+b^2}\right)^2\mathbf{N}$

No existe componente en la dirección de $\mathbf{B}$

5. ***a***) $\dfrac{dx}{dt} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta, \dfrac{dy}{dt} = \dot{r}\,\text{sen}\,\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$

b) $\dfrac{dr}{dt} = \dot{x}\cos\theta + \dot{y}\,\text{sen}\,\theta, r\dfrac{d\theta}{dt} = -\dot{x}\,\text{sen}\,\theta + \dot{y}\cos\theta$

7. ***a***) $\mathbf{a}(1) = -9\mathbf{u}_r - 6\mathbf{u}_\theta, \mathbf{v}(1) = -\mathbf{u}_r + 3\mathbf{u}_\theta$ ***b***) 6.5 in

9. ***c***) $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + \dot{z}\mathbf{k}$, $\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta + \ddot{z}\mathbf{k}$

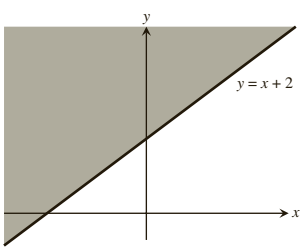
Capítulo 14

Sección 14.1, páginas 787 a 789

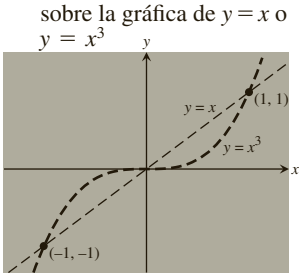
1. ***a***) 0 ***b***) 0 ***c***) 58 ***d***) 33

3. ***a***) $4/5$ ***b***) $8/5$ ***c***) 3 ***d***) 0

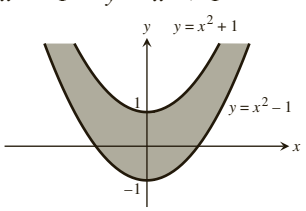
5. Dominio: todos los puntos $\{x, y\}$ en la recta $y = x + 2$ o arriba de ésta



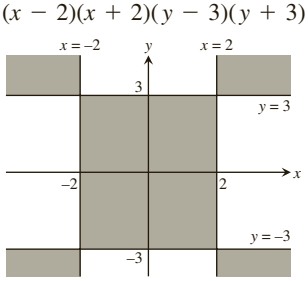
7. Dominio: todos los puntos $\{x, y\}$ que no se encuentran sobre la gráfica de $y = x$ o $y = x^3$



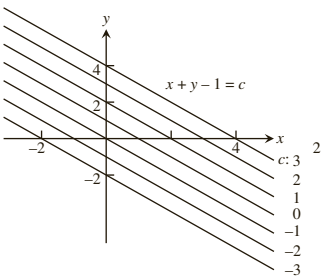
9. Dominio: todos los puntos (x, y) que satisfacen $x^2 - 1 \le y \le x^2 + 1$



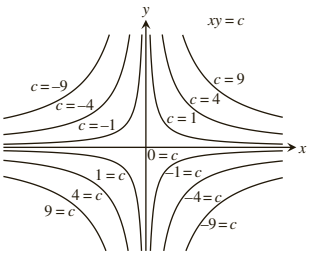
11. Dominio: todos los puntos (x, y) que satisfacen $(x - 2)(x + 2)(y - 3)(y + 3) \ge 0$



13.



15.



17. ***a***) Todos los puntos en el plano xy

b) Todos los números reales ***c***) Las rectas $y - x = c$

d) Sin puntos frontera ***e***) Tanto abierta como cerrada

f) No acotado

19. ***a***) Todos los puntos en el plano xy ***b***) $z \ge 0$

c) Para $f(x, y) = 0$, el origen; para $f(x, y) \ne 0$, elipses con centro en (0, 0), y ejes mayor y menor a lo largo de los ejes x y y, respectivamente

d) Sin puntos frontera ***e***) Tanto abierta como cerrada

f) No acotado

21. ***a***) Todos los puntos en el plano xy

b) Todos los números reales

c) Para $f(x, y) = 0$, los ejes x y y; para $f(x, y) \ne 0$, hipérbolas con los ejes x y y como asíntotas

d) Sin puntos frontera ***e***) Tanto abierta como cerrada

f) No acotado

23. ***a***) Todos los puntos (x, y) que satisfagan $x^2 + y^2 < 16$

b) $z \ge 1/4$

c) Circunferencias con centro en el origen, de radios $r < 4$

d) La frontera es la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$

e) Abierta ***f***) Acotado

25. ***a***) $(x, y) \ne 0$ ***b***) Todos los reales

c) Las circunferencias con centro en (0, 0) y radios $r > 0$

d) La frontera es el punto (0, 0)

e) Abierta ***f***) No acotado

27. ***a***) Todos los puntos (x, y) que satisfagan $-1 \le y - x \le 1$

b) $-\pi/2 \le z \le \pi/2$

c) Líneas rectas de la forma $y - x = c$, donde $-1 \le c \le 1$

d) La frontera está formada por las dos rectas $y = 1 + x$ y $y = -1 + x$

e) Cerrada ***f***) No acotado

29. ***a***) Dominio: todos los puntos (x, y) fuera de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$

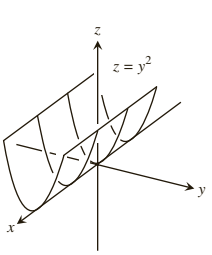
b) Rango: todos los reales

c) Circunferencias con centro en el origen de radios $r > 1$

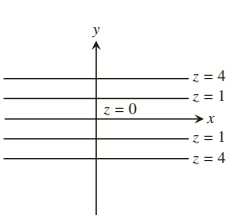
d) Frontera: $x^2 + y^2 = 1$ ***e***) Abierta ***f***) No acotado

31. ***f***) **33.** ***a***) **35.** ***d***)

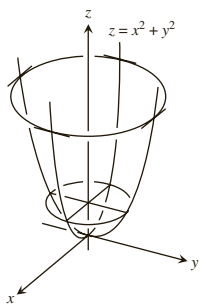
37. ***a***)



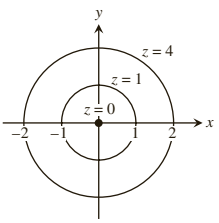
b)



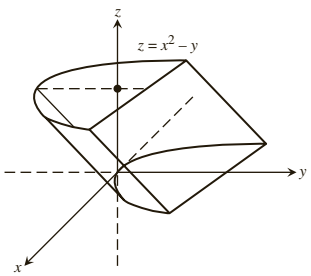
39. ***a)***



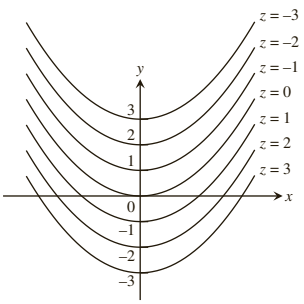
b)



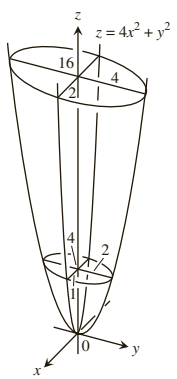
41. ***a)***



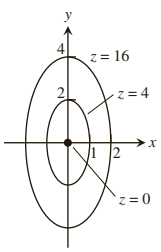
b)



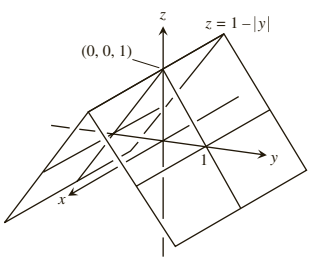
43. ***a)***



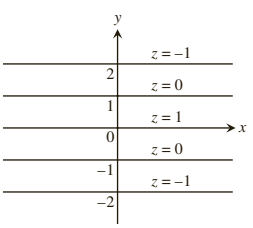
b)



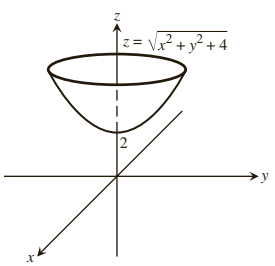
45. ***a)***



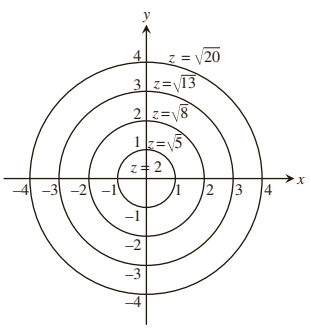
b)



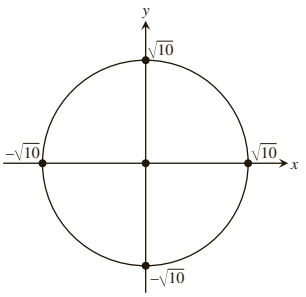
47. ***a)***



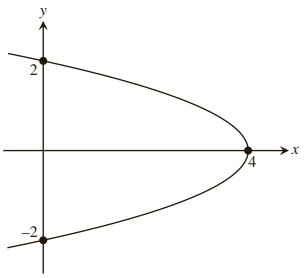
b)



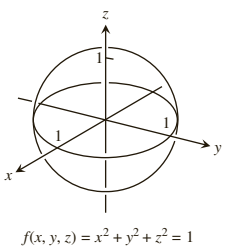
49. $x^2 + y^2 = 10$



51. $x + y^2 = 4$

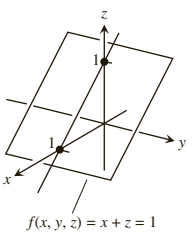


53.



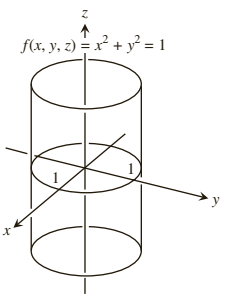
$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$

55.

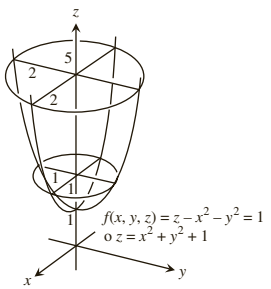


$f(x, y, z) = x + z = 1$

57.



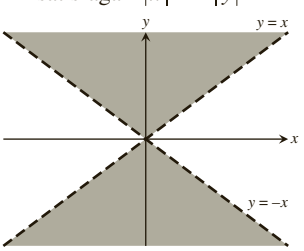
59.



61. $\sqrt{x - y} - \ln z = 2$

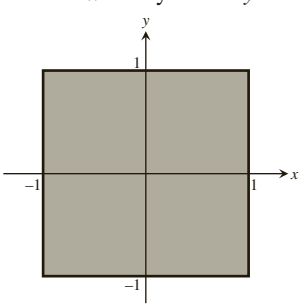
63. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

65. Dominio: todos los puntos (x, y) que satisfagan $|x| < |y|$



curva de nivel: $y = 2x$

67. Dominio: todos los puntos (x, y) que satisfagan $-1 \le x \le 1$ y $-1 \le y \le 1$



curva de nivel: $\text{sen}^{-1} y - \text{sen}^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$

Sección 14.2, páginas 795 a 798

1. 5/2 **3.** $2\sqrt{6}$ **5.** 1 **7.** 1/2 **9.** 1
11. 1/4 **13.** 0 **15.** −1 **17.** 2 **19.** 1/4
21. 1 **23.** 3 **25.** 19/12 **27.** 2 **29.** 3

31. ***a)*** Todos los puntos (x, y)
b) Todos los puntos (x, y) excepto $(0, 0)$

33. ***a)*** Todos los puntos (x, y) excepto donde $x = 0$ o $y = 0$
b) Todos los puntos (x, y)

35. ***a)*** Todos los puntos (x, y, z)
b) Todos los puntos (x, y, z) excepto el interior de el cilindro $x^2 + y^2 = 1$

37. ***a)*** Todos los puntos (x, y, z) con $z \neq 0$
b) Todos los puntos (x, y, z) con $x^2 + z^2 \neq 1$

39. ***a)*** Todos los puntos (x, y, z) que satisfagan $z > x^2 + y^2 + 1$
b) Todos los puntos (x, y, z) que satisfagan $z \neq \sqrt{x^2 + y^2}$

41. Considere trayectorias a lo largo de $y = x$, $x > 0$ y a lo largo de $y = x$, $x < 0$.

43. Considere las trayectorias $y = kx^2$, donde k es una constante.

45. Considere las trayectorias $y = mx$, donde m es una constante, $m \neq -1$.

47. Considere las trayectorias $y = kx^2$, donde k es una constante, $k \neq 0$.

49. Considere las trayectorias $x = 1$ y $y = x$.

51. ***a)*** 1 ***b)*** 0 ***c)*** No existe

55. El límite es 1. **57.** El límite es 0.

59. ***a)*** $f(x, y)\big|_{y=mx} = \operatorname{sen} 2\theta$ donde $\tan\theta = m$ **61.** 0

63. No existe **65.** $\pi/2$ **67.** $f(0, 0) = \ln 3$

69. $\delta = 0.1$ **71.** $\delta = 0.005$ **73.** $\delta = 0.04$

75. $\delta = \sqrt{0.015}$ **77.** $\delta = 0.005$

Sección 14.3, páginas 807 a 809

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x, \dfrac{\partial f}{\partial y} = -3$ **3.** $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x(y + 2), \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1$

5. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2y(xy - 1), \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x(xy - 1)$

7. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

9. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-1}{(x + y)^2}, \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-1}{(x + y)^2}$

11. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-y^2 - 1}{(xy - 1)^2}, \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-x^2 - 1}{(xy - 1)^2}$

13. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y+1}, \dfrac{\partial f}{\partial y} = e^{x+y+1}$ **15.** $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{x + y}, \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{x + y}$

17. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2\operatorname{sen}(x - 3y)\cos(x - 3y)$,
$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -6\operatorname{sen}(x - 3y)\cos(x - 3y)$

19. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}, \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$ **21.** $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -g(x), \dfrac{\partial f}{\partial y} = g(y)$

23. $f_x = y^2, f_y = 2xy, f_z = -4z$

25. $f_x = 1, f_y = -y(y^2 + z^2)^{-1/2}, f_z = -z(y^2 + z^2)^{-1/2}$

27. $f_x = \dfrac{yz}{\sqrt{1 - x^2y^2z^2}}, f_y = \dfrac{xz}{\sqrt{1 - x^2y^2z^2}}, f_z = \dfrac{xy}{\sqrt{1 - x^2y^2z^2}}$

29. $f_x = \dfrac{1}{x + 2y + 3z}, f_y = \dfrac{2}{x + 2y + 3z}, f_z = \dfrac{3}{x + 2y + 3z}$

31. $f_x = -2xe^{-(x^2+y^2+z^2)}, f_y = -2ye^{-(x^2+y^2+z^2)}, f_z = -2ze^{-(x^2+y^2+z^2)}$

33. $f_x = \operatorname{sech}^2(x + 2y + 3z), f_y = 2\operatorname{sech}^2(x + 2y + 3z)$,
$f_z = 3\operatorname{sech}^2(x + 2y + 3z)$

35. $\dfrac{\partial f}{\partial t} = -2\pi\operatorname{sen}(2\pi t - \alpha), \dfrac{\partial f}{\partial \alpha} = \operatorname{sen}(2\pi t - \alpha)$

37. $\dfrac{\partial h}{\partial \rho} = \operatorname{sen}\phi\cos\theta, \dfrac{\partial h}{\partial \phi} = \rho\cos\phi\cos\theta, \dfrac{\partial h}{\partial \theta} = -\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$

39. $W_P(P, V, \delta, v, g) = V, W_V(P, V, \delta, v, g) = P + \dfrac{\delta v^2}{2g}$,
$W_\delta(P, V, \delta, v, g) = \dfrac{Vv^2}{2g}, W_v(P, V, \delta, v, g) = \dfrac{V\delta v}{g}$,
$W_g(P, V, \delta, v, g) = -\dfrac{V\delta v^2}{2g^2}$

41. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 1 + y, \dfrac{\partial f}{\partial y} = 1 + x, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 1$

43. $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 2xy + y\cos x, \dfrac{\partial g}{\partial y} = x^2 - \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x$,
$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2y - y\operatorname{sen} x, \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -\cos y$,
$\dfrac{\partial^2 g}{\partial y\,\partial x} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y} = 2x + \cos x$

45. $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{1}{x + y}, \dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{1}{x + y}, \dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \dfrac{-1}{(x + y)^2}, \dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \dfrac{-1}{(x + y)^2}$,
$\dfrac{\partial^2 r}{\partial y\,\partial x} = \dfrac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{-1}{(x + y)^2}$

47. $\dfrac{\partial w}{\partial x} = x^2y\sec^2(xy) + 2x\tan(xy), \dfrac{\partial w}{\partial y} = x^3\sec^2(xy)$,
$\dfrac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial x} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = 2x^3y\sec^2(xy)\tan(xy) + 3x^2\sec^2(xy)$
$\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 4xy\sec^2(xy) + 2x^2y^2\sec^2(xy)\tan(xy) + 2\tan(xy)$
$\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 2x^4\sec^2(xy)\tan(xy)$

49. $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \operatorname{sen}(x^2y) + 2x^2y\cos(x^2y), \dfrac{\partial w}{\partial y} = x^3\cos(x^2y)$,
$\dfrac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial x} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = 3x^2\cos(x^2y) - 2x^4y\operatorname{sen}(x^2y)$
$\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 6xy\cos(x^2y) - 4x^3y^2\operatorname{sen}(x^2y)$
$\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -x^5\operatorname{sen}(x^2y)$

51. $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{2}{2x + 3y}, \dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{3}{2x + 3y}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial x} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{-6}{(2x + 3y)^2}$

53. $\dfrac{\partial w}{\partial x} = y^2 + 2xy^3 + 3x^2y^4, \dfrac{\partial w}{\partial y} = 2xy + 3x^2y^2 + 4x^3y^3$,
$\dfrac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial x} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = 2y + 6xy^2 + 12x^2y^3$

55. ***a)*** x primero ***b)*** y primero ***c)*** x primero
d) x primero ***e)*** y primero ***f)*** y primero

57. $f_x(1, 2) = -13, f_y(1, 2) = -2$

59. $f_x(-2, 3) = 1/2, f_y(-2, 3) = 3/4$ **61.** ***a)*** 3 ***b)*** 2

63. 12 **65.** -2 **67.** $\dfrac{\partial A}{\partial a} = \dfrac{a}{bc\operatorname{sen} A}, \dfrac{\partial A}{\partial b} = \dfrac{c\cos A - b}{bc\operatorname{sen} A}$

69. $v_x = \dfrac{\ln v}{(\ln u)(\ln v) - 1}$

71. $f_x(x, y) = 0$ para todos los puntos (x, y)
$f_y(x, y) = \begin{cases} 3y^2, & y \geq 0 \\ -2y, & y < 0 \end{cases}$,
$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 0$ para todos los puntos (x, y)

89. Sí

Sección 14.4, páginas 816 a 818

1. ***a)*** $\dfrac{dw}{dt} = 0$, ***b)*** $\dfrac{dw}{dt}(\pi) = 0$

3. ***a)*** $\dfrac{dw}{dt} = 1$, ***b)*** $\dfrac{dw}{dt}(3) = 1$

5. *a*) $\dfrac{dw}{dt} = 4t\tan^{-1}t + 1$, *b*) $\dfrac{dw}{dt}(1) = \pi + 1$

7. *a*) $\dfrac{\partial z}{\partial u} = 4\cos v \ln(u \operatorname{sen} v) + 4\cos v$,

$\dfrac{\partial z}{\partial v} = -4u \operatorname{sen} v \ln(u \operatorname{sen} v) + \dfrac{4u\cos^2 v}{\operatorname{sen} v}$

b) $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \sqrt{2}(\ln 2 + 2), \dfrac{\partial z}{\partial v} = -2\sqrt{2}(\ln 2 - 2)$

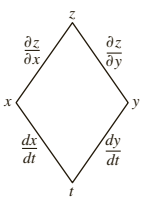
9. *a*) $\dfrac{\partial w}{\partial u} = 2u + 4uv, \dfrac{\partial w}{\partial v} = -2v + 2u^2$

b) $\dfrac{\partial w}{\partial u} = 3, \dfrac{\partial w}{\partial v} = -\dfrac{3}{2}$

11. *a*) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{z}{(z-y)^2}, \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{-y}{(z-y)^2}$

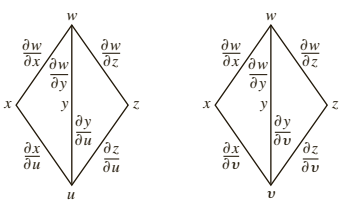
b) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \dfrac{\partial u}{\partial y} = 1, \dfrac{\partial u}{\partial z} = -2$

13. $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$

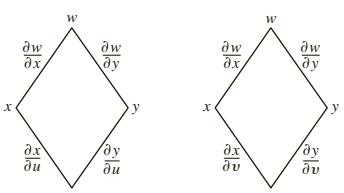


15. $\dfrac{\partial w}{\partial u} = \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial u}$,

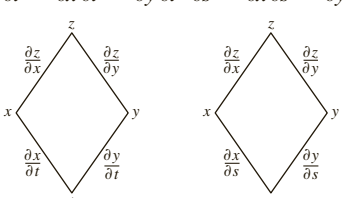
$\dfrac{\partial w}{\partial v} = \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial v}$



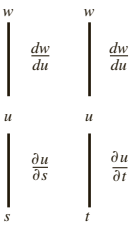
17. $\dfrac{\partial w}{\partial u} = \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}, \dfrac{\partial w}{\partial v} = \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}.$



19. $\dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}, \dfrac{\partial z}{\partial s} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s}$

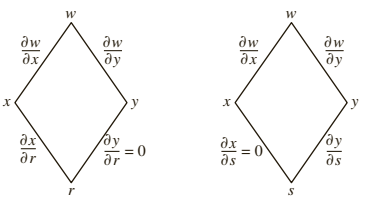


21. $\dfrac{\partial w}{\partial s} = \dfrac{dw}{du}\dfrac{\partial u}{\partial s}, \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{dw}{du}\dfrac{\partial u}{\partial t}$



23. $\dfrac{\partial w}{\partial r} = \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} = \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r}$, puesto que $\dfrac{\partial y}{\partial r} = 0$,

$\dfrac{\partial w}{\partial s} = \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s} = \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s}$, puesto que $\dfrac{\partial x}{\partial s} = 0$



25. $4/3$ **27.** $-4/5$ **29.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{4}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{3}{4}$

31. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -1, \dfrac{\partial z}{\partial y} = -1$ **33.** 12 **35.** -7

37. $\dfrac{\partial z}{\partial u} = 2, \dfrac{\partial z}{\partial v} = 1$ **39.** $\dfrac{\partial w}{\partial t} = 2t\,e^{s^3+t^2}, \dfrac{\partial w}{\partial s} = 3s^2\,e^{s^3+t^2}$

41. -0.00005 amp/s

47. $(\cos 1, \operatorname{sen} 1, 1)$ y $(\cos(-2), \operatorname{sen}(-2), -2)$

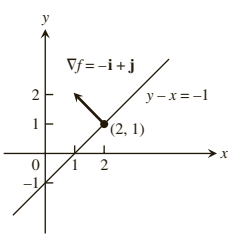
49. *a*) Máximo en $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; mínimo en $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b) Máx $= 6$, mín $= 2$

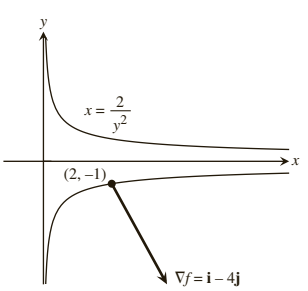
51. $2x\sqrt{x^8 + x^3} + \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{3x^2}{2\sqrt{t^4 + x^3}}\,dt$

Sección 14.5, página 876

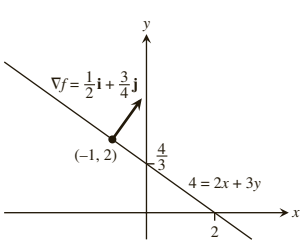
1.



3.



5.



7. $\nabla f = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ **9.** $\nabla f = -\frac{26}{27}\mathbf{i} + \frac{23}{54}\mathbf{j} - \frac{23}{54}\mathbf{k}$

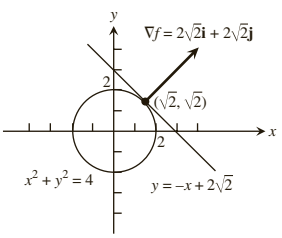
11. -4 **13.** $21/13$ **15.** 3 **17.** 2

19. $\mathbf{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$, $(D_{\mathbf{u}}f)_{P_0} = \sqrt{2}$; $-\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$, $(D_{-\mathbf{u}}f)_{P_0} = -\sqrt{2}$

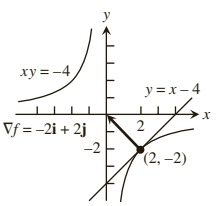
21. $\mathbf{u} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{5}{3\sqrt{3}}\mathbf{j} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{k}$, $(D_{\mathbf{u}}f)_{P_0} = 3\sqrt{3}$; $-\mathbf{u} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{5}{3\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathbf{k}$, $(D_{-\mathbf{u}}f)_{P_0} = -3\sqrt{3}$

23. $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$, $(D_{\mathbf{u}}f)_{P_0} = 2\sqrt{3}$; $-\mathbf{u} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$, $(D_{-\mathbf{u}}f)_{P_0} = -2\sqrt{3}$

25.



27.



29. *a*) $\mathbf{u} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$, $D_{\mathbf{u}}f(1, -1) = 5$

b) $\mathbf{u} = -\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$, $D_{\mathbf{u}}f(1, -1) = -5$

c) $\mathbf{u} = \frac{4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j}$, $\mathbf{u} = -\frac{4}{5}\mathbf{i} - \frac{3}{5}\mathbf{j}$

d) $\mathbf{u} = -\mathbf{j}$, $\mathbf{u} = \frac{24}{25}\mathbf{i} - \frac{7}{25}\mathbf{j}$

e) $\mathbf{u} = -\mathbf{i}$, $\mathbf{u} = \frac{7}{25}\mathbf{i} + \frac{24}{25}\mathbf{j}$

31. $\mathbf{u} = \frac{7}{\sqrt{53}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{53}}\mathbf{j}$, $-\mathbf{u} = -\frac{7}{\sqrt{53}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{53}}\mathbf{j}$

33. No, la razón máxima de cambio es $\sqrt{185} < 14$.

35. $-7/\sqrt{5}$

Sección 14.6, páginas 833 a 836

1. *a*) $x + y + z = 3$

b) $x = 1 + 2t, y = 1 + 2t, z = 1 + 2t$

3. *a*) $2x - z - 2 = 0$

b) $x = 2 - 4t, y = 0, z = 2 + 2t$

5. *a*) $2x + 2y + z - 4 = 0$

b) $x = 2t, y = 1 + 2t, z = 2 + t$

7. *a*) $x + y + z - 1 = 0$ *b*) $x = t, y = 1 + t, z = t$

9. $2x - z - 2 = 0$ **11.** $x - y + 2z - 1 = 0$

13. $x = 1, y = 1 + 2t, z = 1 - 2t$

15. $x = 1 - 2t, y = 1, z = \frac{1}{2} + 2t$

17. $x = 1 + 90t, y = 1 - 90t, z = 3$

19. $df = \frac{9}{11{,}830} \approx 0.0008$ **21.** $dg = 0$

23. *a*) $\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\cos\sqrt{3} \approx 0.935°\text{C/ft}$

b) $\sqrt{3}\operatorname{sen}\sqrt{3} - \cos\sqrt{3} \approx 1.87°\text{C/s}$

25. *a*) $L(x, y) = 1$ *b*) $L(x, y) = 2x + 2y - 1$

27. *a*) $L(x, y) = 3x - 4y + 5$

b) $L(x, y) = 3x - 4y + 5$

29. *a*) $L(x, y) = 1 + x$ *b*) $L(x, y) = -y + \frac{\pi}{2}$

31. *a*) $W(20, 25) = 11°\text{F}$, $W(30, -10) = -39°\text{F}$, $W(15, 15) = 0°\text{F}$

b) $W(10, -40) \approx -65.5°\text{F}$, $W(50, -40) \approx -88°\text{F}$, $W(60, 30) \approx 10.2°\text{F}$

c) $L(v, T) \approx -0.36(v - 25) + 1.337(T - 5) - 17.4088$

d) **i.** $L(24, 6) \approx -15.7°\text{F}$

ii. $L(27, 2) \approx -22.1°\text{F}$

iii. $L(5, -10) \approx -30.2°\text{F}$

33. $L(x, y) = 7 + x - 6y$; 0.06 **35.** $L(x, y) = x + y + 1$; 0.08

37. $L(x, y) = 1 + x$; 0.0222

39. *a*) $L(x, y, z) = 2x + 2y + 2z - 3$ *b*) $L(x, y, z) = y + z$

c) $L(x, y, z) = 0$

41. *a*) $L(x, y, z) = x$ *b*) $L(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y$

c) $L(x, y, z) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z$

43. *a*) $L(x, y, z) = 2 + x$

b) $L(x, y, z) = x - y - z + \frac{\pi}{2} + 1$

c) $L(x, y, z) = x - y - z + \frac{\pi}{2} + 1$

45. $L(x, y, z) = 2x - 6y - 2z + 6$, 0.0024

47. $L(x, y, z) = x + y - z - 1$, 0.00135

49. Error máximo (estimado) ≤ 0.31 en magnitud

51. Preste más atención a la dimensión más pequeña de las dos. Generará la derivada parcial más grande.

53. f es más sensible al cambio en d.

Sección 14.7, páginas 843 a 845

1. $f(-3, 3) = -5$, mínimo local **3.** $f(-2, 1)$, punto silla

5. $f\left(3, \frac{3}{2}\right) = \frac{17}{2}$, máximo local

7. $f(2, -1) = -6$, mínimo local **9.** $f(1, 2)$, punto silla

11. $f\left(\frac{16}{7}, 0\right) = -\frac{16}{7}$, máximo local

13. $f(0, 0)$, punto silla; $f\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{170}{27}$, máximo local

15. $f(0, 0) = 0$, mínimo local; $f(1, -1)$, punto silla

17. $f(0, \pm\sqrt{5})$, puntos silla; $f(-2, -1) = 30$, máximo local; $f(2, 1) = -30$, mínimo local

19. $f(0, 0)$, punto silla; $f(1, 1) = 2$, $f(-1, -1) = 2$, máximos locales

21. $f(0, 0) = -1$, máximo local

23. $f(n\pi, 0)$, puntos silla para todo entero n

25. $f(2, 0) = e^{-4}$, mínimo local

27. $f(0, 0) = 0$, mínimo local; $f(0, 2)$, punto silla

29. $f\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right) - 3$, máximo local

31. Máximo absoluto: 1 en (0, 0); mínimo absoluto: -5 en (1, 2)

33. Máximo absoluto: 4 en (0, 2); mínimo absoluto: 0 en (0, 0)

35. Máximo absoluto: 11 en $(0, -3)$; mínimo absoluto: -10 en $(4, -2)$

37. Máximo absoluto: 4 en (2, 0); mínimo absoluto: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ en $\left(3, -\frac{\pi}{4}\right), \left(3, \frac{\pi}{4}\right), \left(1, -\frac{\pi}{4}\right)$ y $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$

39. $a = -3, b = 2$

41. El más caliente es $2\frac{1}{4}°$ en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; el más frío es $-\frac{1}{4}°$ en $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

43. ***a***) $f(0, 0)$, punto silla ***b***) $f(1, 2)$, mínimo local
c) $f(1, -2)$, mínimo local; $f(-1, -2)$, punto silla

49. $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{355}{36}\right)$ **51.** $\left(\frac{9}{7}, \frac{6}{7}, \frac{3}{7}\right)$ **53.** 3, 3, 3 **55.** 12

57. $\frac{4}{\sqrt{3}} \times \frac{4}{\sqrt{3}} \times \frac{4}{\sqrt{3}}$ **59.** 2 ft × 2 ft × 1 ft

61. ***a***) Sobre la semicircunferencia, máx $f = 2\sqrt{2}$ en $t = \pi/4$, mín $f = -2$ en $t = \pi$. Sobre el cuarto de circunferencia, máx $f = 2\sqrt{2}$ en $t = \pi/4$, mín $f = 2$ en $t = 0, \pi/2$.
b) Sobre la semicircunferencia, máx $g = 2$ en $t = \pi/4$, mín $g = -2$ en $t = 3\pi/4$. Sobre el cuarto de circunferencia, máx $g = 2$ en $t = \pi/4$, mín $g = 0$ en $t = 0, \pi/2$.
c) Sobre la semicircunferencia, máx $h = 8$ en $t = 0, \pi$; mín $h = 4$ en $t = \pi/2$. Sobre el cuarto de circunferencia, máx $h = 8$ en $t = 0$, mín $h = 4$ en $t = \pi/2$.

63. **i.** mín $f = -1/2$ en $t = -1/2$; no hay máximo
ii. máx $f = 0$ en $t = -1, 0$; mín $f = -1/2$ en $t = -1/2$
iii. máx $f = 4$ en $t = 1$; mín $f = 0$ en $t = 0$

67. $y = -\frac{20}{13}x + \frac{9}{13}$, $y|_{x=4} = -\frac{71}{13}$

Sección 14.8, páginas 852 a 854

1. $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$ **3.** 39 **5.** $\left(3, \pm 3\sqrt{2}\right)$

7. ***a***) 8 ***b***) 64

9. $r = 2$ cm, $h = 4$ cm **11.** Longitud $= 4\sqrt{2}$, ancho $= 3\sqrt{2}$

13. $f(0, 0) = 0$ es mínimo; $f(2, 4) = 20$ es máximo.

15. La más baja = 0°, la más alta = 125°

17. $\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$ **19.** 1 **21.** (0, 0, 2), (0, 0, −2)

23. $f(1, -2, 5) = 30$ es máximo; $f(-1, 2, -5) = -30$ es mínimo.

25. 3, 3, 3 **27.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$ por $\frac{2}{\sqrt{3}}$ por $\frac{2}{\sqrt{3}}$ unidades

29. $(\pm 4/3, -4/3, -4/3)$ **31.** ≈24,322 unidades

33. $U(8, 14) = +128$ **37.** $f(2/3, 4/3, -4/3) = \frac{4}{3}$

39. (2, 4, 4) **41.** El máximo es $1 + 6\sqrt{3}$ en $\left(\pm\sqrt{6}, \sqrt{3}, 1\right)$; el mínimo es $1 - 6\sqrt{3}$ en $\left(\pm\sqrt{6}, -\sqrt{3}, 1\right)$.

43. El máximo es 4 en $(0, 0, \pm 2)$; el mínimo es 2 en $\left(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, 0\right)$.

Sección 14.9, página 858

1. Cuadrática: $x + xy$; cúbica: $x + xy + \frac{1}{2}xy^2$

3. Cuadrática: xy; cúbica: xy

5. Cuadrática: $y + \frac{1}{2}(2xy - y^2)$;
cúbica: $y + \frac{1}{2}(2xy - y^2) + \frac{1}{6}(3x^2y - 3xy^2 + 2y^3)$

7. Cuadrática: $\frac{1}{2}(2x^2 + 2y^2) = x^2 + y^2$; cúbica: $x^2 + y^2$

9. Cuadrática: $1 + (x + y) + (x + y)^2$;
cúbica: $1 + (x + y) + (x + y)^2 + (x + y)^3$

11. Cuadrática: $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$; $E(x, y) \le 0.00134$

Sección 14.10, páginas 862 a 863

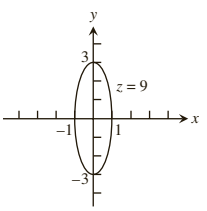
1. ***a***) 0 ***b***) $1 + 2z$ ***c***) $1 + 2z$

3. ***a***) $\frac{\partial U}{\partial P} + \frac{\partial U}{\partial T}\left(\frac{V}{nR}\right)$ ***b***) $\frac{\partial U}{\partial P}\left(\frac{nR}{V}\right) + \frac{\partial U}{\partial T}$

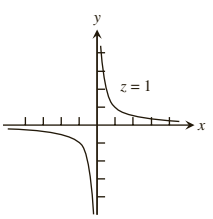
5. ***a***) 5 ***b***) 5 **7.** $\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_\theta = \cos\theta$ $\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Ejercicios de práctica, páginas 864 a 867

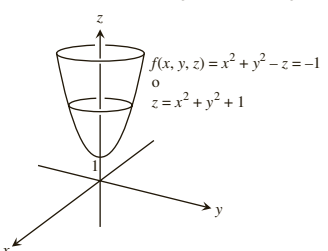
1. Dominio: todos los puntos en el plano xy; rango: $z \ge 0$. Las curvas de nivel son elipses con el eje mayor a lo largo del eje y y el eje menor a lo largo del eje x.



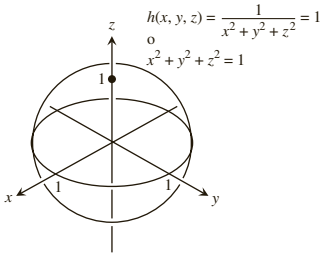
3. Dominio: todos los (x, y) tales que $x \neq 0$ y $y \neq 0$; rango: $z \neq 0$. Las curvas de nivel son hipérbolas con los ejes x y y como asíntotas.



5. Dominio: todos los puntos en el espacio xyz; rango: todos los números reales. Las superficies de nivel son paraboloides de revolución con el eje z como eje.



7. Dominio: todos los puntos (x, y, z) tales que $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$; rango: los números reales positivos. Las superficies de nivel son esferas con centro en $(0, 0, 0)$ y radio $r > 0$.



9. -2 **11.** $1/2$ **13.** 1 **15.** Sea $y = kx^2, k \neq 1$

17. No; $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ no existe.

19. $\dfrac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta, \dfrac{\partial g}{\partial \theta} = -r\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta$

21. $\dfrac{\partial f}{\partial R_1} = -\dfrac{1}{{R_1}^2}, \dfrac{\partial f}{\partial R_2} = -\dfrac{1}{{R_2}^2}, \dfrac{\partial f}{\partial R_3} = -\dfrac{1}{{R_3}^2}$

23. $\dfrac{\partial P}{\partial n} = \dfrac{RT}{V}, \dfrac{\partial P}{\partial R} = \dfrac{nT}{V}, \dfrac{\partial P}{\partial T} = \dfrac{nR}{V}, \dfrac{\partial P}{\partial V} = -\dfrac{nRT}{V^2}$

25. $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0, \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \dfrac{2x}{y^3}, \dfrac{\partial^2 g}{\partial y\,\partial x} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y} = -\dfrac{1}{y^2}$

27. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -30x + \dfrac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 1$

29. $\left.\dfrac{dw}{dt}\right|_{t=0} = -1$

31. $\left.\dfrac{\partial w}{\partial r}\right|_{(r,s)=(\pi,0)} = 2, \left.\dfrac{\partial w}{\partial s}\right|_{(r,s)=(\pi,0)} = 2 - \pi$

33. $\left.\dfrac{df}{dt}\right|_{t=1} = -(\operatorname{sen}1 + \cos 2)(\operatorname{sen}1) + (\cos 1 + \cos 2)(\cos 1) - 2(\operatorname{sen}1 + \cos 1)(\operatorname{sen}2)$

35. $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(0,1)} = -1$

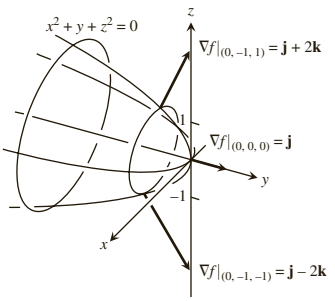
37. Crece más rápidamente en la dirección $\mathbf{u} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$; decrece más rápidamente en la dirección $-\mathbf{u} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$; $D_{\mathbf{u}}f = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $D_{-\mathbf{u}}f = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $D_{\mathbf{u}_1}f = -\dfrac{7}{10}$ donde $\mathbf{u}_1 = \dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$

39. Crece más rápidamente en la dirección $\mathbf{u} = \dfrac{2}{7}\mathbf{i} + \dfrac{3}{7}\mathbf{j} + \dfrac{6}{7}\mathbf{k}$; decrece más rápidamente en la dirección $-\mathbf{u} = -\dfrac{2}{7}\mathbf{i} - \dfrac{3}{7}\mathbf{j} - \dfrac{6}{7}\mathbf{k}$; $D_{\mathbf{u}}f = 7$; $D_{-\mathbf{u}}f = -7$; $D_{\mathbf{u}_1}f = 7$ donde $\mathbf{u}_1 = \dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$

41. $\pi/\sqrt{2}$

43. ***a***) $f_x(1, 2) = f_y(1, 2) = 2$ ***b***) $14/5$

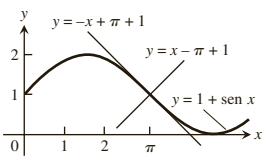
45.



47. Tangente: $4x - y - 5z = 4$; recta normal: $x = 2 + 4t, y = -1 - t, z = 1 - 5t$

49. $2y - z - 2 = 0$

51. Tangente: $x + y = \pi + 1$; recta normal: $y = x - \pi + 1$



53. $x = 1 - 2t, y = 1, z = 1/2 + 2t$

55. Las respuestas dependerán del límite superior usado para $|f_{xx}|, |f_{xy}|, |f_{yy}|$. Con $M = \sqrt{2}/2$, $|E| \leq 0.0142$. Con $M = 1$, $|E| \leq 0.02$.

57. $L(x, y, z) = y - 3z, L(x, y, z) = x + y - z - 1$

59. Sea más cuidadoso con el diámetro.

61. $dI = 0.038$, porcentaje de cambio en $I = 15.83\%$, más sensible al cambio de voltaje

63. ***a***) 5% **65.** Mínimo local de -8 en $(-2, -2)$

67. Punto silla en $(0, 0)$, $f(0, 0) = 0$; máximo local de $1/4$ en $(-1/2, -1/2)$

69. Punto silla en $(0, 0)$, $f(0, 0) = 0$; mínimo local de -4 en $(0, 2)$; máximo local de 4 en $(-2, 0)$; punto silla en $(-2, 2)$, $f(-2, 2) = 0$.

71. Máximo absoluto: 28 en $(0, 4)$; mínimo absoluto: $-9/4$ en $(3/2, 0)$

73. Máximo absoluto: 18 en $(2, -2)$; mínimo absoluto: $-17/4$ en $(-2, 1/2)$

75. Máximo absoluto: 8 en $(-2, 0)$; mínimo absoluto: -1 en $(1, 0)$

77. Máximo absoluto: 4 en $(1, 0)$; mínimo absoluto: -4 en $(0, -1)$

79. Máximo absoluto: 1 en $(0, \pm 1)$ y $(1, 0)$; mínimo absoluto: -1 en $(-1, 0)$

81. Máximo: 5 en $(0, 1)$; mínimo $-1/3$ en $(0, -1/3)$

83. Máximo: $\sqrt{3}$ en $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$; mínimo: $-\sqrt{3}$ en $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

85. Ancho $= \left(\dfrac{c^2V}{ab}\right)^{1/3}$, largo $= \left(\dfrac{b^2V}{ac}\right)^{1/3}$, alto $= \left(\dfrac{a^2V}{bc}\right)^{1/3}$

87. Máximo: $\frac{3}{2}$ en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$;
mínimo: $\frac{1}{2}$ en $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$

89. $\frac{\partial w}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}, \frac{\partial w}{\partial y} = \operatorname{sen}\theta \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}$

95. $(t, -t \pm 4, t)$, t es un número real

101. *a*) $(2y + x^2z)e^{yz}$ *b*) $x^2e^{yz}\left(y - \frac{z}{2y}\right)$ *c*) $(1 + x^2y)e^{yz}$

Ejercicios adicionales y avanzados, páginas 867 a 869

1. $f_{xy}(0, 0) = -1, f_{yx}(0, 0) = 1$

7. *c*) $\frac{r^2}{2} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ **13.** $V = \frac{\sqrt{3}abc}{2}$

17. $f(x, y) = \frac{y}{2} + 4, g(x, y) = \frac{x}{2} + \frac{9}{2}$

19. $y = 2\ln|\operatorname{sen} x| + \ln 2$

21. *a*) $\frac{1}{\sqrt{53}}(2\mathbf{i} + 7\mathbf{j})$ *b*) $\frac{-1}{\sqrt{29{,}097}}(98\mathbf{i} - 127\mathbf{j} + 58\mathbf{k})$

23. $w = e^{-c^2\pi^2 t}\operatorname{sen}\pi x$

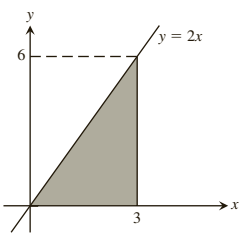
Capítulo 15

Sección 15.1, páginas 874 a 875

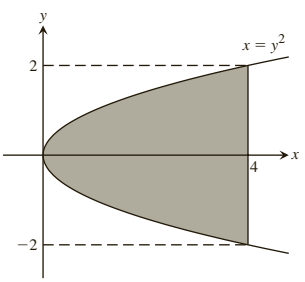
1. 24 **3.** 1 **5.** 16 **7.** $2\ln 2 - 1$ **9.** $(3/2)(5 - e)$
11. $3/2$ **13.** $\ln 2$ **15.** 14 **17.** 0 **19.** $1/2$
21. $2\ln 2$ **23.** $(\ln 2)^2$ **25.** $8/3$ **27.** 1 **29.** $\sqrt{2}$
31. $2/27$ **33.** $\frac{3}{2}\ln 3 - 1$ **35.** *a*) $1/3$ *b*) $2/3$

Sección 15.2, páginas 882 a 884

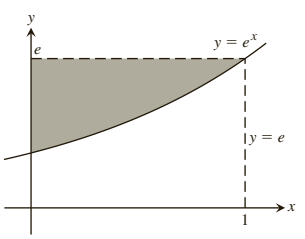
1.



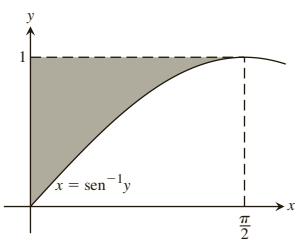
3.



5.



7.



9. *a*) $0 \le x \le 2, x^3 \le y \le 8$
b) $0 \le y \le 8, 0 \le x \le y^{1/3}$

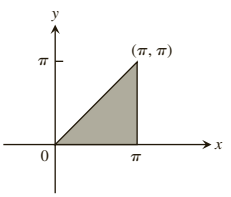
11. *a*) $0 \le x \le 3, x^2 \le y \le 3x$
b) $0 \le y \le 9, \frac{y}{3} \le x \le \sqrt{y}$

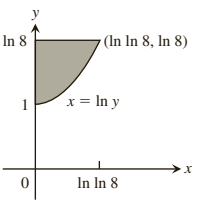
13. *a*) $0 \le x \le 9, 0 \le y \le \sqrt{x}$
b) $0 \le y \le 3, y^2 \le x \le 9$

15. *a*) $0 \le x \le \ln 3, e^{-x} \le y \le 1$
b) $\frac{1}{3} \le y \le 1, -\ln y \le x \le \ln 3$

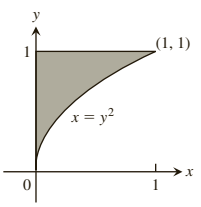
17. *a*) $0 \le x \le 1, x \le y \le 3 - 2x$
b) $0 \le y \le 1, 0 \le x \le y \cup 1 \le y \le 3, 0 \le x \le \frac{3 - y}{2}$

19. $\frac{\pi^2}{2} + 2$ **21.** $8\ln 8 - 16 + e$



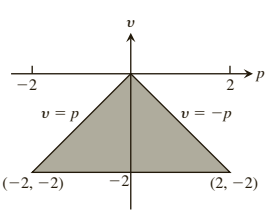


23. $e - 2$

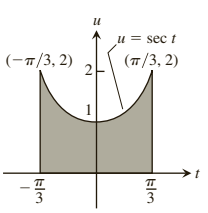


25. $\frac{3}{2}\ln 2$ **27.** $-1/10$

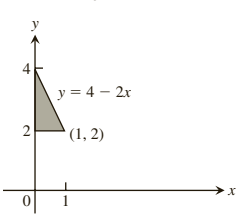
29. 8



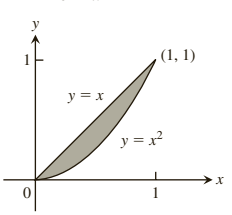
31. 2π



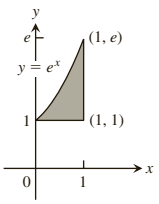
33. $\int_2^4 \int_0^{(4-y)/2} dx\, dy$



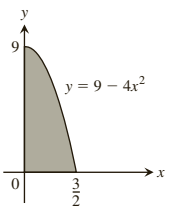
35. $\int_0^1 \int_{x^2}^x dy\, dx$



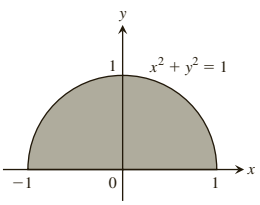
37. $\int_1^e \int_{\ln y}^1 dx\,dy$



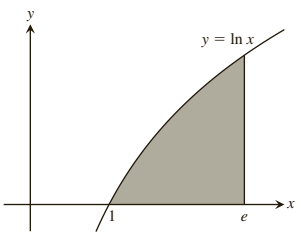
39. $\int_0^9 \int_0^{(\sqrt{9-y})/2} 16x\,dx\,dy$



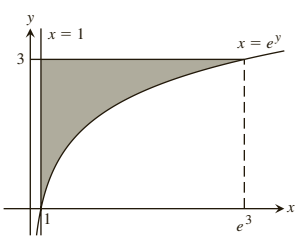
41. $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3y\,dy\,dx$



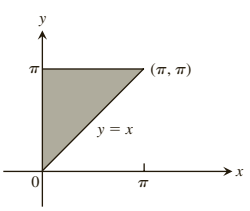
43. $\int_0^1 \int_{e^y}^e xy\,dx\,dy$



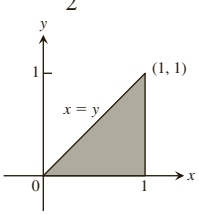
45. $\int_1^{e^3} \int_{\ln x}^3 (x + y)\,dy\,dx$



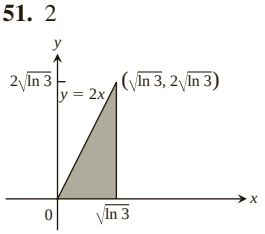
47. 2



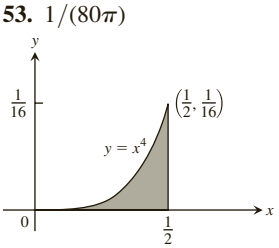
49. $\dfrac{e-2}{2}$



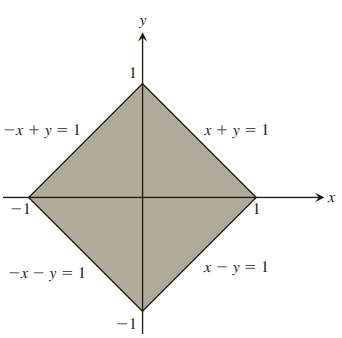
51. 2



53. $1/(80\pi)$

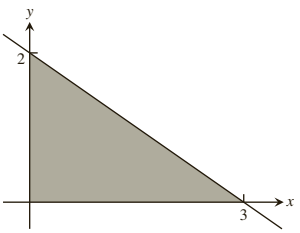


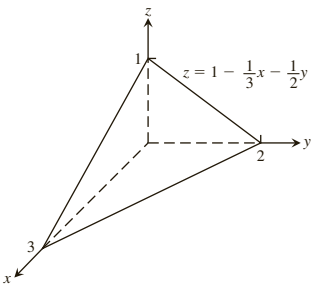
55. $-2/3$



57. $4/3$ **59.** $625/12$ **61.** 16 **63.** 20 **65.** $2(1 + \ln 2)$

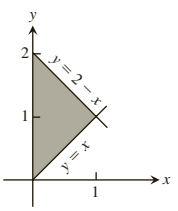
67.





69. 1 **71.** π^2 **73.** $-\dfrac{3}{32}$ **75.** $\dfrac{20\sqrt{3}}{9}$

77. $\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 + y^2)\,dy\,dx = \dfrac{4}{3}$



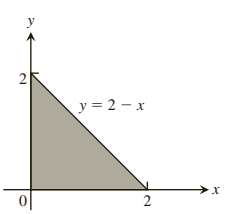
79. R es el conjunto de puntos (x, y) tales que $x^2 + 2y^2 < 4$.

81. No, por el teorema de Fubini, los dos órdenes de integración deben dar el mismo resultado.

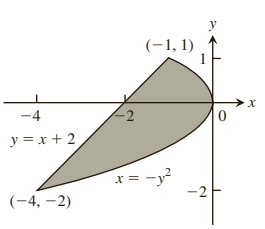
85. 0.603 **87.** 0.233

Sección 15.3, página 887

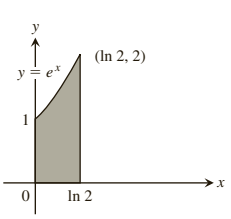
1. $\int_0^2 \int_0^{2-x} dy\,dx = 2$ o $\int_0^2 \int_0^{2-y} dx\,dy = 2$



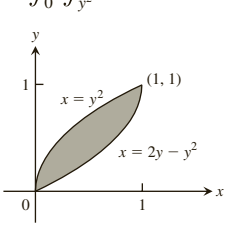
3. $\int_{-2}^1 \int_{y-2}^{-y^2} dx\,dy = \dfrac{9}{2}$



5. $\int_0^{\ln 2} \int_0^{e^x} dy\,dx = 1$

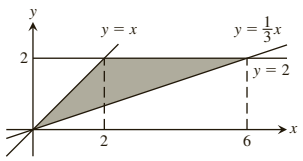


7. $\int_0^1 \int_{y^2}^{2y-y^2} dx\,dy = \dfrac{1}{3}$



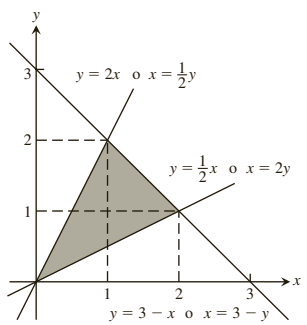
9. $\displaystyle\int_0^2\int_y^{3y} 1\,dx\,dy = 4$ o

$\displaystyle\int_0^2\int_{x/3}^{x} 1\,dy\,dx + \int_2^6\int_{x/3}^{2} 1\,dy\,dx = 4$

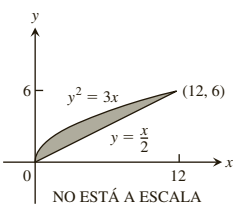


11. $\displaystyle\int_0^1\int_{x/2}^{2x} 1\,dy\,dx + \int_1^2\int_{x/2}^{3-x} 1\,dy\,dx = \frac{3}{2}$ o

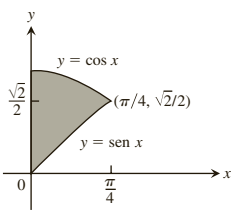
$\displaystyle\int_0^1\int_{y/2}^{2y} 1\,dx\,dy + \int_1^2\int_{y/2}^{3-y} 1\,dx\,dy = \frac{3}{2}$



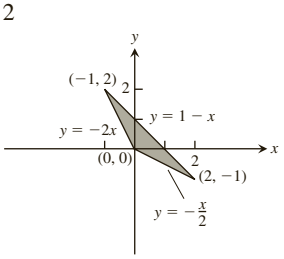
13. 12



15. $\sqrt{2} - 1$



17. $\frac{3}{2}$



19. ***a)*** 0 ***b)*** $4/\pi^2$ **21.** $8/3$ **23.** $\pi - 2$

25. $40{,}000(1 - e^{-2})\ln(7/2) \approx 43{,}329$

Sección 15.4, páginas 892 a 894

1. $\frac{\pi}{2} \le \theta \le 2\pi, 0 \le r \le 9$ **3.** $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4}, 0 \le r \le \csc\theta$

5. $0 \le \theta \le \frac{\pi}{6}, 1 \le r \le 2\sqrt{3}\sec\theta$;

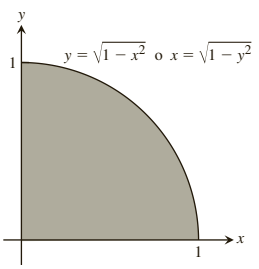
$\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 1 \le r \le 2\csc\theta$

7. $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 2\cos\theta$ **9.** $\frac{\pi}{2}$

11. 2π **13.** 36 **15.** $2 - \sqrt{3}$ **17.** $(1 - \ln 2)\,\pi$

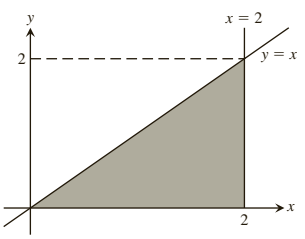
19. $(2\ln 2 - 1)(\pi/2)$ **21.** $\dfrac{2\left(1 + \sqrt{2}\right)}{3}$

23.



$\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dy\,dx$ o $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} xy\,dx\,dy$

25.



$\displaystyle\int_0^2\int_0^x y^2\left(x^2 + y^2\right)dy\,dx$ o $\displaystyle\int_0^2\int_y^2 y^2\left(x^2 + y^2\right)dx\,dy$

27. $2(\pi - 2)$ **29.** 12π **31.** $(3\pi/8) + 1$ **33.** $\frac{2a}{3}$

35. $\frac{2a}{3}$ **37.** $2\pi\left(2 - \sqrt{e}\right)$ **39.** $\frac{4}{3} + \frac{5\pi}{8}$

41. ***a)*** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ***b)*** 1 **43.** $\pi\ln 4$, no **45.** $\frac{1}{2}\left(a^2 + 2h^2\right)$

47. $\frac{8}{9}(3\pi - 4)$

Sección 15.5, páginas 900 a 903

1. $1/6$

3. $\displaystyle\int_0^1\int_0^{2-2x}\int_0^{3-3x-3y/2} dz\,dy\,dx$, $\displaystyle\int_0^2\int_0^{1-y/2}\int_0^{3-3x-3y/2} dz\,dx\,dy$,

$\displaystyle\int_0^1\int_0^{3-3x}\int_0^{2-2x-2z/3} dy\,dz\,dx$, $\displaystyle\int_0^3\int_0^{1-z/3}\int_0^{2-2x-2z/3} dy\,dx\,dz$,

$\displaystyle\int_0^2\int_0^{3-3y/2}\int_0^{1-y/2-z/3} dx\,dz\,dy$, $\displaystyle\int_0^3\int_0^{2-2z/3}\int_0^{1-y/2-z/3} dx\,dy\,dz$.

El valor de las seis integrales es 1.

5. $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} 1\,dz\,dx\,dy$, $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} 1\,dz\,dx\,dy$,
$\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{4}^{8-y^2}\int_{-\sqrt{8-z-y^2}}^{\sqrt{8-z-y^2}} 1\,dx\,dz\,dy + \int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{4}\int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} 1\,dx\,dz\,dy$,
$\displaystyle\int_{4}^{8}\int_{-\sqrt{8-z}}^{\sqrt{8-z}}\int_{-\sqrt{8-z-y^2}}^{\sqrt{8-z-y^2}} 1\,dx\,dy\,dz + \int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} 1\,dx\,dy\,dz$,
$\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{4}^{8-x^2}\int_{-\sqrt{8-z-x^2}}^{\sqrt{8-z-x^2}} 1\,dy\,dz\,dx + \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} 1\,dy\,dz\,dx$,
$\displaystyle\int_{4}^{8}\int_{-\sqrt{8-z}}^{\sqrt{8-z}}\int_{-\sqrt{8-z-x^2}}^{\sqrt{8-z-x^2}} 1\,dy\,dx\,dz + \int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} 1\,dy\,dx\,dz$.

El valor de las seis integrales es 16π.

7. 1 **9.** 6 **11.** $\dfrac{5(2-\sqrt{3})}{4}$ **13.** 18

15. $7/6$ **17.** 0 **19.** $\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{8}$

21. ***a)*** $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}\int_{x^2}^{1-z} dy\,dz\,dx$ ***b)*** $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}}\int_{x^2}^{1-z} dy\,dx\,dz$

c) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\,dy\,dz$ ***d)*** $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-y}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\,dz\,dy$

e) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\int_{0}^{1-y} dz\,dx\,dy$

23. $2/3$ **25.** $20/3$ **27.** 1 **29.** $16/3$ **31.** $8\pi-\dfrac{32}{3}$

33. 2 **35.** 4π **37.** $31/3$ **39.** 1 **41.** 2 sen 4

43. 4 **45.** $a = 3$ o $a = 13/3$

47. El dominio es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) tales que $4x^2 + 4y^2 + z^2 \le 4$.

Sección 15.6, páginas 908 a 910

1. $\bar{x} = 5/14, \bar{y} = 38/35$ **3.** $\bar{x} = 64/35, \bar{y} = 5/7$

5. $\bar{x} = \bar{y} = 4a/(3\pi)$ **7.** $I_x = I_y = 4\pi, I_0 = 8\pi$

9. $\bar{x} = -1, \bar{y} = 1/4$ **11.** $I_x = 64/105$

13. $\bar{x} = 3/8, \bar{y} = 17/16$ **15.** $\bar{x} = 11/3, \bar{y} = 14/27, I_y = 432$

17. $\bar{x} = 0, \bar{y} = 13/31, I_y = 7/5$

19. $\bar{x} = 0, \bar{y} = 7/10; I_x = 9/10, I_y = 3/10, I_0 = 6/5$

21. $I_x = \dfrac{M}{3}(b^2 + c^2), I_y = \dfrac{M}{3}(a^2 + c^2), I_z = \dfrac{M}{3}(a^2 + b^2)$

23. $\bar{x} = \bar{y} = 0, \bar{z} = 12/5, I_x = 7904/105 \approx 75.28$,
$I_y = 4832/63 \approx 76.70, I_z = 256/45 \approx 5.69$

25. ***a)*** $\bar{x} = \bar{y} = 0, \bar{z} = 8/3$ ***b)*** $c = 2\sqrt{2}$

27. $I_L = 1386$

29. ***a)*** $4/3$ ***b)*** $\bar{x} = 4/5, \bar{y} = \bar{z} = 2/5$

31. ***a)*** $5/2$ ***b)*** $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 8/15$ ***c)*** $I_x = I_y = I_z = 11/6$

33. 3

37. ***a)*** $I_{\text{c.m.}} = \dfrac{abc(a^2 + b^2)}{12}, R_{\text{c.m.}} = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{12}}$

b) $I_L = \dfrac{abc(a^2 + 7b^2)}{3}, R_L = \sqrt{\dfrac{a^2 + 7b^2}{3}}$

Sección 15.7, páginas 918 a 922

1. $\dfrac{4\pi(\sqrt{2}-1)}{3}$ **3.** $\dfrac{17\pi}{5}$ **5.** $\pi(6\sqrt{2}-8)$ **7.** $\dfrac{3\pi}{10}$

9. $\pi/3$

11. ***a)*** $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$

b) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\sqrt{3}}\int_{0}^{1} r\,dr\,dz\,d\theta + \int_{0}^{2\pi}\int_{\sqrt{3}}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-z^2}} r\,dr\,dz\,d\theta$

c) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{4-r^2}}\int_{0}^{2\pi} r\,d\theta\,dz\,dr$

13. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{\cos\theta}\int_{0}^{3r^2} f(r,\theta,z)\,dz\,r\,dr\,d\theta$

15. $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2\operatorname{sen}\theta}\int_{0}^{4-r\operatorname{sen}\theta} f(r,\theta,z)\,dz\,r\,dr\,d\theta$

17. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{1}^{1+\cos\theta}\int_{0}^{4} f(r,\theta,z)\,dz\,r\,dr\,d\theta$

19. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4}\int_{0}^{\sec\theta}\int_{0}^{2-r\operatorname{sen}\theta} f(r,\theta,z)\,dz\,r\,dr\,d\theta$ **21.** π^2

23. $\pi/3$ **25.** 5π **27.** 2π **29.** $\left(\dfrac{8-5\sqrt{2}}{2}\right)\pi$

31. ***a)*** $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi/6}\int_{0}^{2} \rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta +$
$\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_{0}^{\csc\phi} \rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

b) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\int_{1}^{2}\int_{\pi/6}^{\operatorname{sen}^{-1}(1/\rho)} \rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\rho\,d\theta +$
$\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2}\int_{0}^{\pi/6} \rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\rho\,d\theta +$
$\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\rho\,d\theta$

33. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi/2}\int_{\cos\phi}^{2} \rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = \frac{31\pi}{6}$

35. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{1-\cos\phi} \rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = \frac{8\pi}{3}$

37. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_{0}^{2\cos\phi} \rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = \frac{\pi}{3}$

39. ***a)*** $\displaystyle 8\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{2} \rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

b) $\displaystyle 8\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$

c) $\displaystyle 8\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx$

41. *a*) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_{\sec\phi}^{2}\rho^2\,\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$

c) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}}\int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx$ *d*) $5\pi/3$

43. $8\pi/3$ **45.** $9/4$ **47.** $\dfrac{3\pi-4}{18}$ **49.** $\dfrac{2\pi a^3}{3}$

51. $5\pi/3$ **53.** $\pi/2$ **55.** $\dfrac{4\left(2\sqrt{2}-1\right)\pi}{3}$ **57.** 16π

59. $5\pi/2$ **61.** $\dfrac{4\pi\left(8-3\sqrt{3}\right)}{3}$ **63.** $2/3$ **65.** $3/4$

67. $\bar{x}=\bar{y}=0, \bar{z}=3/8$ **69.** $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,3/8)$

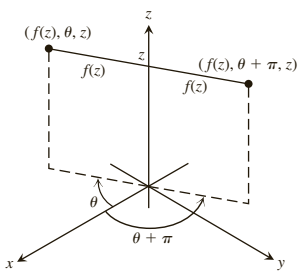
71. $\bar{x}=\bar{y}=0, \bar{z}=5/6$ **73.** $I_x=\pi/4$ **75.** $\dfrac{a^4h\pi}{10}$

77. *a*) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\left(0,0,\dfrac{4}{5}\right), I_z=\dfrac{\pi}{12}$

b) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\left(0,0,\dfrac{5}{6}\right), I_z=\dfrac{\pi}{14}$

81. $\dfrac{3M}{\pi R^3}$

81. La ecuación de la superficie $r=f(z)$ nos dice que el punto $(r,\theta,z)=f(z),\theta,z)$ permanecerá sobre la superficie para todos los valores de θ. En particular, $f(z),\theta+\pi,z)$ permanece sobre la superficie siempre que $f(z),\theta,z)$ se encuentre sobre la superficie, de manera que la superficie es simétrica con respecto al eje z.



Sección 15.8, páginas 930 a 932

1. *a*) $x=\dfrac{u+v}{3}, y=\dfrac{v-2u}{3}; \dfrac{1}{3}$

b) Región triangular con límites $u=0$, $v=0$ y $u+v=3$

3. *a*) $x=\dfrac{1}{5}(2u-v), y=\dfrac{1}{10}(3v-u); \dfrac{1}{10}$

b) Región triangular con límites $3v=u$, $v=2u$ y $3u+v=10$

7. $64/5$ **9.** $\displaystyle\int_1^2\int_1^3 (u+v)\frac{2u}{v}\,du\,dv = 8+\frac{52}{3}\ln 2$

11. $\dfrac{\pi ab(a^2+b^2)}{4}$ **13.** $\dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{3}{e^2}\right)\approx 0.4687$

15. $\dfrac{225}{16}$ **17.** 12 **19.** $\dfrac{a^2b^2c^2}{6}$

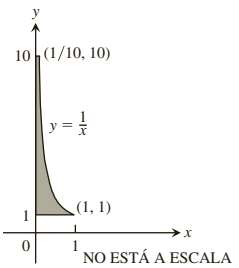
21. *a*) $\begin{vmatrix}\cos v & -u\,\operatorname{sen} v\\ \operatorname{sen} v & u\cos v\end{vmatrix} = u\cos^2 v + u\,\operatorname{sen}^2 v = u$

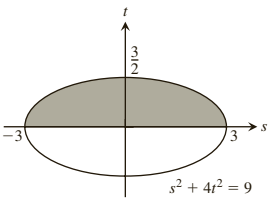
b) $\begin{vmatrix}\operatorname{sen} v & u\cos v\\ \cos v & -u\,\operatorname{sen} v\end{vmatrix} = -u\,\operatorname{sen}^2 v - u\cos^2 v = -u$

27. $\dfrac{3}{2}\ln 2$

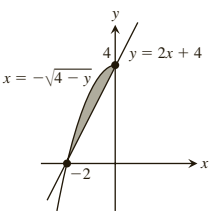
Ejercicios de práctica, páginas 932 a 934

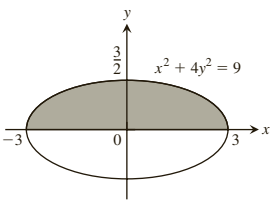
1. $9e-9$ **3.** $9/2$





5. $\displaystyle\int_{-2}^{0}\int_{2x+4}^{4-x^2} dy\,dx = \frac{4}{3}$ **7.** $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{0}^{(1/2)\sqrt{9-x^2}} y\,dy\,dx = \frac{9}{2}$





9. sen 4 **11.** $\dfrac{\ln 17}{4}$ **13.** $4/3$ **15.** $4/3$ **17.** $1/4$

19. π **21.** $\dfrac{\pi-2}{4}$ **23.** 0 **25.** $8/35$ **27.** $\pi/2$

29. $\dfrac{2(31-3^{5/2})}{3}$

31. *a*) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 3\,dz\,dx\,dy$

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^2 3\rho^2\,\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$ *c*) $2\pi\left(8-4\sqrt{2}\right)$

33. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\phi}\rho^2\,\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = \frac{\pi}{3}$

35. $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}}\int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2xy\,dz\,dy\,dx$

$\displaystyle+\int_1^{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3-x^2}}\int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2xy\,dz\,dy\,dx$

37. *a*) $\dfrac{8\pi\left(4\sqrt{2}-5\right)}{3}$ *b*) $\dfrac{8\pi\left(4\sqrt{2}-5\right)}{3}$

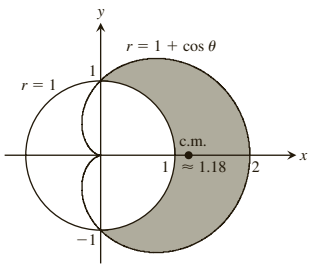
39. $I_z=\dfrac{8\pi\delta(b^5-a^5)}{15}$

41. $\bar{x}=\bar{y}=\dfrac{1}{2-\ln 4}$ **43.** $I_0=104$ **45.** $I_x=2\delta$

47. $M=4, M_x=0, M_y=0$ **49.** $\bar{x}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}, \bar{y}=0$

51. ***a)*** $\bar{x} = \dfrac{15\pi + 32}{6\pi + 48}, \bar{y} = 0$

b)



Ejercicios adicionales y avanzados, páginas 935 a 936

1. ***a)*** $\displaystyle\int_{-3}^{2}\int_{x}^{6-x^2} x^2\,dy\,dx$ ***b)*** $\displaystyle\int_{-3}^{2}\int_{x}^{6-x^2}\int_{0}^{x^2} dz\,dy\,dx$

c) $125/4$

3. 2π **5.** $3\pi/2$

7. ***a)*** Radio del orificio = 1, radio de la esfera = 2 ***b)*** $4\sqrt{3}\pi$

9. $\pi/4$ **11.** $\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$ **15.** $1/\sqrt[4]{3}$

17. Masa $= a^2\cos^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right) - b\sqrt{a^2 - b^2}$,

$I_0 = \dfrac{a^4}{2}\cos^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right) - \dfrac{b^3}{2}\sqrt{a^2 - b^2} - \dfrac{b^3}{6}(a^2 - b^2)^{3/2}$

19. $\dfrac{1}{ab}(e^{a^2b^2} - 1)$ **21.** ***b)*** 1 ***c)*** 0

25. $h = \sqrt{20}$ in, $h = \sqrt{60}$ in **27.** $2\pi\left[\dfrac{1}{3} - \left(\dfrac{1}{3}\right)\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$

Capítulo 16

Sección 16.1, páginas 943 a 945

1. Gráfica *c*) **3.** Gráfica *g*) **5.** Gráfica *d*) **7.** Gráfica *f*)

9. $\sqrt{2}$ **11.** $\dfrac{13}{2}$ **13.** $3\sqrt{14}$ **15.** $\dfrac{1}{6}\left(5\sqrt{5} + 9\right)$

17. $\sqrt{3}\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$ **19.** ***a)*** $4\sqrt{5}$ ***b)*** $\dfrac{1}{12}(17^{3/2} - 1)$

21. $\dfrac{15}{32}(e^{16} - e^{64})$ **23.** $\dfrac{1}{27}(40^{3/2} - 13^{3/2})$

25. $\dfrac{1}{6}\left(5^{3/2} + 7\sqrt{2} - 1\right)$ **27.** $\dfrac{10\sqrt{5} - 2}{3}$ **29.** 8

31. $\dfrac{1}{6}(17^{3/2} - 1)$ **33.** $2\sqrt{2} - 1$

35. ***a)*** $4\sqrt{2} - 2$ ***b)*** $\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$ **37.** $I_z = 2\pi\delta a^3$

39. ***a)*** $I_z = 2\pi\sqrt{2}\delta$ ***b)*** $I_z = 4\pi\sqrt{2}\delta$ **41.** $I_x = 2\pi - 2$

Sección 16.2, páginas 955 a 957

1. $\nabla f = -(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$

3. $\nabla g = -\left(\dfrac{2x}{x^2 + y^2}\right)\mathbf{i} - \left(\dfrac{2y}{x^2 + y^2}\right)\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$

5. $\mathbf{F} = -\dfrac{kx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{i} - \dfrac{ky}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{j}$, cualquier $k > 0$

7. ***a)*** $9/2$ ***b)*** $13/3$ ***c)*** $9/2$

9. ***a)*** $1/3$ ***b)*** $-1/5$ ***c)*** 0

11. ***a)*** 2 ***b)*** $3/2$ ***c)*** $1/2$

13. $-15/2$ **15.** 36 **17.** ***a)*** $-5/6$ ***b)*** 0 ***c)*** $-7/12$

19. $1/2$ **21.** $-\pi$ **23.** $69/4$ **25.** $-39/2$ **27.** $25/6$

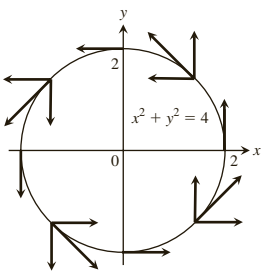
29. ***a)*** $\text{Circ}_1 = 0$, $\text{circ}_2 = 2\pi$, $\text{flujo}_1 = 2\pi$, $\text{flujo}_2 = 0$

b) $\text{Circ}_1 = 0$, $\text{circ}_2 = 8\pi$, $\text{flujo}_1 = 8\pi$, $\text{flujo}_2 = 0$

31. Circ $= 0$, flujo $= a^2\pi$ **33.** Circ $= a^2\pi$, flujo $= 0$

35. ***a)*** $-\dfrac{\pi}{2}$ ***b)*** 0 ***c)*** 1 **37.** ***a)*** 32 ***b)*** 32 ***c)*** 32

39.



41. ***a)*** $\mathbf{G} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ ***b)*** $\mathbf{G} = \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathbf{F}$

43. $\mathbf{F} = -\dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ **47.** 48 **49.** π **51.** 0 **53.** $\dfrac{1}{2}$

Sección 16.3, páginas 966 a 968

1. Conservativo **3.** No conservativo **5.** No conservativo

7. $f(x, y, z) = x^2 + \dfrac{3y^2}{2} + 2z^2 + C$ **9.** $f(x, y, z) = xe^{y+2z} + C$

11. $f(x, y, z) = x\ln x - x + \tan(x + y) + \dfrac{1}{2}\ln\left(y^2 + z^2\right) + C$

13. 49 **15.** -16 **17.** 1 **19.** $9\ln 2$ **21.** 0 **23.** -3

27. $\mathbf{F} = \nabla\left(\dfrac{x^2 - 1}{y}\right)$ **29.** ***a)*** 1 ***b)*** 1 ***c)*** 1

31. ***a)*** 2 ***b)*** 2 **33.** ***a)*** $c = b = 2a$ ***b)*** $c = b = 2$

35. No importa qué trayectoria se use. El trabajo será el mismo sobre cualquier trayectoria porque el campo es conservativo.

37. La fuerza $\mathbf{F}$ es conservativa porque todas las derivadas parciales de M, N y P son cero. $f(x, y, z) = ax + by + cz + C$; $A = (xa, ya, za)$ y $B = (xb, yb, zb)$. Por lo tanto, $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A) = a(xb - xa) + b(yb - ya) + c(zb - za) = \mathbf{F}\cdot\overrightarrow{AB}$.

Sección 16.4, páginas 978 a 980

1. Flujo $= 0$, circ $= 2\pi a^2$ **3.** Flujo $= -\pi a^2$, circ $= 0$

5. Flujo $= 2$, circ $= 0$ **7.** Flujo $= -9$, circ $= 9$

9. Flujo $= -11/60$, circ $= -7/60$

11. Flujo $= 64/9$, circ $= 0$ **13.** Flujo $= 1/2$, circ $= 1/2$

15. Flujo $= 1/5$, circ $= -1/12$ **17.** 0 **19.** $2/33$ **21.** 0

23. -16π **25.** πa^2 **27.** $3\pi/8$

29. ***a)*** 0 si C se recorre en sentido contrario al de las manecillas del reloj

b) $(h - k)$(área de la región) **39.** ***a)*** 0

Sección 16.5, páginas 989 a 991

1. $\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{j} + r^2\mathbf{k}$, $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$

3. $\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{j} + (r/2)\mathbf{k}$, $0 \le r \le 6$, $0 \le \theta \le \pi/2$

5. $\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{j} + \sqrt{9 - r^2}\,\mathbf{k}$, $0 \le r \le 3\sqrt{2}/2$, $0 \le \theta \le 2\pi$; También: $\mathbf{r}(\phi, \theta) = (3\,\text{sen}\,\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (3\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{j} + (3\cos\phi)\mathbf{k}$, $0 \le \phi \le \pi/4$, $0 \le \theta \le 2\pi$

7. $\mathbf{r}(\phi, \theta) = \left(\sqrt{3}\,\text{sen}\,\phi\cos\theta\right)\mathbf{i} + \left(\sqrt{3}\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta\right)\mathbf{j} + \left(\sqrt{3}\cos\phi\right)\mathbf{k}$, $\pi/3 \le \phi \le 2\pi/3$, $0 \le \theta \le 2\pi$

9. $\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (4 - y^2)\mathbf{k}$, $0 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 2$

11. $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + (3\cos v)\mathbf{j} + (3\,\text{sen}\,v)\mathbf{k}$, $0 \le u \le 3$, $0 \le v \le 2\pi$

13. ***a)*** $\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{j} + (1 - r\cos\theta - r\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{k}$, $0 \le r \le 3$, $0 \le \theta \le 2\pi$

b) $\mathbf{r}(u, v) = (1 - u\cos v - u\,\text{sen}\,v)\mathbf{i} + (u\cos v)\mathbf{j} + (u\,\text{sen}\,v)\mathbf{k}$, $0 \le u \le 3$, $0 \le v \le 2\pi$

15. $\mathbf{r}(u, v) = (4\cos^2 v)\mathbf{i} + u\mathbf{j} + (4\cos v\,\text{sen}\,v)\mathbf{k}$, $0 \le u \le 3$, $-(\pi/2) \le v \le (\pi/2)$; De otra forma: $\mathbf{r}(u, v) = (2 + 2\cos v)\mathbf{i} + u\mathbf{j} + (2\,\text{sen}\,v)\mathbf{k}$, $0 \le u \le 3$, $0 \le v \le 2\pi$

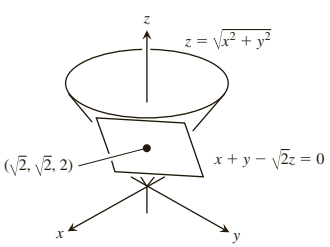
17. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{\sqrt{5}}{2} r\,dr\,d\theta = \frac{\pi\sqrt{5}}{2}$

19. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_1^3 r\sqrt{5}\,dr\,d\theta = 8\pi\sqrt{5}$ **21.** $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_1^4 1\,du\,dv = 6\pi$

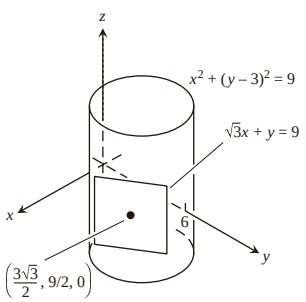
23. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1 u\sqrt{4u^2 + 1}\,du\,dv = \frac{\left(5\sqrt{5} - 1\right)}{6}\pi$

25. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi} 2\,\text{sen}\,\phi\,d\phi\,d\theta = \left(4 + 2\sqrt{2}\right)\pi$

27.



29.



33. ***b)*** $A = \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} [\,a^2b^2\,\text{sen}^2\phi\cos^2\phi + b^2c^2\cos^4\phi\cos^2\theta + a^2c^2\cos^4\phi\,\text{sen}^2\theta\,]^{1/2}\,d\phi\,d\theta$

35. $x_0x + y_0y = 25$ **37.** $13\pi/3$ **39.** 4

41. $6\sqrt{6} - 2\sqrt{2}$ **43.** $\pi\sqrt{c^2 + 1}$

45. $\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right)$ **47.** $3 + 2\ln 2$

49. $\frac{\pi}{6}\left(13\sqrt{13} - 1\right)$ **51.** $5\pi\sqrt{2}$ **53.** $\frac{2}{3}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$

Sección 16.6, páginas 1000 a 1002

1. $\displaystyle\iint_S x\,d\sigma = \int_0^3\int_0^2 u\sqrt{4u^2 + 1}\,du\,dv = \frac{17\sqrt{17} - 1}{4}$

3. $\displaystyle\iint_S x^2\,d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \text{sen}^3\phi\cos^2\theta\,d\phi\,d\theta = \frac{4\pi}{3}$

5. $\displaystyle\iint_S z\,d\sigma = \int_0^1\int_0^1 (4 - u - v)\sqrt{3}\,dv\,du = 3\sqrt{3}$ (para $x = u$, $y = v$)

7. $\displaystyle\iint_S x^2\sqrt{5 - 4z}\,d\sigma = \int_0^1\int_0^{2\pi} u^2\cos^2 v \cdot \sqrt{4u^2 + 1} \cdot u\sqrt{4u^2 + 1}\,dv\,du = \int_0^1\int_0^{2\pi} u^3(4u^2 + 1)\cos^2 v\,dv\,du = \frac{11\pi}{12}$

9. $9a^3$ **11.** $\frac{abc}{4}(ab + ac + bc)$ **13.** 2

15. $\frac{1}{30}\left(\sqrt{2} + 6\sqrt{6}\right)$ **17.** $\sqrt{6}/30$ **19.** -32 **21.** $\frac{\pi a^3}{6}$

23. $13a^4/6$ **25.** $2\pi/3$ **27.** $-73\pi/6$ **29.** 18

31. $\frac{\pi a^3}{6}$ **33.** $\frac{\pi a^2}{4}$ **35.** $\frac{\pi a^3}{2}$ **37.** -32 **39.** -4

41. $3a^4$ **43.** $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$

45. $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, 0, \frac{14}{9}\right)$, $I_z = \frac{15\pi\sqrt{2}}{2}\delta$

47. ***a)*** $\frac{8\pi}{3}a^4\delta$ ***b)*** $\frac{20\pi}{3}a^4\delta$

Sección 16.7, páginas 1013 a 1014

1. 4π **3.** $-5/6$ **5.** 0 **7.** -6π **9.** $2\pi a^2$

11. $-\pi$ **13.** 12π **15.** $-\pi/4$ **17.** -15π **19.** -8π

27. $16I_y + 16I_x$

Sección 16.8, páginas 1025 a 1027

1. 0 **3.** 0 **5.** -16 **7.** -8π **9.** 3π **11.** $-40/3$

13. 12π **15.** $12\pi\left(4\sqrt{2} - 1\right)$ **19.** No

21. El valor de la integral nunca excede el área de la superficie S.

23. 184/35

Ejercicios de práctica, páginas 1028 a 1030

1. Trayectoria 1: $2\sqrt{3}$; trayectoria 2: $1 + 3\sqrt{2}$ **3.** $4a^2$ **5.** 0

7. $8\pi\,\text{sen}\,(1)$ **9.** 0 **11.** $\pi\sqrt{3}$

13. $2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ **15.** $\frac{abc}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$ **17.** 50

19. $\mathbf{r}(\phi, \theta) = (6\,\text{sen}\,\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (6\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{j} + (6\cos\phi)\mathbf{k}$, $\frac{\pi}{6} \le \phi \le \frac{2\pi}{3}$, $0 \le \theta \le 2\pi$

21. $\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{j} + (1 + r)\mathbf{k}$, $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$

23. $\mathbf{r}(u, v) = (u\cos v)\mathbf{i} + 2u^2\mathbf{j} + (u\,\text{sen}\,v)\mathbf{k}$, $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le \pi$

25. $\sqrt{6}$ **27.** $\pi\left[\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right]$ **29.** Conservativo

31. No conservativo **33.** $f(x, y, z) = y^2 + yz + 2x + z$

35. Trayectoria 1: 2; trayectoria 2: 8/3

37. ***a)*** $1 - e^{-2\pi}$ ***b)*** $1 - e^{-2\pi}$

39. 0 **41.** ***a)*** $4\sqrt{2} - 2$ ***b)*** $\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$

43. $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(1, \frac{16}{15}, \frac{2}{3}\right)$; $I_x = \frac{232}{45}$, $I_y = \frac{64}{15}$, $I_z = \frac{56}{9}$

45. $\bar{z} = \frac{3}{2}$, $I_z = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ **47.** $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 49/12)$, $I_z = 640\pi$

49. Flujo: 3/2; circ: $-1/2$ **53.** 3 **55.** $\frac{2\pi}{3}\left(7 - 8\sqrt{2}\right)$

57. 0 **59.** π

Ejercicios adicionales y avanzados, páginas 1030 a 1032

1. 6π **3.** $2/3$

5. ***a)*** $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$
b) $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + y\mathbf{k}$ ***c)*** $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i}$

7. $\dfrac{16\pi R^3}{3}$ **9.** $a = 2, b = 1$. El flujo mínimo es -4.

11. ***b)*** $\dfrac{16}{3}g$

c) Trabajo $= \left(\displaystyle\int_C gxy\,ds\right)\bar{y} = g\int_C xy^2\,ds = \dfrac{16}{3}g$

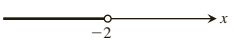
13. ***c)*** $\dfrac{4}{3}\pi w$ **19.** Es falso si $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

Apéndices

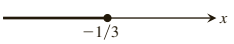
Apéndice 1, página AP-6

1. $0.\overline{1}, 0.\overline{2}, 0.\overline{3}, 0.\overline{8}, 0.\overline{9}$ o 1

3. $x < -2$



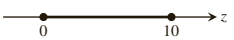
5. $x \le \dfrac{1}{3}$



7. $3, -3$ **9.** $7/6, 25/6$

11. $-2 \le t \le 4$

13. $0 \le z \le 10$

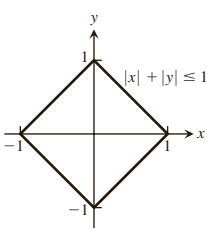


15. $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

17. $(-\infty, -3] \cup [1, \infty)$

19. $(-3, -2) \cup (2, 3)$ **21.** $(0, 1)$ **23.** $(-\infty, 1]$

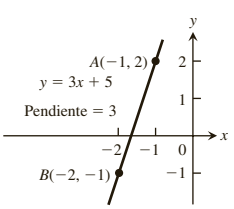
27. La gráfica de $|x| + |y| \le 1$ es el interior y la cota de la región en "forma de diamante".



Apéndice 3, páginas AP-17 y AP-18

1. $2, -4; 2\sqrt{5}$ **3.** Circunferencia unitaria

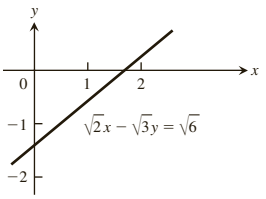
5. $m_\perp = -\dfrac{1}{3}$



7. ***a)*** $x = -1$ ***b)*** $y = 4/3$ **9.** $y = -x$

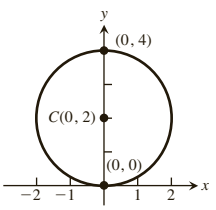
11. $y = -\dfrac{5}{4}x + 6$ **13.** $y = 4x + 4$ **15.** $y = -\dfrac{x}{2} + 12$

17. Intersección con $x = \sqrt{3}$, intersección con $y = -\sqrt{2}$

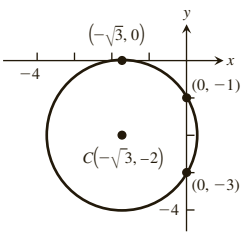


19. $(3, -3)$

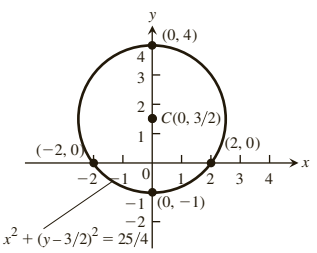
21. $x^2 + (y - 2)^2 = 4$



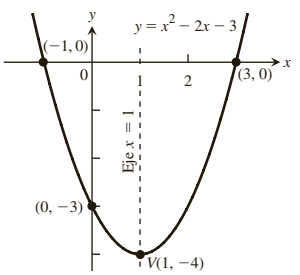
23. $\left(x + \sqrt{3}\right)^2 + (y + 2)^2 = 4$



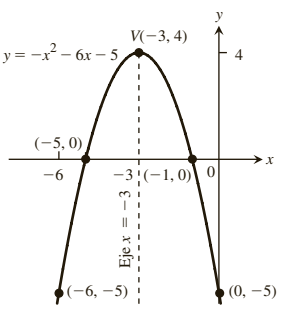
25. $x^2 + (y - 3/2)^2 = 25/4$



27.



29.



31. Los puntos exteriores de una circunferencia de radio $\sqrt{7}$, con centro en el origen.

33. La arandela entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$ (distancia de puntos con respecto al origen entre 1 y 2)

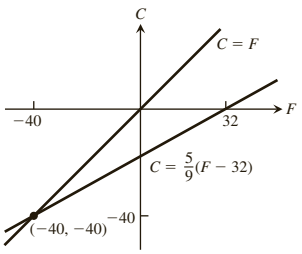
35. $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 < 6$

37. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}, -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

39. $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{3}\right), \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{3}\right)$

41. ***a)*** ≈ -2.5 grados/in ***b)*** ≈ -16.1 grados/in
c) ≈ -8.3 grados/in **43.** 5.97 atm

45. Sí: $C = F = -40°$



51. $k = -8, \quad k = 1/2$

Apéndice 7, páginas AP-34 y AP-35

1. ***a)*** $(14, 8)$ ***b)*** $(-1, 8)$ ***c)*** $(0, -5)$

3. ***a)*** Reflejando z con respecto al eje real

b) Reflejando z con respecto al eje imaginario

c) Reflejando z en el eje real y luego multiplicando la longitud del vector por $1/|z|^2$

5. ***a)*** Puntos sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$

b) Puntos dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$

c) Puntos fuera de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$

7. Puntos sobre la circunferencia de radio 1, con centro en $(-1, 0)$

9. Puntos sobre la recta $y = -x$ **11.** $4e^{2\pi i/3}$ **13.** $1e^{2\pi i/3}$

15. $\cos^4\theta - 6\cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta + \text{sen}^4\theta$

17. $1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **19.** $2i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i$

21. $\frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$ **23.** $1 \pm \sqrt{3}i, -1 \pm \sqrt{3}i$

Índice

A

a, logaritmo de base, 389
Abscisa, AP-10
Aceleración
  caída libre y, 130
  como derivada de la velocidad, 129, 130-131
  componente
    normal de, 766-771
    tangencial de la, 766-771
  definición de, 129
  derivada de (sacudida), 129, 130
  en caída libre, 131
  en coordenadas polares, 772-775
  en el espacio, 743
  velocidad y posición a partir de, 197
Aditividad
  integrales,
    de línea y, 940-941
    dobles y, 880
Alargamiento de una gráfica, 17
Albert de Saxony, 588
Álgebra, teorema fundamental del, AP-34
Altura máxima en movimiento de proyectiles, 751
Análisis
  de regresión, 33
    mínimos cuadrados, 33, 844
  del error
    en aproximaciones lineales, 171-172, 831
    en integración numérica, 486-489
Ángulo(s)
  convención de, 22
  de disparo, 750
  de elevación, 750
  de inclinación, AP-11
  de lanzamiento, 750
  dirección del, 712
  en funciones trigonométricas, 21-22
  en posición estándar, 22
  entre planos, 726
  entre vectores, 706-708
Antiderivadas
  de una función vectorial, 747
  definición de, 232
  e integrales indefinidas, 237-238
  movimiento y, 235-237
  obtención de, 232-235
  regla de la diferencia, 234
Antidiferenciación, 232
Aproximación(es)
  a un plano tangente, 830
  análisis del error en, 486-489
  cuadráticas, 619
  de raíces y potencias, 168
  diferencial, error en, 171-172
  factorial, 523
  lineal(es)
    estándar, 166, 830
    fórmula de error para, 831, 856
  mediante parábolas, 484-486
  método de Newton de raíces para, 227-230
  por diferenciales, 166
  por la recta tangente, 166, 830
  por la regla
    de Simpson, 486-489
    del trapecio, 486-489
  por polinomios de Taylor, 616
  trapezoidal, 483-484
Arco(s)
  secante, 414
  tangente, 412, 416, 419
Área(s)
  acotada por un astroide, 650-651
  aproximaciones finitas para el, 251
  bajo
    la gráfica de una función no negativa, 256
    una curva o gráfica, 272
  como integral definida, 249
  de regiones acotadas en el plano, 884-886
  de superficies de revolución, 337-340, 656-657
  de un paralelogramo, 715, 983
  de una sección transversal, 313, 314
  de una superficie suave, 983
  definición de, 273
  en coordenadas polares, 890
  en un plano de coordenadas polares, 667-669
  entre curvas, 299-302
  infinita, 493
  por doble integración, 884-887
  por el teorema de Green, 979
  superficial
    de revolución alrededor del eje *y*, 339-340
    de superficies explícitas, 992
    de una esfera, 984-985
    de una gráfica, 988
    de una superficie implícita, 987-988, 992
    definición de, 337-339, 982-986
    diferencial de superficies parametrizadas, 984
    parametrización de, 982-986
  superficies y, 338, 656-657, 980-988
  total, 250, 284-286
  y estimación con sumas finitas, 249-257
Argumento, AP-30
Asíntotas
  de gráficas, 86-96
  de hipérbolas, 676
  en gráficas de funciones racionales, 9
  horizontales, 86, 88-90, 94-95
  inclinada (oblicua), 91
  integrandos con, 495-497
  oblicua (inclinada), 91
  verticales, 86, 94-95
    definición de, 94-95
    límites y, 86
Astroide
  área acotada por un, 650-651
  centroide y, 655
  longitud de un, 653
a^x
  definición de, 386
  derivada de, 388
  ecuaciones inversas de, 389

integral de, 388
leyes de exponentes, 386

B

Banda(s)
de Möbius, 995
horizontales, 324
verticales, 324, 354
Base(s) *a*
de un cilindro, 313
funciones logarítmicas en, 389-390
Bernoulli
Daniel, 186
Johann, 146, 403
Birkhoff, George David, 292
Bolzano, Bernard, 129
Bombeo de líquidos desde contenedores, 344-345
Braquistocronas, 645-646

C

Cable colgante, 11, 432
Caída libre, ley de Galileo para, 41, 130
Calculadoras
para estimar límites, 53-54
trazado de gráficas con, 29-34
Cambio(s)
absoluto, 173
de base en un logaritmo, 389
estimación del, en una dirección especial, 829-830
exponencial (crecimiento o decaimiento), 393-394
porcentual, 173
razones del, 41-46, 106-107, 127-133
relativo, 173
sensibilidad al, 133, 173-174
Campo(s)
conservativos, 958, 959-962, 1012-1013
como campos gradiente, 960
criterio de las componentes para, 962, 964
integrales de línea en, 964
obtención de potenciales de, 962-965
propiedad de los lazos en, 961
teorema de Stokes y, 1012-1013
de velocidad
circulación para, 952-953
integrales de flujo, 952-953
eléctrico, 957
gradiente, 960
gravitacional, 957
definición de, 957
vectores en, 946
ordenado, AP-24
vectorial(es), 947-948
conservativos, 958, 959-962
continuo, 945
definición de, 945-946
densidad de flujo de, 973
diferenciables, 945
divergencia de, 970-971
eléctricos, 957
función potencial para, 958
gradiente, 946-947, 959-960
gravitacionales, 957
integración en, 926-1032
integrales, 945-954
rotacionales, 1002-1003
Carcasas delgadas, masas y momentos de, 998-1000
Cardiode
definición de, 665
en coordenadas polares, área acotada por, 668
graficación de, 668
longitud de, 669-670
Carga eléctrica, 1022
Casquillos cilíndricos, uso en volúmenes, 324-329
Catenaria, 11, 432
Cauchy, Augustin-Louis, 408
Cavalieri, Bonaventura, 315
Centro(s)
de aproximación lineal, 166
de curvatura, para curvas planas, 763
de masa
centroide y, 357-358
coordenadas de, 353, 942, 998
de un alambre o resorte, 942
de un sólido, 904
de una carcasa delgada, 999-1000
de una placa delgada y plana, 353-356
definición de, 352
momentos y, 351-360, 903-908
Centroide(s), 357-358, 904-905
Cicloides, 645
Cilindro(s)
base de, 313
división con, 324-326
parabólico, flujo a través de, 996
parametrización de, 982
superficies cuadráticas y, 728-731
volumen de, 313
Circulación
de campos de velocidad, 952-953
flujo contra, 953
Círculo
de curvatura, para curvas planas, 763-174
osculador, 763
Circunferencia(s)
ecuación
cartesiana estándar de, AP-14
polar de, 685
en el plano, AP-13-AP-15
longitud de, 652
osculadoras (círculos osculadores), 763
unitaria, AP-14
Cisoide de Diocles, 155
Clairaut, Alexis, 804
Cociente(s)
de números complejos, AP-31-AP-32
diferencial
definición de, 106
formas de, 110
límite de, 106
productos y, derivadas de, 122-124
Coeficiente(s)
binomiales, 627
de polinomios, 8-9
de series de potencias, 577-578
determinación para fracciones parciales, 474-475
indeterminados, 475
Comando "integrate" (software matemático), 579
Combinación
de funciones, 14-21
de series, 577-578
Completar el cuadrado, AP-14-AP-15
Componente
(escalar) de **u** en dirección de **v**, 710
i de un vector, 701
j de un vector, 701
k de un vector, 701
del rotacional, 968-971
normal de aceleración, 766-771
tangencial de la aceleración, 766-771
Compresión
de una gráfica, 16
uniforme de un gas, 970-971
Computadoras, para estimar límites, 53-54
Concavidad
diagramación de una curva y, 204-212
prueba de la segunda derivada para, 205
Conectividad, 81
Cónicas
definidas, 671, 672, 673, 675
ecuaciones polares de, 682-684
en coordenadas
cartesianas, 671-677
polares, 680-685
excentricidad de, 680-682
Conjugado complejo, AP-29
Conjunto(s), AP-2
de Cantor, 581
vacío, AP-2
Cono(s)
área superficial de, 984
elípticos, 729, 731
parametrización de, 981
Conservación
de la masa, 1027
del momento angular, 779
Constante(s)
arbitraria, 233
de crecimiento, 394
cambio exponencial de, 394
de decaimiento, 394
de gravitación universal, 773
de un resorte, 343, 344

diferente de cero, 234
gravitacional, 773
Construcción de los números reales, AP-25-AP-26
Continuidad. *Vea también* Discontinuidad
de funciones
compuestas, 795
vectoriales, 740-741
de una función en un punto, 75-78
derivadas parciales y, 803
diferenciabilidad y, 114, 806
en el extremo izquierdo, 76
en funciones con múltiples variables, 793-795
en un intervalo, 78
en un punto interior, 76
límites y, 41-104
uniforme, 277
Contracción
de la tráquea, 226-227
de Lorentz, 102
Convención de ángulos, 22
Convergencia
absoluta, 592-593
condicional, 601
de integrales impropias, 493, 495
de las sumas de Riemann, 267
de series
de potencias, 605-608
de Taylor, 619-625
geométricas, 574
prueba de la integral, 581-586
de sucesiones, 561-563
definición de, 267
intervalo de, 609
pruebas de, 498-500, 602
radio de, 608-609
Coordenada(s)
cartesianas
conversión a/de coordenadas polares, 890-892
en el plano, AP-10
en relación con las coordenadas cilíndricas y esféricas, 915
en relación con las coordenadas cilíndricas, 911
en relación con las coordenadas polares, 659-662
integrales triples en, 894-400
tridimensionales. *Vea* Sistemas de coordenadas tridimensionales
cilíndricas
a coordenadas rectangulares, 911, 918
de coordenadas esféricas a, 918
definición de, 910
diferencial de volumen en, 911
integración con, 912-914
integrales triples en, 910-918
movimiento en, 772-773
parametrización por, 982
del centro de masa, 353, 942, 998
esféricas
definición de, 914
integrales triples en, 914-918
polares
área de una región polar, 668
área en, 890
cónicas en, 671, 680-685
coordenadas cartesianas relacionadas con, 659-662
definición de, 659
graficación en, 660, 663-666
integrales en, 888-889
longitud de una curva polar, 669-670
movimiento en, 772-773
pendiente de una curva polar, 664-665
polo en, 659
rayo inicial de, 659
velocidad y aceleración en, 772-775
x, AP-10
xyz, e integrales de línea, 949
Corrección de masa de Einstein, 173
Cosecante, 22
Coseno(s)
definición ampliada de, 22
integrales de productos de, 461-462
potencias de, 458-459
ley de, 25-26, 707
valores del, 23
Costo(s)
fijos, 132
marginales, 131-132, 219
variables, 132
Cot *x*
derivadas de, 140
inversa de, 414, 419
Cota
inferior, 262
superior, AP-24, 262
mínima, 567, AP-24
Courant, Richard, 119
Crecimiento
de población, ilimitado, 396-397
exponencial, 394
Criterio
de la convergencia absoluta, 593
de la integral
estimación del error, 584-586
para convergencia de series, 581-586
residuo en, 585-586
de la raíz, 595-597, 609
de la razón, 594-595, 606-607, 609, 627
de la serie alternante, 599
de las componentes
para campos conservativos, 962, 964
en forma diferencial exacta, 965
del *n*-ésimo término para divergencia, 576-577
pruebas de comparación
para convergencia de integrales impropias, 498-500
para convergencia de series, 588-591
Csc *x*
derivada de, 140
inversa de, 414, 418
Cuadrantes del sistema de coordenadas, AP-10
Cubo, integral superficial de, 993-994
Curva(s)
área
debajo de, 272, 493
entre, 299-302
cerradas, 953
de contorno, 784
de nivel, 823-824
de funciones de dos variables, 784
definidas paramétricamente, longitud de, 651-654
diagramación de, 204-212
en el espacio, 739-745
binormales para, 767
ecuaciones paramétricas de, 739
ecuaciones vectoriales de. *Vea* Funciones vectoriales
fórmulas para, 771
longitud de arco a lo largo de, 756-758
normales con respecto a, 762
generadoras de superficies cilíndricas, 728
orientadas
negativamente, 974
positivamente, 974
paramétrica(s), 641-642
cálculo con, 649-657
definición de, 641
diferenciable, 649
graficación, 642-643, 666
longitud de arco, 651-654, 756-758
parametrizadas, 642, 656-657
pendiente de la
definición de, 43-45, 105
obtención de, 44, 105, 664
placas acotadas por dos, 356-357
planas
circunferencia de curvatura de, 763-764
curvatura de, 760-763
flujo a través de, 953-954
longitudes de, 331-333, 651-654
parametrización de, 641-646, 739
polares
graficación de, 656-657
longitud de, 669-670
punto(s)
de inflexión de, 205-207, 210
inicial de, 641
terminal de, 641
recta tangente a, 105
secante para, 43
suaves, 3-4, 331-333, 651-652, 742
curvatura de, 760-763
longitud de, 756

por tramos, 742, 958
rapidez en, 758
torsión de, 769
supuestos del cálculo integral vectorial, 958-959
tangentes a, 41-46, 758, 823-824
trabajo realizado por una fuerza en, 950-952
traza, 805
trazado de, 299-302
$y = f(x)$, longitud de, 331-333
Curvatura
cálculo de, 761, 771
centro de, 763
de curvas planas, 760-763
en el espacio, 764
radio de, 763
Cúspide, 113

D

Datos
del diapasón, 4
genéticos, y sensibilidad al cambio, 133
Decaimiento
del carbono 14, 398
exponencial, 394
radiactivo, 397
Dedekind, Richard, 263, AP-25
Definiciones recursivas, 567
Denominadores igual a cero, eliminación algebraica de, 52-53
Densidad
circulación, 968-971
como una función continua, 354
de circulación, 968-971
de flujo, 973
(divergencia), de un campo vectorial, 968, 973, 1015-1016
Derivada(s)
aplicaciones de, 185-248
cálculo de, a partir de la definición, 110
como
razón de cambio, 127-133
una función, 105, 110-114
velocidad, 128, 743
de función(es)
coseno, 138-139
exponenciales, 384, 388
hiperbólicas, 425-429
inversas, 370-371
raíz cuadrada, 111
seno, 137-141
trigonométricas, 137-141, 415-418
valor absoluto, 147
de logaritmos, 376, 390
de orden superior, 124, 153, 805
de segundo orden, 124
de series de potencias, 610
de una función
compuesta, 144-146, 744
constante, 118
recíproca, 110
vectorial, 741-743
de una integral, 284
definición de, 110
del vector tangente, 761
direccionales
cálculo de, 820-822
como producto punto, 821
definición de, 819
en el plano, 818-820
estimación del cambio con, 829-830
gradiente vectorial y, 818-825
interpretación de, 820
propiedades de, 822
y gradientes, 821
en economía, 131-133
en un punto, 105-107, 113-114
fórmula alternativa para, 110
funciones de, comportamiento de las gráficas de, 211-212
funciones inversas y, 366-380
graficación de, 112
lateral, 112-113
n-ésima, 124
notaciones para, 111-112
parciales
cálculo de, 800-802
con variables restringidas, 858
continuas, identidad para una función con, 1012
continuidad y, 789-795
de orden superior, 805
de segundo orden, 803-804
de una función de dos variables, 798-800
de una función de varias variables, 781-786
definiciones de, 799
funciones de varias variables, 781-786
multiplicadores de Lagrange, 845-852
notaciones equivalentes para, 799
planos tangentes y, 827-833
regla de la cadena para, 809-816
valores extremos y puntos silla, 836-842
vectores gradiente y, 818-825
por la derecha, 112-113
por la izquierda, 112-113
que involucran $\log_a x$, 390
regla
de la diferencia para, 120-121
de Leibniz, 312
del múltiplo constante para, 119-120
del producto cruz, 744
del producto punto, 744
general de la potencia para, 119, 386-387
segunda, 124
símbolos de, 124
tercera, 124
Descartes, René, AP-10
Desigualdad(es)
de Schwartz (de Cauchy-Schwartz), 713
del triángulo, AP-5
reglas de, AP-1
resolución de, AP-3-AP-4
Desplazamiento
contra distancia recorrida, 254-255, 283
de la gráfica de una función, 16
definición de, 128, 254
horizontal, AP-11
de una función, 16
vertical de una función, 16
Desviación estándar, 510
Determinante(s)
cálculo del producto cruz, 718
jacobiano, 923, 925, 926, 928
Diagrama(s)
de árbol, regla de la cadena multivariable, 811, 812, 813, 814
de Argand, AP-30
de dispersión, 4
de flechas de una función, 2
de máquina de una función, 2
Diferenciabilidad, 112-114, 798, 803, 805-807
Diferenciación
de funciones vectoriales, reglas de, 743-745
derivada(s)
como una función, 110-114
como una razón de cambio, 127-133
de funciones trigonométricas, 137-141
e integración, como proceso inverso, 284
funciones trigonométricas inversas y, 415-418
implícita, 151-154, 814-816
fórmula de, 814
regla de la cadena y, 814-816
técnica de, 151-154
linealización y, 165-168
logarítmica, 378-379
razones relacionadas, 156-161
regla de la cadena y, 144-148
tangentes y derivada en un punto, 105-107
término a término, 610
para series de potencias, 610
Diferencial(es)
área superficial, de superficies parametrizadas, 984
de área, 668
definición de, 168
estimación con, 169-171
linealización y, 165-168
planos tangentes y, 831-833
total(es), 832

Dirección
a lo largo de una trayectoria, 641-642, 938-939
de cosenos, 712
de vectores, 701
estimación del cambio en, 829-830
Directriz (directrices)
de la elipse, 681
de la hipérbola, 681
de la parábola, 681, 683
Dirichlet, Lejeune, 494
Discontinuidad(es)
de salto, 77
en *dy*/*dx*, 333-334
infinita, 77
oscilante, 77
punto de, 77
removible, 77
Discriminante (hessiano) de una función, 838
Distancia
en coordenadas cartesianas tridimensionales
de un punto a otro, 694
de un punto a un plano, 723-724, 725-726
de un punto a una recta, 722-723
en el plano, AP-13-AP-15
recorrida
cálculo de la, 251-253
contra desplazamiento, 254-255, 283
total, 254, 283
y esferas en el espacio, 694-695
Distribución
normal, 511
forma estándar de, 513
uniforme, 511
Divergencia
de integrales impropias, 493
límites y, 493
prueba del *n*-ésimo término para, 576-577
de series, 573
de sucesiones, 561-563
en el infinito, 563
de un campo vectorial, 971-973, 1015-1016
pruebas de, 498-500, 602
División
con cilindros, 324-326
obtención de rebanadas por planos paralelos, 314-315
obtención de volumen por, 314-315
Dominación, integrales dobles y, 880
Dominio(s)
conexo, 959
de un campo vectorial, 945, 959
de una función, 1-3, 781, 782
natural, 2
de una función, 2
simplemente conexo, 959

E

e
como límite, 387-388
como serie, 620-621
definición del número, 375
exponencial natural y, 383
Economía
derivadas en, 131-133
ejemplos de optimización aplicada en, 219-221
Ecuación(es)
de calor, 809
de circunferencias, AP-16
de componentes, para el plano, 723
de continuidad en hidrodinámica, 1023-1024
de hipérbolas, 675-677
de Laplace, 808-809
de las elipses, 675, 684, AP-16-AP-17
de onda, 809
de presión-profundidad, 345
de razones relacionadas, 157-161
de un plano en el espacio, 723-724
diferenciales
problemas con valor inicial y, 235
separables, 394-395
solución particular, 235
foco-directriz, 681
general lineal, AP-13
identidad de Euler, 631-632
inversas, 389
lineales, AP-13
generales, AP-13
movimiento ideal de proyectiles y, 750
paramétricas
de cicloide, 645
de curvas en el espacio, 739
de hipérbola, 644, 649-650
de rectas, 720-722
de una circunferencia, 642, 652-653
definición de, 641-642
graficación de, 642-644
para movimiento de proyectiles, 749-751
polares
de circunferencias, 683, 685
de rectas, 684
de secciones cónicas, 682-684
graficación de, 660
punto-pendiente, AP-12
que relacionan coordenadas
esféricas con cartesianas y cilíndricas, 915
polares y cartesianas, 661
rectangulares y cilíndricas, 911
vectoriales
de curvas en el espacio, 739
de un plano, 723
para movimiento de proyectiles, 749-751
para rectas, 720, 721-722
Efecto remolino, 970
Eje(s)
de coordenadas, AP-10
definición de, AP-10
momentos de inercia con respecto a, 942, 988
de una elipse, 673
de una parábola, 672, AP-15
giro alrededor de un, 968-971
momentos de inercia respecto a, 942, 998
volúmenes por obtención de rebanadas y rotación alrededor de, 313-320
y, rotación alrededor del, 339-340
Elemento(s)
de área curva, 983
de un conjunto, AP-2
radiactivos, vida media de, 398
Elevación, AP-11
Elipse(s)
centro de, 673, AP-17
distancia del centro al foco, 674
ecuaciones
estándar de, 675
polares de, 682-684
eje
focal de la, 673
mayor de la, 674, AP-17
menor de la, 674, AP-17
excentricidad de, 681
perímetro de, 653-654
vértices de, 673
Elipsoide(s)
de revolución, 730
definición de, 729
gráficas de, 731
Energía cinética y trabajo, 349
Enteros
descripción de, AP-26
iniciales, AP-18
positivos
definición de, AP-26
regla de la potencia para, 118-119
Escala(s)
de la gráfica de una función, 16-18
horizontal y fórmulas de reflexión, 17
vertical y fórmulas de reflexión, 17
Escalares, definición de, 698
Esferas
área de la superficie de, 984-985
concéntricas, en un campo vectorial, 1021-1022
ecuación estándar de, 694
en el espacio, distancia y, 694-695
parametrización de, 981
Esquinas, 113

Estimación del error, en criterio de la integral, 584-586
Euler, Leonhard, AP-36
e^x
derivada de, 384
ecuación inversa de, 383
integral de, 384-385
leyes de los exponentes para, 385
Excentricidad
de la elipse, 681
de la hipérbola, 681
de la parábola, 681
ecuación polar de las cónicas con, 682
en coordenadas polares, 680-682
Expansión uniforme de un gas, 970-971
Exponentes
irracionales, 386
leyes de, 385
Extensión continua, 82-83
Extremo(s)
absolutos, obtención de, 189-190
globales (absolutos), 185-190, 189-190
locales (relativos), 187-188, 200-202, 207-211, 836
prueba de la primera derivada para, 200-202
prueba de la segunda derivada para, 207-211
teorema de la primera derivada para, 188-189
obtención de, 188-189
relativos (locales), 187-188, 200-202, 207-211, 836

F

Fermat, Pierre de, 44
Física, ejemplos de optimización aplicada en, 217-219
Flujo
a través de
una curva plana, 953-954
una frontera rectangular, 972-973
cálculo del, 974, 995-998
contra circulación, 953
de corte, 970
definición de, 953, 996
integral de superficie de, 995-998
Focos, 671-677
Forma(s)
diferenciales, 965-966
exactas, 965-966
indeterminada
0/0, 403-405
de límites, 403-406, 630-631
integral, regla del producto en, 449-453
Fórmula(s)
de cálculo de torsión, 768
de conversión de coordenadas, 918
de desplazamiento para funciones, 16
de error, de aproximaciones lineales, 171-172, 831, 856
de Euler, AP-30-AP-31
de Green, 1027
de la distancia, 694, AP-14
de la longitud de arco, 334, 652, 757
de la suma, trigonométricas, 25
de Leibniz, 630
de medio ángulo, trigonométricas, 25
de Poiseuille para flujo sanguíneo, 176
de recursión, 567
de reducción, 453, 478
de Stirling, 522
de sustitución para integrales definidas, 296-299
de Taylor
definición de, 619, 620
para funciones de dos variables, 854, 858
del área de Arquímedes, 287
del casquillo para rotación, 327
diferencial corta, de longitud de arco, 334-335
paramétricas, para derivadas, 649
sinusoidal, 27
trigonométricas para el doble de un ángulo, 25
Fracciones parciales
definición de, 475
integración de funciones racionales con, 468-475
método de, 469-472
Franjas horizontales, 354-355
Frenet, Jean-Frédéric, 767
Fubini, Guido, 873
Fuerza(s)
campo de, 950
constantes, 342
trabajo realizado por, 342, 711
de un fluido
contra un plano vertical, 347
trabajo y, 952
y centroides, 358
suma de, 699-700
variable a lo largo de una recta, 342-343
trabajo realizado por
en una curva en el espacio, 950-952
en un desplazamiento, 711
variable
a lo largo de una curva, 950-952
a lo largo de una recta, 342-343
Función(es)
a partir de derivadas, comportamiento gráfico de, 211-212
acotadas, 103-104
algebraicas, 10
arco seno
definición de, 412
derivada de, 415
identidades que involucran, 414
y arco coseno, 412,414
área total debajo de la gráfica de, 285
armónicas, 1026
combinación de, 14-21
componentes, 739
compuestas, 15-16, 79-80, 144-145
comunes, 7-11
con valores reales, 2, 739, 781
constantes, 7, 49-50, 118, 255-256
definición de, 7, 49
derivada de, 118
continua(s)
composición de, 79-80
definición de, 78-79, 741
diferenciabilidad y, 114
en un extremo, 76
en un intervalo, 78
en un punto, 82-83, 741, 793
extremos absolutos de, 189-190, 795
integrabilidad de, 268
límites de, 75-78, 80
no negativas, valor promedio de, 255-256
por la derecha, 76
por la izquierda, 76
por partes, 268, 310
propiedades de, 78
teorema del valor intermedio para, 81-82, 219
valor promedio de, 273-274, 886-887, 899
valores extremos de, en conjuntos acotados cerrados, 186, 795
continuamente diferenciables, 331, 339, 651-652
continuidad de, 76, 741, 793
cosecante
definición ampliada, 22
inversa de, 414
coseno, 22, 138-139
derivada de, 138-139
gráfica de, 10
integral de, 458
inversa de, 414, 418
costo
marginal, 131-132
total, 132
cotangente
definición ampliada de, 22
inversa de, 414
creciente, 6, 199-200
cuadráticas, 9
cúbicas, 9
curvas suaves por tramos, 958
de componentes, 739, 945
de dos variables, 782-783, 786, 806
derivadas parciales de, 781-786, 798-800
límites de, 789-793
linealización de, 830-831
regla(s) de la cadena de, 809-811
teorema del incremento de, 806

de más de dos variables, 795, 802-803, 833
de posición, aceleración y, 197
de producción Cobb-Douglas, 853
de tres variables, 784-786, 811-812, 824-825
de valor real, 2, 739, 781
de varias variables, 781-786, 816
de Weierstrass, 118
decreciente(s), 6, 199-200
definición de, 1
definidas
en superficies, 812-814
implícitamente, 151-153, 814
por fórmulas, 14
por partes, 5
derivada de, 106, 110, 113-114, 742
derivadas como, 105, 110-114
diagrama
de dispersión de, 4
de flechas de, 2, 782
de máquina de, 2
diferenciables
continuas, 114, 651
continuidad y, 806
curvas paramétricas y, 649
definición de, 110
derivadas parciales, 798-800
en un intervalo, 112-113
fórmula de Taylor para, 616
gráfica de, 169
regla del múltiplo constante, 119
reglas para, 118-124, 144-148, 744
discontinuidad de, 77-78, 793
dominio de, 1-3, 14, 781, 782
en el espacio, valor promedio de, 899-900
escala de, 16-18
escalares, 739
escalón unitario, 50
exponenciales
crecimiento y decaimiento, 394
derivadas de, 388
en base *a*, 386
integrales de, 384-385
naturales, 382-384, 620
extensión continua de, 82-83
fórmulas de desplazamiento de, 16
gamma, 522, 936
general seno, 27
gradiente de, 821
graficación con calculadoras y computadoras, 29-34
gráficas de, 1-11, 14-21, 784
hessiano de una función de dos variables, 838
hiperbólicas
definiciones de, 424
derivadas de, 425-426, 428-429
gráficas de, 424
identidades de, 424
integrales de, 425-426
inversas, 426-427
las seis, básicas, 424
identidad, 7, 24-25, 49-50, 1012
impares, 4, 6-7
integrables, 268-271, 748, 871, 895
integral seno, 502
inversa(s)
de funciones exponenciales, 11, 366
definición de, 367
e integración, 457
hiperbólicas, 426-427
logaritmos y, 382-383, 389
obtención de, 368-369
regla de la derivada de, 370
y derivadas, 366-380, 370-371
inyectivas, 366-367
límite de, 48-55, 790
lineales, 7
linealización de, 165-168, 830-831
logarítmicas
comunes, 389
descripción de, 11
en base *a*, 389
fórmula para cambio de base y, 389
naturales, 375
logaritmo natural, 375-379, 389
definición de, 375
derivada de, 376
gráfica de, 382
propiedades algebraicas de, 375-378
series de potencias para, 612
mayor entero, 5
definición de, 5
como una función definida por partes, 5
menor entero, 5
mínimo entero, 5
monótonas, 199-200
multiplicación de, 14
no diferenciable, 113-114
no integrable, 268-271
no negativas
área bajo la gráfica de, 272-273
continuas, 255-256
pares, 6-7
piso entero (función mayor entero), 5
polinomiales, 8
definición de, 8
posición, 5
positivas, área debajo de la gráfica de, 256
potencia, 119, 386-387
potencial, 958
prueba de la recta vertical para, 4-5
punto crítico de, 189, 837
racionales
definición de, 9
dominio de, 9
integración de, por fracciones parciales, 468-475
límites de, 52
raíz
cuadrada, 8, 111
cúbica, 8
rango de, 1-3, 781, 782
recíproca, derivada de, 110
regla de Dirichlet de, 103
representación
como una serie de potencias, 614-618
numérica de, 4
secante
definición ampliada de, 22
inversa de, 414
seno, 22, 137-138
derivada de la, 137-138
gráfica de la, 10
integral de la, 458
inversa de la, 414, 415-416
simétricas, 6-7, 298-299, 663
integrales definidas de, 298-299
gráficas de, 6-7
propiedades de, 6
suma de, 14-15
tangente
definición ampliada de, 22
inversa de, 414
techo entero (función menor entero), 5
trascendentes, 385
trigonométricas
ángulos, 21-22
derivadas de, 137-141
gráficas de, 10, 24, 31-32
integrales de, 457-462
inversas, 411-420
las seis, básicas, 22-23
periodicidad de, 24
unitarias escalonadas, límites y, 50
valor de, 2
valor(es)
absoluto, 5, 147
extremos de, 185-190, 836-842, 848, 851
máximo y mínimo de, 185-190, 187-188, 200-202, 840-842
variable
de entrada de, 1, 781
de salida de, 1, 781
dependiente de, 1, 781
independiente de, 1, 781
vectoriales
antiderivadas de, 747
continuidad de, 740-741
curvas en el espacio y, 739-745
de longitud constante, 745
diferenciables, 742
integral(es) de, 747-752
límites de, 740-741
reglas de diferenciación para, 743-745

velocidad, 254, 743
aceleración y, 197, 743
rapidez y, 254

G

Galileo Galilei
fórmula de caída libre, 41, 130
ley de, 41
Ganancia marginal, 219
Gauss, Carl Friedrich, 261, 698
Geometría en el espacio, 692-738
Gibbs, Josiah Willard, 758
Giro alrededor de un eje, 968-971
Grado, de un polinomio, 9
Gráfica(s)
área superficial de la, 988
asíntotas de, 86-96
conexidad y, 81
cóncava
hacia abajo, 204
hacia arriba, 204-205
de curvas polares, 666
de derivadas, 112
de ecuaciones paramétricas, 666
de funciones, 3-4, 14-21, 784
comunes, 7-11
con dos variables, 783-784
con tres variables, 784-786
con varias variables, 781-786
trigonométricas, 24, 31-32
de sucesiones, 562
de una ecuación, AP-10
de $y = f(x)$, estrategia para, 209-211
en coordenadas polares, 660, 663-666
pruebas de simetría de, 663
simétricas
respecto al eje x, 6, 663
respecto al eje y, 6, 663
respecto al origen, 6, 663
técnicas de, 666
trigonométricas, transformaciones de, 26-27
Graficación, con calculadoras y computadoras, 29-34
Grassmann, Hermann, 701
Gravitación, ley de Newton de, 773

H

Halley, Edmund, 200
Hélice, 740
Hessiano de una función, 838
Hidrodinámica, ecuación de continuidad de, 1023-1024
Hipérbola(s)
centro de, 675
definición de, 675
directrices, 681
ecuación de, en coordenadas cartesianas, 681-682
ecuación polar de, 682
eje focal de, 675
excentricidad de, 681
focos de, 675
forma estándar de las ecuaciones de, 675-677
ramas de, 675
vértices de, 675
Hiperboloides, 729, 731
Huygens, Christian, 644, 645

I

Identidad(es)
de Euler, 631-632
de función inversa-cofunción inversa, 418
trigonométricas, 24-25
Imagen, 922
Incrementos, AP-10-AP-13
Independencia de la trayectoria, 958
Índice(s)
cardiaco, 866
de sucesiones, 561
de sumatorias, 259
Inducción matemática, AP-6-AP-9
Inercia, momentos de, 905-908
Infinitésimos, AP-25
Infinito
divergencia de sucesiones para, 563
funciones racionales e, 88
límites en, 86-96
Inflexión, punto de, 189, 205-207, 210
Ingreso marginal, 219
Integración
con respecto a y, área entre curvas, 301-302
con software matemático, 479-480
con sustitución, 290, 296-299
de funciones
inversas, 457
racionales por fracciones parciales, 468-475
vectoriales, 748-749
definida
por partes, 453
por sustitución, 296-299
doble, área por, 884-887
en campos vectoriales, 938-1032
en coordenadas
cilíndricas, 910-918
esféricas, 916-918
fórmula(s)
básicas, 445
por partes, 450
límites de. *Vea* Límites de integración
numérica, 482-489
por partes, 449-455
por sustitución trigonométrica, 463-466
tabular por partes, 454, 521
técnicas de, 444-523
término a término, 611-612
para series de potencias, 611-612
variable de, 237, 267
y diferenciación, relación entre, 284
Integral(es)
aproximación de
por la regla de Simpson, 484-486
por la regla del punto medio, 251
por la regla del trapecio, 483-484
por la suma de Riemann, 263-265
por sumas inferiores, 251
por sumas superiores, 250
cambio exponencial y, 393-394
cartesianas, cambio a integrales polares, 890-892
de campos vectoriales, 947-948
de flujo, 952-953
de funciones
hiperbólicas, 424-425
vectoriales, 747-749
de línea
aditividad y, 940-941
cálculos de masa y momento e, 941-942
campos vectoriales y, 945-954
coordenadas xyz e, 949
definición de, 939
en el plano, 942-943
evaluación de, 939, 948
integración en campos vectoriales, 938-943
interpretación de, 942-943
teorema fundamental de, 959
de potencias de tan x y sec x, 460-461
de razones, 283-284
de superficie(s), 991-1000, 1005
cálculo de, 992-995
de campos vectoriales, 996
de funciones escalares, 992
en el teorema de Stokes, 1005
fórmulas para, 992
integración en campos vectoriales, 991-100
para flujo, 995-998
de trabajo, 342-343, 950-952
definidas
aplicaciones de, 313-373
de funciones simétricas, 298-299
de funciones vectoriales, 748
definición de, 249, 266-268, 289
evaluación de, por partes, 453
existencia de, 266-268
funciones no negativas y, 272-273
notación de, 267
propiedad del desplazamiento de, 305
propiedades de, 269-271
sustitución en, 296-299
teorema del valor medio para, 278-281
valor promedio de funciones continuas, 273-274
y antiderivadas, 237

dobles
como volúmenes, 871-872
en forma polar, 888-892
en rectángulos, 870-874
en regiones no rectangulares acotadas, 875-876
propiedades de las, 880-881
sustituciones en, 922-927
teorema de Fubini para el cálculo de, 872-874
elíptica
de primera clase, 634
de segunda clase, 654
en coordenadas polares, 888-889
impropias, 492-500
aproximaciones para, 500
calculadas como límites, 492-500
con un software matemático, 497-498
convergencia de, 493, 495
del tipo I, 493
del tipo II, 495
indefinidas, 237-238, 289-294
definición de, 237, 289
evaluación con la regla de la sustitución, 289-294
iterada(s), 872
logaritmos definidos como, 374-375
múltiples, 870-937
no elementales, 480-481, 628-629
polares, cambio de integrales cartesianas a, 890-892
que involucran log, 390
repetidas, 872
sustitución en, 289-294, 296-299, 922-930
tabla de, 477-478
breve de, 445
trigonométricas, 457-462
triples
en coordenadas cilíndricas, 910-918
en coordenadas esféricas, 914-918
en coordenadas rectangulares, 894-900
propiedades de, 894-895, 900
sustituciones en, 927-930
Integrandos
con asíntotas verticales, 495-497
definición de, 237
Interpretación afuera-adentro de la regla de la cadena, 146
Intersección
con x, AP-13
de conjuntos, AP-2
rectas de, 724-725
Intervalo(s)
acotados, 6
de convergencia, 609
definición de, AP-3
diferenciables en, 112-113
finitos (acotados), 6, AP-3
infinitos (no acotados), 6, AP-3
no acotados, 6
parámetro, 641-642
tipos de, AP-3
Inversa(s)
de funciones inyectivas, 367-368
de ln x y del número e, 382-383
obtención de la, 368-369
operaciones de integración y diferenciación, 284

J

Jacobi, Carl Gustav Jacob, 922
Joule, James Prescott, 342
Joules, 342

K

Kepler, Johannes, 775
k-ésimo subintervalo de partición, 263, 267
Kovalevsky, Sonya, 429

L

L'Hôpital, Guillaume de, 403
Lagrange, Joseph-Louis, 194, 845
Laplace, Pierre-Simon, 804
Leibniz, Gottfried, 290, AP-25
Lentes, entrada de luz, 154
Ley(es)
asociativas, AP-24
conmutativas, AP-24
de enfriamiento, de Newton, 399-400
de exponentes, 385
de Gauss, 1022
de la elipse (primera ley de Kepler), 774
de las áreas iguales (segunda ley de Kepler), 774-775
de límites
límite de una función y, 48-55
para funciones con dos variables, 791
teorema, 51, 87
de logaritmos
demostraciones de, 377-378
resumen de propiedades, 377
de los cosenos, 25-26, 707
de Newton
de la gravitación, 773
del enfriamiento, 399-400
de refracción, 219
de resortes de Hook, 343-344
de Snell, 219
de transitividad para números reales, AP-24
distributiva
definición de, AP-24
del producto cruz de vectores, 715
demostración de, AP-35-AP-36
tiempo-distancia (tercera ley de Kepler), 775
Límites
bilaterales, 68
definición de, 68
demostración de, AP-21
continuidad y, 41-104
de (sen θ)/θ, 71-73
de funciones
con valores vectoriales, 740-741
continuas, 75-78, 80
de dos variables, 789-793
racionales, 52, 88
de integración
de integrales definidas, 296-299
en x, 897, 899
en y, 896-898
en z, 896, 897, 898, 913
infinita, 492-495
obtención de, para integrales múltiples, 879-880, 889-890, 895-899, 912-914, 917
para coordenadas cilíndricas, 912-914
para coordenadas esféricas, 917
para coordenadas polares, 889-890
para coordenadas rectangulares, 895-900
de polinomios, 52
de sucesiones, 562, 564-565
de sumas
de Riemann, 266-268
finitas, 262-263
de valores de una función, 48-55
definición de
demostración de teoremas con, 64-65
exacta, 59-65
informal, 48-50
prueba de, 60-62
del cociente diferencial, 106
deltas, obtención algebraica, 62-64
e (el número) como, 387-388
en el infinito, 86-96
estimación de, calculadoras y computadoras para, 53-54
finitos, 86-96
formas indeterminadas de, 403-409
inexistencia de, prueba de dos trayectorias para funciones de dos variables, 794
infinitos, 91-93
de integración, 492-495
definición de, exactos, 93-94
descripción y ejemplos, 91-93
laterales
definición(es) de, 68-70
derivadas en los extremos, 112-113
que involucran (sen θ)/θ, 71-73
para coordenadas cilíndricas, 912-914
por la derecha
definición de, 69-70
demostración de, AP-21
por la izquierda
definición de, 69-70
exactos, 59-65, 70
informales, 68-70

que se presentan comúnmente, 566-567, AP-22-AP-23
r de integración, 889, 913
regla
de la raíz para, 51
de potencia para, 51
teorema del sándwich, 54-55
Linealización
de funciones de dos variables, 830-831, 832
definición de, 166, 830
diferenciales y, 165-168
Líquidos
bombeo desde contenedores, 344-345
incompresibles, 973
ln *bx*, 376-377
ln *x*
cambio de base y, 389
derivada de, 376
ecuación inversa de, 383
gráfica y rango de, 378
integral de, 451
inversa de, 382-383
número *e* y, 375
propiedades de, 377
ln x^r, 377, 386
$\log_a u$, derivada de, 390
$\log_a x$
derivadas e integrales que involucran, 390
ecuaciones inversas de, 389
Logaritmos
definidos como una integral, 374-375
integral de, 451
propiedades de, 377-378
algebraicas, 377-378, 389
Longitud
a lo largo de una curva en el espacio, 756-758
constante, funciones vectoriales de, 745
de arco
a lo largo de una curva en el espacio, 756-758
de una función, 334, 758
discontinuidades en *dy*/*dx*, 333-334
e integrales de línea, 938-939
fórmula diferencial de, 334-335
longitud de una curva, $y = f(x)$, 331-333
de curvas, 331-333, 651-654
de un vector (magnitud), 698, 699-700
de una curva
definida paramétricamente, 651-654
en coordenadas polares, 669-670
del paso, 483

M

Maclaurin, Colin, 615
Magnitud de un vector (longitud), 698, 699-700
Marco(s)
coordenado por la izquierda, 692
de Frenet
definición del, 767
fórmulas de cálculo, 769
torsión en, 768-769
TNB, 767
Marginales, 131-133
Masa. *Vea también* Centro de masa
a lo largo de una recta, 351-352
de alambres o varillas delgadas, 941-942
de carcasas delgadas, 998-1000
de la ecuación de energía, 174
distribuida en una región plana, 352-353
fórmulas de, 353, 355-356, 904, 942
momentos de, 353
por la integral de línea, 942
y cálculos de momento
integrales de línea y, 941-942
integrales múltiples y, 904, 907
Máximo
absoluto (global), 185-190, 840-842
global (absoluto), 185-190, 840-842
local (relativo), 187-188, 836, 842
restringido, 845-848
Media
aritmética, 199, 392, 854
geométrica, 199, 392, 854
Mendel, Gregor Johann, 133
Método(s)
de discos, 316-318
de integración de Heaviside, 473
de las arandelas, 319-320, 329
de los casquillos, 326-329
de Newton
aplicación del, 228-230
convergencia de aproximaciones, 230
procedimiento del, 228
-Raphson, 227-230
Mínimo
absoluto (global), 185-190, 840-842
global (absoluto), 185-190, 840-842
local (relativo), 187-188, 836, 842
restringido, 845-848
Momento(s)
centros de masa y, 351-360, 903-908, 942, 998
de alambres o varillas delgadas, 941-942
de carcasas delgadas, 998-1000
de inercia, 905-908, 998
de sólidos y placas, 907
de un sistema respecto al origen, 352
primer, 903-905, 998
segundo, 905-908
y cálculo de masa, integrales de línea y, 941-942
Movimiento
a lo largo
de una curva en el espacio, 741-743, 767
de una recta, 128-131
antiderivadas y, 235-237
armónico simple, 139-140
de proyectiles, ecuaciones vectoriales y paramétricas de, 749-751
dirección del, 743
en coordenadas polares y cilíndricas, 772-773
funciones vectoriales y, 739, 741-743
planetario
en un plano, 773-774
primera ley de Kepler (ley de la elipse) del, 774
segunda ley de Kepler (ley de las áreas iguales) del, 774-775
tercera ley de Kepler (ley del tiempo-distancia) de, 775
Multiplicación
de funciones, 14
de números complejos, AP-31
de series de potencias, 609-610
escalar de vectores, 699-700
Multiplicador (de Lagrange), 841, 845-852
con dos restricciones, 851-852
derivadas parciales y, 845-852
método de, 848-851
resolución de problemas con valor extremo, 841

N

Nabla de *f*, 821
Napier, John, 377
n-ésima suma parcial, 572-573
Newton, Sir Isaac, 278, AP-25
Norma de partición, 264, 871, 911
Notación(es)
de Leibniz, 112, 146, 165, 168, 267, 652
factorial, 567
para derivadas, 111-112, 799-800
sigma, 259-265
Número(s)
complejos
definición de, AP-26
desarrollo de, AP-26-AP-30
división de, AP-31-32
fórmula de Euler y, AP-30-AP-31
multiplicación de, AP-31
operaciones con, AP-31-AP-33
parte imaginaria de, AP-26
parte real de, AP-26
potencias de, AP-32
raíces de, AP-32-AP-33
teorema fundamental del álgebra y, AP-34
de Fibonacci, 567
irracionales
como exponentes, 386
definición de, AP-2
naturales, AP-2
racionales, AP-2, AP-26
reales
construcción de los, AP-25-AP-26
desarrollo de, AP-26-AP-27

propiedades de los, AP-1-AP-23
recta de los, AP-1
teoría de los, AP-23-AP-26
trascendentes, 385

O

Obtención de la raíz, 81-82
Octantes, 692
Operaciones algebraicas, con vectores, 699-701
Óptica
ley de Snell de, 219
principio de Fermat en, 218
Optimización aplicada
del área del rectángulo, 217-218
ejemplos
de economía, 219-221
de matemáticas y física, 217-219
resolución de problemas, 215-217
uso del material mínimo, 216-217
volumen de una lata, 216-217
Oresme, Nicole, 562
Origen
del sistema de coordenadas, AP-10
en coordenadas polares, 659
momento de un sistema con respecto al, 352

P

Par de coordenadas, AP-10
polares, 659
Parábola(s)
aproximaciones mediante, 484-486
como gráficas de ecuaciones, AP-15-AP-16
definición de, 671
directriz de, 671, 673, 683
ejes de, 672, AP-15
excentricidad de, 681
foco de, 671, 673
longitud focal de, 672
parametrización de, 642-643
semicúbicas, 156
vértice de, 672, AP-15
Paraboloides
definición de, 729
elípticos, 731
hiperbólicos, 730, 731
volumen de regiones acotadas por, 897-898
Paralelogramo
área de, 715
ley de la suma, 699-700, 707
Parametrización
área superficial y, 982-986
de curvas, 641-646, 739
de superficies, 980-986
de un cilindro, 982
de un cono, 981
de una esfera, 981
de una recta, 720-721
Parámetro(s), 641, 981
de la longitud de arco, 757
dominio del, 641, 981
intervalo del, 641-642
Partes, integración por, 449-455
Particiones
definición de, 870-871
k-ésimo subintervalo de, 263
norma de, 264, 871
para sumas de Riemann, 264-265
Pascal, Blaise, 573
Pendiente(s)
de curvas, 43-45
con coordenadas polares, 664-665
parametrizadas, 643-644
de una recta no vertical, AP-11
de una secante, 44
recta tangente y, 105-106
Periodicidad, de funciones trigonométricas, 24
Periodo
de un péndulo, 150, 184
orbital, 774
Pi (π)
sucesión recursiva de, 571
suma de series y, 586, 611, 630
Pirámide, volumen de, 314-315
Placa(s)
acotadas por dos curvas, 356-357
bidimensional, 904-907
delgada y plana, centro de masa de, 353-356
Plano(s)
ángulos entre, 726
coordenadas cartesianas en, AP-10
de coordenadas
definición de, 692
primeros momentos respecto a, 942, 988
de rectificación, 769
derivadas direccionales en, 818-820
distancia y circunferencias en, AP-13-AP-15
ecuación de, 723
en el espacio, 720-726
integrales de línea en, 942-943
movimiento de planetas en, 773-774
normal(es), 769
osculador(es), 769
paralelos, 724
partición por, 314-315
rectas de intersección, 724
rectas de intersección en, 724-725
tangente(s)
a una superficie, 827, 828, 982
horizontal(es), 836-837
y rectas normales, 827-829
teorema de Green en, 968-978
xy, definición de, 692
xz, definición de, 692
yz, 692
Poisson, Siméon-Denis, 836
Polinomio(s)
coeficientes de, 8-9
cuadrático irreducible, 469
de Taylor, 616-618, 623, 624
derivada de, 121
grado de, 9
límites de, 52
Posición en el tiempo, de una partícula en el espacio, 739
Potenciales, de campos conservativos, 962-965
Potencias
de números complejos, AP-32
de senos y cosenos, productos de, 458-459
indeterminadas, 406-407
series binomiales de, 627-628
Preimagen, 922
Presión en un fluido, 345-347
Primera ley de Kepler (ley de la elipse), 774
Primeros momentos
masas y, 903-905
respecto a los ejes de coordenadas, 904
respecto a los planos coordenados, 904, 998
Principio
de Cavalieri, 315
de Fermat en óptica, 218
Probabilidad
de una variable aleatoria continua, 505
desviación estándar, 510
media, 508
mediana, 509
varianza, 515
distribución(es)
decrecientes exponencialmente, 506, 509
normales, 511
uniformes, 511
función densidad, 505
Problemas con valor inicial
definición de, 235
ecuaciones diferenciales y, 235
separables, 395
Productos
caja, 717-718
cruz
con determinantes, 715-717
de dos vectores en el espacio, 714-715
demostración de la ley distributiva para, AP-35-AP-36
propiedades de, 714-715
regla de la mano derecha para, 714
de números complejos, AP-31
de potencias de senos y cosenos, 458-459
de senos y cosenos, 461-462

escalares triples (producto caja), 717-718
punto
ángulo entre vectores, 706-708
definición de, 707
derivadas direccionales como, 821
propiedades del, 709-711
vectores ortogonales y, 708-709
y cocientes, derivadas de, 122-124
Propiedad
de completitud de los números reales, AP-24
del valor intermedio, 81
Proyección, de vectores, 709-711
Pruebas (criterios)
de comparación de límites (o asintótica), 498, 499, 589-591
de comparación directa, 498
de continuidad, 77
de la derivada, para valores extremos locales, 187-188, 836-840
de la primera derivada, 200-202, 837, 846
de la recta vertical, 4-5
de la segunda derivada
deducción de, función de dos variables, 854-856
para concavidad, 205
para extremos locales, 207-211
resumen de, 842
de las dos trayectorias para inexistencia de límites, 794
de simetría, para gráficas en coordenadas polares, 663
límites de integración, obtención de 889, 890, 917
para máx-mín, 200-202, 207, 837, 838, 842
p-serie, 583-584
Punto(s)
crítico, 189, 209, 837, 842
de discontinuidad, definición de, 76
de inflexión, 189, 205-207
en un sistema cartesiano tridimensional, distancia a un plano, 725-726
final
de una curva, 641
de un vector, 697
frontera, 785
de regiones en el espacio, 785
de regiones en el plano, 783
obtención de valores máximo y mínimo absolutos, 840
inicial
de un vector, 697
de una curva, 641
interior(es), 785
continuidad en, 76
de regiones en el espacio, 785
de regiones en el plano, 783
obtención de los valores del máximo y mínimo absoluto, 840
medio de un segmento recto en el espacio, obtención con vectores, 702
silla, 730, 837-838, 838, 842

R

Radiactividad, 397-399
Radián(es), 21-22, 23
como medida y las derivadas, 148
Radio
de circunferencia, AP-14
de convergencia, 609
de series con potencias, 608-609
de curvatura, de curvas planas, 763-764
unidades de, 21
Raíces
cuadradas, eliminación de, en integrales, 460
de números complejos, AP-32-AP-33
obtención por el método de Newton, 228-230
serie binomial de, 627-628
teorema del valor intermedio y, 81-82
Ramificación de los vasos sanguíneos, 442
Rango
de una función, 1-3, 781, 782
en movimiento de proyectiles, 751
Rapidez
a lo largo de una curva suave, 758
de una partícula en el espacio, 743
definición de, 128
ecuaciones de razones relacionadas, 159-161
en intervalos cortos de tiempo, 42
instantánea, 41-43
promedio, 41-43
cuerpos en movimiento y, 41-43
definición de, 41
en pequeños intervalos de tiempo, 42
Rayo inicial en coordenadas polares, 659
Razón(es)
de cambio, 41-46
de crecimiento, de funciones, 394, 433-435
de decaimiento radiactivo, 397
de flujo de fluidos, 972
en series geométricas, 574
instantáneas de cambio
derivadas como, 127-133
rectas tangentes y, 45-46
instantáneas, la derivada como, 45-46
integral de, 283-284
promedio, 43
cambio, 43, 45
relacionadas, 156-161
Rectángulos
área
aproximada de, 249-251
optimizada de, inscritos en una circunferencia, 217-218
definición de sumas de Riemann, 264-265
integrales dobles en, 870-874
Rectas
de intersección, en planos, 724-725
ecuación(es)
directa de, 720
paramétricas de, 720-721
polar de, 684
vectoriales de, 720-722
masas a lo largo de, 351-352
movimiento a lo largo de, 128-131
normales, 154, 827
oblicuas, 735
paralelas, 724, AP-13
perpendiculares, AP-13
secantes, 43
tangentes, 45-46, 105
a una curva, 105
de aproximación, 166-830
razones instantáneas de cambio y, 45-46
trabajo realizado por una fuerza variable a lo largo de, 342-343
verticales, fórmula del casquillo para revolución con respecto a, 327
y planos, en el espacio, 720-726
Reflexión de una gráfica, 16-18
Refracción, ley de, 219
Región(es)
abiertas, 783, 785, 1012-1013
acotadas, 783
áreas de, en el plano, 884-886
definición de, 783
máximos y mínimos absolutos en, 840-842
cerradas, 783, 785
conexas, 959
simples, 959
en el espacio
punto interior, 785
volumen de, 895
en forma de ventilador en coordenadas polares, área de, 668
especiales
teorema de divergencia de, 1019-1020
teorema de Green para, 977-978
generales, integrales dobles en, 875-881
no acotadas, 783
planas
masas distribuidas en, 351-353
punto interior, 783
sólidas, volumen de, 876-879
Regla(s)
algebraicas
para gradientes, 824
para logaritmos naturales, 377
para sumas finitas, 261
de aditividad, para integrales definidas, 270

de cociente de límites, demostración de, AP-20-AP-21
de diferenciación, 118-124
de dominación para integrales definidas, 270
de L'Hôpital
  demostración de, 408-409
  formas indeterminadas y, 403-409
  obtención de límites de sucesiones mediante la, 405-406
de la cadena
  de curvas parametrizadas diferenciables, 649
  deducción del criterio de la segunda derivada y, 855
  demostración de, 145-146, 172
  derivadas de funciones compuestas, 144-146
  derivadas de funciones exponenciales, 384
  derivadas de funciones inversas, 370
  derivadas de funciones trigonométricas inversas, 416
  derivadas direccionales y, 821
  ecuaciones de razones relacionadas, 157
  función curvatura y, 762
  movimiento en coordenadas polares y, 773
  para derivadas parciales, 809-816
  para diferenciación implícita, 814, 986
  para dos variables independientes y tres variables intermedias, 812-813
  para funciones de dos variables, 809-811
  para funciones de tres variables, 812-813
  para funciones hiperbólicas inversas, 429
  para funciones vectoriales, 744-745
  para potencias, 147, 152
  para potencias en una función, 146-148
  para trayectorias, 825
  regla de "afuera hacia dentro" y, 146
  regla de sustitución y, 289-294
  uso repetido de, 146
de la derivada para inversas, 370
de la desigualdad máx-mín para integrales definidas, 270, 278-279
de la diferencia
  de series geométricas, 577
  para antiderivadas, 234, 238
  para combinación de series, 577
  para derivadas, 120-121
  para derivadas de funciones constantes, 118
  para derivadas de orden superior, 124
  para enteros positivos, 118-119
  para funciones vectoriales, 744
  para gradientes, 824
  para integrales, 270
  para límites, 51
  para límites de funciones con dos variables, 791
  para límites de sucesiones, 564
  para productos y cocientes, 121
  para sumas finitas, 261
de la raíz
  para límites, 51
  para límites de funciones de dos variables, 791
de la suma
  de funciones de dos variables, 791
  de series geométricas, 577
  de sucesiones, 564
  para antiderivadas, 234, 238
  para combinación de series, 577
  para derivadas, 120-121, AP-8-AP-9
  para funciones vectoriales, 744
  para gradientes, 824
  para integrales definidas, 270
  para límites, 51, 64
  para sumas finitas, 261
de Leibniz, 312
  para la derivada de una integral, 312
  para productos, 184
de linealidad para antiderivadas, 234
de orden de integración, 270
de potencia
  de logaritmos naturales, 377, 389
  demostración de, 386-387
  para derivadas, versión general de, 119
  para enteros positivos, 118-119
  para límites, 51, 791
de producto de límites, demostración de, AP-19-AP-20
de Simpson
  aproximaciones mediante la, 484-486, 486-489
  análisis de error y, 486-489
de sustitución
  definición de, 291
  en integrales definidas, 296-299
  evaluación de integrales indefinidas con, 289-294
del cociente
  para derivadas, 123-124, 141, 600
  para el gradiente, 824
  para límites, 51, 791, AP-20-AP-21
  para logaritmos naturales, 377, 389
  para sucesiones, 564
del intervalo de ancho cero, 270, 375
del múltiplo constante
  para antiderivadas, 235, 238
  para combinación de series, 577
  para derivadas, 119-120
  para gradientes, 824
  para integrales, 270, 880
  para límites, 51, 564, 791
  para sumas finitas, 261
  del negativo, para antiderivadas, 234
  del producto
    cruz para derivadas de funciones vectoriales, 744-745
    en forma integral, integración por partes, 449-453
    para derivadas, 122
    para el gradiente, 824
    para límites, 51, 791, 122-123
    para logaritmos naturales, 377, 389
    para series de potencias, 609-610
    para sucesiones, 564
    punto para funciones vectoriales, 744
  del punto medio, 251-252
  del recíproco para logaritmos naturales, 377, 389
  del trapecio
    análisis de error y, 486-489
    aproximaciones mediante, 483-484, 486-489
  del valor constante para sumas finitas, 261
  función constante, 744
  general de potencia para derivadas, 119, 386-387
Relación de proporcionalidad, 7
Reloj de péndulo, 645
Renumeración de series infinitas, 578-579
Representación
  de una función, serie de potencias, 604-612
  numérica de funciones, 4
Residuo
  de orden *n*, definición para la fórmula de Taylor, 620
  en la prueba de integrales, 585-586
  estimación del, en el teorema de Taylor, 620, 621-622
Resorte(s)
  ley de Hook para, 343-344
  masa de un, 941-942
  trabajo de estiramiento en, 344
Resta, de vectores, 700
Revolución(es)
  áreas de superficies de, 337-340, 656-657
  con respecto al eje *y*, 339-340
  elipsoide de, 730
  fórmula del casquillo para, 327
  sólidos de
    método de discos, 316-318
    método de arandelas, 319-320
  superficie de, 337
Riemann, Georg Friedrich Bernhard, 263
Rolle, Michel, 193

Rotación
método de discos, 316-318
uniforme, 973
Rotacional, componente **k** del, 968-971
Rueda de paletas, 1008-1011

S

Sacudida, 129, 130
Sec *x*
derivadas de, 140
integrales de, 460-461
inversa de, 414-415, 417
Secante, función trigonométrica, 22
Secciones transversales
horizontales, límites de integración y, 879-880
verticales, límites de integración y, 879
volúmenes que utilizan, 313-312
Segmentos de recta
dirigidos, 697
en el espacio, 720-726
punto medio de, obtención con vectores del, 702
Segunda ley de Kepler (ley de las áreas iguales), 774-775
Segundo momento, 905-908
Seno(s)
definición ampliada de, 22
integrales de productos, 461-462
de potencias de, 458-459
valores de, 23
Serie(s)
absolutamente convergentes, 592-593
agregar o eliminar términos de, 578
alternantes, 598-602
armónicas, 598-600
definición de, 598-599
armónicas, 582, 598-600
alternantes, 598-600
definición de, 582
binomiales, 626-628
combinación de, 577-578
convergencia de, pruebas de comparación para, 588-591
convergentes, 573
convergentes condicionadas, 601
criterios (pruebas)
de convergencia absoluta, 593
de alternancia, 598-601
de condensación de Cauchy, 587
de comparación, 588
de convergencia, 588-591
de la integral, 581-586
de comparación de límites, 589-591
de Raabe, 638
de la raíz, 595-597
de la razón, 594-595
resumen de, 602
de Maclaurin, 615-616, 617
de potencias, 604-612
convergencia de, 605-609
diferenciación término a término de, 610
integración término a término de, 611-612
multiplicación de, 609-610
operaciones en, 609-612
recíprocas, 605
de Taylor, 615-616, 619-625, 622-623
aplicación de, 622-623, 628-632
convergencia de, 619-625
definición de, 615-616
usadas con frecuencia, 632
divergentes, 573, 576-577
estimación de error, 584-586
geométricas, 574-576
convergencia de, 574
definición de, 574-576
infinitas, 572-579
p, 583-584
renumeración de términos, 578-579
reordenamiento de términos de, 601-602
representaciones, de funciones de potencias, 604-612
suma (de), 572-573
parcial de, 572-573
Signo de integrales, 237
Simpson, Thomas, 485
Sistema(s)
algebraicos por computadora
comando "integrate", 579
integración con, 479-480
para evaluación de integrales impropias, 497-498
tablas de integrales y, 477-478
de coordenadas
cartesianas, 692-695
regla de la mano derecha, 692
regla de la mano izquierda, 692
tridimensionales, 692-695, 912-918
de torque, sistemas de masas, 351-352
Snell van Royen, Willebrord, 218
Software
graficación con, 29-34
matemático. *Vea* Sistemas algebraicos por computadora
Sólido(s)
cilíndrico, volumen de, 313-315
de revolución
por el método de arandelas, 319-320
por el método de discos, 316-318
principio de Cavalieri para, 315
sección transversal de, 313
tridimensional(es), masas y momentos, 904-907
volumen de
cálculo de, 314
por el método de arandelas, 319-320
por el método de discos, 316-318
por el método de rebanadas, 313-320
por integrales dobles, 871-872, 876-879
por integrales triples, 894, 895
Solución(es)
de ecuaciones diferenciales, 394
general de una ecuación diferencial, 235, 394
particular, 235
de una ecuación diferencial, 235
St. Vincent, Gregory, 654
Sucesiones
acotadas, 567-569
cálculo de, 564-565
convergencia de, 561-563
de sumas parciales, 573
no decrecientes, 568
definidas recursivamente, 567
divergencia de, 561-563
en el infinito, 563
negativo, 563
índice de, 561
infinitas, 560-569
límites de, 562, 564-565
por el teorema de la función continua, 565
por el teorema del sándwich, 564
por la regla de L'Hôpital, 565-566
monótonas, 567-569
no acotadas, 567
no decrecientes, 568
teorema del *zipper* en, 571
Suma(s)
de funciones, 14-15
de Riemann
área total de un rectángulo, 284
convergencia de, 267
división por cilindros, 325
formación de, 267
integrales de línea y, 938
límites de, 266-268
para integrales, 353, 911, 916, 991
repaso del concepto, 263-265
trabajo y, 343
volumen usando casquillos cilíndricos, 327
volumen usando secciones transversales, 314
de vectores, 699-700
finitas, 601
estimación con, 249-257
integrales
límites de, 262-263
notación sigma y, 259-262
reglas algebraicas de, 261
inferiores, 251
límites de, 262-263
parciales
de series *n*-ésimas, 572-573
no decrecientes, 573, 581-582
sucesión(es) de, 573

superiores, 250
y restas de integrales dobles, 880
Superficie(s)
área y, 656-657, 980-988
bilateral, 995
con orificios, 1012
cuadráticas, 729-731
de funciones de dos variables, 784
de nivel, 784
de funciones de tres variables, 784
de revolución, 337
de un cilindro, 337
definidas implícitamente, 986
funciones definidas en, 812-814
implícitas, 986-988
orientables, 995
parametrización de, 980-986
plano tangente a, 827-829
poliédricas, 1011
suaves, 982-983, 986
por tramos, 992, 1003
Sustitución
área entre curvas y, 299-302
en integrales
dobles, 889, 922-927
indefinidas y, 289-294
múltiples, 922-930
triples, 911, 915, 927-930
trigonométrica, 463-466

T

Tablas de integrales, 445, 477-478
Tamaño de la red, 483
Tan *x*
derivada de, 140
integral de, 460-461
inversa de, 414-416
Tangente(s)
a curvas de nivel, 823-824
a la gráfica de una función, 105-106
a una curva, 41-46, 758, 823-824
de curvas en el espacio, 739-745
definición ampliada de, 22
en un punto, 105-107
pendiente de, 43
valores de, 23
vertical, 114
y normales, 154
Tautocronas, 645-646
Taylor, Brook, 615
Temas de ecuaciones diferenciales de primer orden
aplicaciones de, 538-543
caída de un cuerpo, con resistencia del aire, 548
campos de dirección (campos de pendientes), 526
capacidad de sustentación, 549
ciclo límite, 554
circuitos *RL*, 536
crecimiento logístico de población, 549
curva(s)
de forma sigmoidea, 550
solución, 526
ecuación(es)
diferencial de Bernoulli, 538
diferenciales autónomas, 545, 552
lineales de primer orden, 532
equilibrios, 545, 552
factor de integración, 533
forma estándar de las ecuaciones lineales, 532
ley
de Newton sobre el enfriamiento, 547
del cambio exponencial, 539, 549
líneas y planos de fase, 545, 552
método
de Euler, 527
numérico y solución, 527
modelo
competencia-depredador, 552-554
de crecimiento exponencial de una población, 539
movimiento con resistencia proporcional a la velocidad, 538
población límite, 549
problemas
con valor inicial, 525
de mezclas, 541
puntos de reposo, 552
resistencia proporcional a la velocidad, 538
segunda ley de Newton del movimiento, 548
sistemas de ecuaciones diferenciales, 551
solución(es)
de ecuaciones de primer orden, 534
gráficas de ecuaciones diferenciales autónomas, 544-547
trayectorias ortogonales, 540
valor(es)
de equilibrio, 545, 547, 552
de estado estable, 536
velocidad límite, 549
Teorema(s)
de Clairaut, 804
de convergencia para series de potencias, 607
de De Moivre, AP-32
de divergencia
enunciado del, 1016-1018
para otras regiones, 1021-1022
para regiones especiales, 1019-1020
de estimación del residuo, 621, 623
de evaluación, 281-283
teorema fundamental, parte 2, 281-283
de Fubini, 873, 877-879
para integrales dobles, 872-874, 877-879, 889, 895
de Green, 974
área por, 979
comparación con el teorema de la divergencia, 1015, 1024
comparación con el teorema de Stokes, 1003, 1024
demostración de, para regiones especiales, 977-978
divergencia o forma normal de, 974, 1015, 1024
en el plano, 968-978
formas del, 973-975
generalización en tres dimensiones, 1024
para evaluar integrales de línea, 854-976
rotacional de circulación, o forma tangencial, 974, 976-854, 1004, 1024
y el teorema del cambio neto, 974
de integrales, para campos vectoriales, 1024-1025
de la convergencia para series de potencias, 607
de la derivada mixta, 804, AP-36
de la diferenciabilidad que implica continuidad, 114, 806
de la diferenciación término a término, 610
de la divergencia, 1016-1018
de la estimación
de series alternantes, 600, 623
del residuo, 621, 623
para series alternantes, 600, 623
de la exactitud de formas diferenciables, 965
de la fórmula de diferenciación implícita, 814
de la función
continua para sucesiones, 565
implícita, 815, 986
de la integrabilidad de funciones continuas, 268
de la integración término a término, 611-612
de la multiplicación de series de potencias, 609
de la primera derivada para valores de extremos locales, 188-189, 200-202
de la propiedad de los lazos en campos conservativos, 961
de la prueba
de la primera derivada para valores extremos locales, 188-189, 837
de la segunda derivada para extremos locales, 207, 838
de la regla
de L'Hôpital, 403, 565-566
de la cadena, 145, 809-812
de la derivada para inversas, 370
de sustitución, 29

de la sucesión no decreciente, 568
de la sustitución en integrales definidas, 296
de las derivadas mixtas, AP-36, 804
de las leyes
de exponentes para e^x, 385
de los límites, 51, 87
de las propiedades
algebraicas de logaritmo natural, 377
de funciones continuas, 78
de límites de funciones con dos variables, 791
de las sucesiones monótonas, 568-569, 581
de límites, demostraciones de, AP-19-AP-21
de los campos conservativos y campos gradiente, 960
de Pappus, 358-360
de Pitágoras, 24, 26, AP-13, AP-27
de reordenamiento para series absolutamente convergentes, 601
de Rolle, 193-194
de Stokes, 1004
campos conservativos y, 962, 1012-1013
comparación con el teorema de Green, 1002, 1003, 1004, 1024, 1025
integración en campos vectoriales, 1002-1013
para superficies con orificios, 1012
para superficies poliédricas, 1011
integral de superficie en, 1005
de Taylor, 619, 624-625
definición de, 619
demostración de, 624-625
del ángulo entre dos vectores, 706
del cambio neto, 283
enunciado del, 283
teorema de Green y, 974
del criterio
de comparación, 588-591
de convergencia absoluta, 593
de la integral, 582
de la raíz, 596
de la razón, 594
del eje paralelo, 910
del gradiente ortogonal, 848
para extremos restringidos, 848
del incremento para funciones de dos variables, 806, AP-38-AP-40
del límite, demostración del, AP-19-AP-21
del número e como límite, 387
del reordenamiento de series convergentes absolutas, 601
del rotacional de $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ relacionado con la propiedad del lazo cerrado, 1012, 1013
del sándwich, AP-21, 54-55, 71, 90, 564
demostración de, AP-21
enunciado del, 54-55
límites en el infinito, 90
límites que involucran $(\text{sen } \theta)/\theta$, 71
para sucesiones, 564
del valor
extremo, 186-187, 795, AP-24
intermedio, 81-82, 199, 219, 375, AP-24
medio, 194-195, 196-197, 199-200, 202, 377
fundamental, 278-286
de las integrales de línea, 959
del álgebra, AP-34
del cálculo, 278-286, 376, 444, 655, 939, 958, 1024-1025
Teoría
electromagnética (ley de Gauss), 1022
unificada, 1024-1025
Tercera ley de Kepler (ley de tiempo-distancia), 775
Término(s)
de error, en la fórmula de Taylor, 620
de una serie, 573
de una sucesión, 561
dominantes, 95-96
Tiempo de vuelo, 751
Toro, 989-990
área superficial de, 360
volumen de, 359
Torque, 351-352, 717
Torsión, 768-769, 771
TOSE TACO, regla, 23
Trabajo
bombeo de líquidos desde contenedores, 344-345
de una fuerza
a través de un recorrido, 711
constante, 342
en una curva en el espacio, 950-952
variable a lo largo de una curva, 950
variable a lo largo de una recta, 342-343
energía cinética y, 349
ley de Hooke para resortes, 343-344
realizado por el corazón, 175-176
Transferencia de calor, 399-400
Transformaciones
de gráficas trigonométricas, 26-27
jacobiano de, 925, 926
lineales, 923-924
Trapecio, área de, 273
Trayectoria
circular, 953
de una partícula, 739
Trazado de gráficas por computadora
de funciones, 29-34
de dos variables, 786
Triadas de Pitágoras, 571
Trompeta de Gabriel, 502

U

Unidades del SI, 342
Unión de conjuntos, AP-2

V

Valor(es)
absoluto, AP-4-AP-6, AP-30
definición de, AP-4-AP-6, AP-30
propiedades del, AP-5
de una función, 2-3, 899-900
de una integral impropia, 492-493, 496
en los extremos de una función, 76, 189
esperado, media, 508
extremos, 185-190, 836-842
de funciones, 185-190, 836-840
en los extremos, 187-188
locales (relativos), 187-189, 836, 838, 200-202
restringidos, y multiplicadores de Lagrange, 848
máximo local, 187-188, 836
mínimo local, 187-188, 836
promedio, 273-274
de funciones continuas, 255-256, 273-274
de funciones multivariables, 886-887, 899-900
Variable(s)
aleatoria, 504
de entrada, 781
de una función, 1, 781
de espesor, 327
de integración, 237, 268
de salida, 781
de una función, 781
del espesor, 327-328
dependiente, 1
de una función, 1, 781
funciones de dos, 782-783, 786, 806
derivadas parciales de, 798-800
fórmula de Taylor para, 854-858
independientes y tres intermedias, 812-813
límites para, 789-793
linealización de, 830-831, 832
regla de la cadena para, 809-811
funciones de tres, 784-786, 811-812, 824-825
funciones de varias, 781-786, 795, 802-803, 816
independiente, 1, 810, 811-812
de una función, 1, 781
intermedia, 811
muda, 268
en las integrales, 268
proporcional, 7
Varianza, 510
Vector(es)
ángulos entre, 706-708

aplicaciones de, 703-704
bidimensionales, 698, 708
  forma de componentes de, 698
binormal(es), 771
  de una curva, 767
  unitario, 767
cero, 698
componente
  i de, 701
  j de, 701
  k de, 701
coplanares, 701
de aceleración, 743, 767
de posición, 697
  estándar, para un punto, 697-698
de velocidad, 697, 743
definición de, 697
dirección de, 701
en física e ingeniería, 703-704
en forma de componentes, 697-699
en la navegación, 703
en un campo gravitacional, 946
forma de componentes de, 697-699
geometría en el espacio y, 692-738
gradiente, 821
  definición de, 821
  derivadas direccionales y, 818-825
  para curvas de nivel, 823-824
  reglas algebraicas de, 824
  rotacional de, 1012
igualdad de, 697
longitud (magnitud) de, 698, 699-700
multiplicación escalar de, 699-700
normal(es), 764-765
  de una curva, 764-765
  unitario(s), 762, 764, 771
notación de, 697
operaciones algebraicas con, 699-701
ortogonales, 708-709
paralelos, 714
perpendiculares (ortogonales), 708-709
producto
  escalar triple de, 717-718
  punto, definición de, 706
producto cruz
  como área de un paralelogramo, 715
  como determinante, 715-717
  de dos vectores en el espacio, 714-715
  definición de, 714
  en forma de componentes, 715-717
  regla de la mano derecha para, 714
proyección de, 709-711
punto
  final de, 697
  inicial de, 697
  medio de segmentos de recta, 702
resta (diferencia) de, 700
resultante, 699-700
rotacional, 1002-1003
suma de, 699-700, 707
tangente(s), 742
  a una curva, 742
  unitarios, 758-759
torque, 717
tridimensionales, 698
  forma de componentes de, 698
unitarios
  definición de, 701-702
  derivada en dirección del, 819
  escritura de vectores en términos de, 701-702
  estándar, 701
  tangente, 758-759, 771
Velocidad
  a lo largo de una curva en el espacio, 743
  angular, de rotación, 1009
  caída libre y, 130
  definición de, 128
  en coordenadas polares, 772-775
  inicial en movimiento de proyectiles, 750
  instantánea, 128
  promedio, 128
  y posición, a partir de la aceleración, 197
Ventana(s)
  de visualización, 29-32
  de graficación, 29-32
Vida media, 397-398
Volumen(es)
  de un cilindro, 313
  de un sólido con sección transversal conocida, 314
  de una pirámide, 314-315
  de una región
    en el espacio, 895
    sólida, 876-879
  integrales
    dobles como, 871-872
    triples como, 895
  por medio de
    arandelas con rotación alrededor de un eje, 319
    discos de rotación alrededor del eje x, 316
    integrales iteradas, 876-879
    rebanadas, 314-315
  usando
    casquillos cilíndricos, 324-329
    secciones transversales, 313-320
Von Koch, Helga, 581

W

Weierstrass, Karl, 499

Y

y
  coordenada, AP-10
  integración con respecto a, 301-302
  intersección con, AP-13
$y = f(x)$
  graficación de, 209-211
  longitud de, 331-333, 654-655

Créditos

Página ix, Art on File/Corbis; **página 1**, **foto de apertura del capítulo 1** , Hal Morey/Getty Images; **página 41**, **foto de apertura del capítulo 2**, Gui Jun Peng/Shutterstock; **página 105**, **foto de apertura del capítulo 3**, Yellowj/Shutterstock; **página 185**, **foto de apertura del capítulo 4** , Carlos Castilla/Shutterstock; **página 249**, **foto de apertura del capítulo 5** , Patrick Pleul/AFP/Getty Images; **página 313**, **foto de apertura del capítulo 6** , Pling/Shutterstock; **página 366**, **foto de apertura del capítulo 7** , Markus Gann/Shutterstock; **página 444**, **foto de apertura del capítulo 8** , Petr Petrovich/Shutterstock; **página 524**, **foto de apertura del capítulo 9** , Gustavo Ferrari/AP Images; **página 560**, **foto de apertura del capítulo 10**, Fotomak/Shutterstock; **página 641, foto de apertura del capítulo 11** , Kjpargeter/Shutterstock; **página 692**, **foto de apertura del capítulo 12**, Dudarev Mikhail/Shutterstock; **página 739**, **foto de apertura del capítulo 13**, Brian Cassey/EPA/Newscom; **página 781**, **foto de apertura del capítulo 14**, Alberto Loyo/Shutterstock; **página 870**, **foto de apertura del capítulo 15**, Viappy/Shutterstock; **página 938**, **foto de apertura del capítulo 16** , Szefei/Shutterstock; **página 945**, **figuras 16.6 y 16.7** , National Commitee for Fluid Mechanics, ILLUS - TRATED EXPERIMENTS IN FLUID MECHANICS: THE NCFMF BOOK OF FILM NOTES, editado por Shapiro, reimpreso con permiso de Educational De velopment Center, Inc.; **página 947**, **figura 16.15**, Inter Network Media, Inc., cortesía de NASA/JPL; **página AP-1**, **foto de apertura del apéndice**, Hal Morey/Getty Images.

Breve tabla de integrales

Formas básicas

1. $\displaystyle\int k\,dx = kx + C$ (cualquier número k)

2. $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$

5. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$

6. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$

7. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$

8. $\displaystyle\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

9. $\displaystyle\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$

10. $\displaystyle\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$

11. $\displaystyle\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$

12. $\displaystyle\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C$

13. $\displaystyle\int \cot x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$

14. $\displaystyle\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C$

15. $\displaystyle\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} + C$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C$

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$

20. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\frac{x}{a} + C \quad (x > a > 0)$

Formas que involucran $ax + b$

21. $\displaystyle\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, \quad n \neq -1$

22. $\displaystyle\int x(ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a^2}\left[\frac{ax+b}{n+2} - \frac{b}{n+1}\right] + C, \quad n \neq -1, -2$

23. $\displaystyle\int (ax+b)^{-1}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

24. $\displaystyle\int x(ax+b)^{-1}\,dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln|ax+b| + C$

25. $\displaystyle\int x(ax+b)^{-2}\,dx = \frac{1}{a^2}\left[\ln|ax+b| + \frac{b}{ax+b}\right] + C$

26. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(ax+b)} = \frac{1}{b}\ln\left|\frac{x}{ax+b}\right| + C$

27. $\displaystyle\int \left(\sqrt{ax+b}\right)^n dx = \frac{2}{a}\frac{\left(\sqrt{ax+b}\right)^{n+2}}{n+2} + C, \quad n \neq -2$

28. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}\,dx = 2\sqrt{ax+b} + b\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$

29. ***a)*** $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \left| \frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}} \right| + C$ ***b)*** $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{ax-b}} = \frac{2}{\sqrt{b}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{ax-b}{b}} + C$

30. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C$

31. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} + C$

Formas que involucran $a^2 + x^2$

32. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$

33. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$

34. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{a} + C = \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C$

35. $\displaystyle\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C$

36. $\displaystyle\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{8}(a^2+2x^2)\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C$

37. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2+x^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right| + C$

38. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2}\,dx = \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) - \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} + C$

39. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = -\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2} + C$

40. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right| + C$

41. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x} + C$

Formas que involucran $a^2 - x^2$

42. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$

43. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2-x^2)} + \frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$

44. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} + C$

45. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} + C$

46. $\displaystyle\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{8}x\sqrt{a^2-x^2}\,(a^2-2x^2) + C$

47. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2-x^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + C$

48. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx = -\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} - \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C$

49. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C$

50. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + C$

51. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x} + C$

Formas que involucran $x^2 - a^2$

52. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

53. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

54. $\displaystyle\int \left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)^n dx = \frac{x\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)^n}{n + 1} - \frac{na^2}{n + 1}\int \left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)^{n-2} dx, \quad n \neq -1$

55. $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)^n} = \frac{x\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)^{2-n}}{(2 - n)a^2} - \frac{n - 3}{(n - 2)a^2}\int \frac{dx}{\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)^{n-2}}, \quad n \neq 2$

56. $\displaystyle\int x\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)^n dx = \frac{\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)^{n+2}}{n + 2} + C, \quad n \neq -2$

57. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{8}(2x^2 - a^2)\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$

58. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C$

59. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^2} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| - \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} + C$

60. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} + C$

61. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C = \frac{1}{a}\cos^{-1}\left|\frac{a}{x}\right| + C$

62. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a^2x} + C$

Formas trigonométricas

63. $\displaystyle\int \operatorname{sen} ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$

64. $\displaystyle\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen} ax + C$

65. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 ax\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a} + C$

66. $\displaystyle\int \cos^2 ax\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a} + C$

67. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n ax\, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} ax\cos ax}{na} + \frac{n - 1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} ax\, dx$

68. $\displaystyle\int \cos^n ax\, dx = \frac{\cos^{n-1} ax\operatorname{sen} ax}{na} + \frac{n - 1}{n}\int \cos^{n-2} ax\, dx$

69. ***a)*** $\displaystyle\int \operatorname{sen} ax\cos bx\, dx = -\frac{\cos(a + b)x}{2(a + b)} - \frac{\cos(a - b)x}{2(a - b)} + C, \quad a^2 \neq b^2$

b) $\displaystyle\int \operatorname{sen} ax\operatorname{sen} bx\, dx = \frac{\operatorname{sen}(a - b)x}{2(a - b)} - \frac{\operatorname{sen}(a + b)x}{2(a + b)} + C, \quad a^2 \neq b^2$

c) $\displaystyle\int \cos ax\cos bx\, dx = \frac{\operatorname{sen}(a - b)x}{2(a - b)} + \frac{\operatorname{sen}(a + b)x}{2(a + b)} + C, \quad a^2 \neq b^2$

70. $\displaystyle\int \operatorname{sen} ax\cos ax\, dx = -\frac{\cos 2ax}{4a} + C$

71. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n ax\cos ax\, dx = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} ax}{(n + 1)a} + C, \quad n \neq -1$

72. $\displaystyle\int \frac{\cos ax}{\operatorname{sen} ax} dx = \frac{1}{a}\ln\left|\operatorname{sen} ax\right| + C$

73. $\displaystyle\int \cos^n ax\operatorname{sen} ax\, dx = -\frac{\cos^{n+1} ax}{(n + 1)a} + C, \quad n \neq -1$

74. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} ax}{\cos ax} dx = -\frac{1}{a}\ln\left|\cos ax\right| + C$

75. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n ax\cos^m ax\, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} ax\cos^{m+1} ax}{a(m + n)} + \frac{n - 1}{m + n}\int \operatorname{sen}^{n-2} ax\cos^m ax\, dx, \quad n \neq -m$ (reduce $\operatorname{sen}^n ax$)

76. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n ax\cos^m ax\, dx = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} ax\cos^{m-1} ax}{a(m + n)} + \frac{m - 1}{m + n}\int \operatorname{sen}^n ax\cos^{m-2} ax\, dx, \quad m \neq -n$ (reduce $\cos^m ax$)

77. $\displaystyle\int \frac{dx}{b + c \operatorname{sen} ax} = \frac{-2}{a\sqrt{b^2 - c^2}} \tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{b - c}{b + c}} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right)\right] + C, \quad b^2 > c^2$

78. $\displaystyle\int \frac{dx}{b + c \operatorname{sen} ax} = \frac{-1}{a\sqrt{c^2 - b^2}} \ln\left|\frac{c + b \operatorname{sen} ax + \sqrt{c^2 - b^2}\cos ax}{b + c \operatorname{sen} ax}\right| + C, \quad b^2 < c^2$

79. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} ax} = -\frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + C$

80. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} ax} = \frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) + C$

81. $\displaystyle\int \frac{dx}{b + c\cos ax} = \frac{2}{a\sqrt{b^2 - c^2}} \tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{b - c}{b + c}} \tan\frac{ax}{2}\right] + C, \quad b^2 > c^2$

82. $\displaystyle\int \frac{dx}{b + c\cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{c^2 - b^2}} \ln\left|\frac{c + b\cos ax + \sqrt{c^2 - b^2}\operatorname{sen} ax}{b + c\cos ax}\right| + C, \quad b^2 < c^2$

83. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \cos ax} = \frac{1}{a}\tan\frac{ax}{2} + C$

84. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - \cos ax} = -\frac{1}{a}\cot\frac{ax}{2} + C$

85. $\displaystyle\int x \operatorname{sen} ax\, dx = \frac{1}{a^2}\operatorname{sen} ax - \frac{x}{a}\cos ax + C$

86. $\displaystyle\int x\cos ax\, dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\operatorname{sen} ax + C$

87. $\displaystyle\int x^n \operatorname{sen} ax\, dx = -\frac{x^n}{a}\cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\, dx$

88. $\displaystyle\int x^n \cos ax\, dx = \frac{x^n}{a}\operatorname{sen} ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\operatorname{sen} ax\, dx$

89. $\displaystyle\int \tan ax\, dx = \frac{1}{a}\ln|\sec ax| + C$

90. $\displaystyle\int \cot ax\, dx = \frac{1}{a}\ln|\operatorname{sen} ax| + C$

91. $\displaystyle\int \tan^2 ax\, dx = \frac{1}{a}\tan ax - x + C$

92. $\displaystyle\int \cot^2 ax\, dx = -\frac{1}{a}\cot ax - x + C$

93. $\displaystyle\int \tan^n ax\, dx = \frac{\tan^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \tan^{n-2} ax\, dx, \quad n \neq 1$

94. $\displaystyle\int \cot^n ax\, dx = -\frac{\cot^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \cot^{n-2} ax\, dx, \quad n \neq 1$

95. $\displaystyle\int \sec ax\, dx = \frac{1}{a}\ln|\sec ax + \tan ax| + C$

96. $\displaystyle\int \csc ax\, dx = -\frac{1}{a}\ln|\csc ax + \cot ax| + C$

97. $\displaystyle\int \sec^2 ax\, dx = \frac{1}{a}\tan ax + C$

98. $\displaystyle\int \csc^2 ax\, dx = -\frac{1}{a}\cot ax + C$

99. $\displaystyle\int \sec^n ax\, dx = \frac{\sec^{n-2} ax \tan ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} ax\, dx, \quad n \neq 1$

100. $\displaystyle\int \csc^n ax\, dx = -\frac{\csc^{n-2} ax \cot ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} ax\, dx, \quad n \neq 1$

101. $\displaystyle\int \sec^n ax \tan ax\, dx = \frac{\sec^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$

102. $\displaystyle\int \csc^n ax \cot ax\, dx = -\frac{\csc^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$

Formas trigonométricas inversas

103. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^{-1} ax\, dx = x \operatorname{sen}^{-1} ax + \frac{1}{a}\sqrt{1 - a^2x^2} + C$

104. $\displaystyle\int \cos^{-1} ax\, dx = x\cos^{-1} ax - \frac{1}{a}\sqrt{1 - a^2x^2} + C$

105. $\displaystyle\int \tan^{-1} ax\, dx = x\tan^{-1} ax - \frac{1}{2a}\ln(1 + a^2x^2) + C$

106. $\displaystyle\int x^n \operatorname{sen}^{-1} ax\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{sen}^{-1} ax - \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\, dx}{\sqrt{1 - a^2x^2}}, \quad n \neq -1$

107. $\displaystyle\int x^n \cos^{-1} ax\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cos^{-1} ax + \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\, dx}{\sqrt{1 - a^2x^2}}, \quad n \neq -1$

108. $\displaystyle\int x^n \tan^{-1} ax\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\tan^{-1} ax - \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\, dx}{1 + a^2x^2}, \quad n \neq -1$

Formas exponenciales y logarítmicas

109. $\displaystyle\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\,e^{ax} + C$

110. $\displaystyle\int b^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\frac{b^{ax}}{\ln b} + C, \quad b > 0, b \neq 1$

111. $\displaystyle\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1) + C$

112. $\displaystyle\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$

113. $\displaystyle\int x^n b^{ax}\,dx = \frac{x^n b^{ax}}{a \ln b} - \frac{n}{a \ln b}\int x^{n-1}b^{ax}\,dx, \quad b > 0, b \neq 1$

114. $\displaystyle\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \operatorname{sen} bx - b \cos bx) + C$

115. $\displaystyle\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \cos bx + b \operatorname{sen} bx) + C$

116. $\displaystyle\int \ln ax\,dx = x \ln ax - x + C$

117. $\displaystyle\int x^n(\ln ax)^m\,dx = \frac{x^{n+1}(\ln ax)^m}{n+1} - \frac{m}{n+1}\int x^n(\ln ax)^{m-1}\,dx, \quad n \neq -1$

118. $\displaystyle\int x^{-1}(\ln ax)^m\,dx = \frac{(\ln ax)^{m+1}}{m+1} + C, \quad m \neq -1$

119. $\displaystyle\int \frac{dx}{x \ln ax} = \ln|\ln ax| + C$

Formas que involucran $\sqrt{2ax - x^2}$, $a > 0$

120. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x - a}{a}\right) + C$

121. $\displaystyle\int \sqrt{2ax - x^2}\,dx = \frac{x - a}{2}\sqrt{2ax - x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x - a}{a}\right) + C$

122. $\displaystyle\int \left(\sqrt{2ax - x^2}\right)^n dx = \frac{(x - a)\left(\sqrt{2ax - x^2}\right)^n}{n+1} + \frac{na^2}{n+1}\int \left(\sqrt{2ax - x^2}\right)^{n-2} dx$

123. $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(\sqrt{2ax - x^2}\right)^n} = \frac{(x - a)\left(\sqrt{2ax - x^2}\right)^{2-n}}{(n-2)a^2} + \frac{n-3}{(n-2)a^2}\int \frac{dx}{\left(\sqrt{2ax - x^2}\right)^{n-2}}$

124. $\displaystyle\int x\sqrt{2ax - x^2}\,dx = \frac{(x + a)(2x - 3a)\sqrt{2ax - x^2}}{6} + \frac{a^3}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x - a}{a}\right) + C$

125. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x}\,dx = \sqrt{2ax - x^2} + a \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x - a}{a}\right) + C$

126. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x^2}\,dx = -2\sqrt{\frac{2a - x}{x}} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x - a}{a}\right) + C$

127. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = a \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x - a}{a}\right) - \sqrt{2ax - x^2} + C$

128. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax - x^2}} = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a - x}{x}} + C$

Formas hiperbólicas

129. $\displaystyle\int \operatorname{senh} ax\,dx = \frac{1}{a}\cosh ax + C$

130. $\displaystyle\int \cosh ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{senh} ax + C$

131. $\displaystyle\int \operatorname{senh}^2 ax\,dx = \frac{\operatorname{senh} 2ax}{4a} - \frac{x}{2} + C$

132. $\displaystyle\int \cosh^2 ax\,dx = \frac{\operatorname{senh} 2ax}{4a} + \frac{x}{2} + C$

133. $\displaystyle\int \operatorname{senh}^n ax\,dx = \frac{\operatorname{senh}^{n-1} ax \cosh ax}{na} - \frac{n-1}{n}\int \operatorname{senh}^{n-2} ax\,dx, \quad n \neq 0$

134. $\displaystyle\int \cosh^n ax\,dx = \frac{\cosh^{n-1} ax \operatorname{senh} ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cosh^{n-2} ax\,dx, \quad n \neq 0$

135. $\displaystyle\int x \operatorname{senh} ax\,dx = \frac{x}{a}\cosh ax - \frac{1}{a^2}\operatorname{senh} ax + C$

136. $\displaystyle\int x \cosh ax\,dx = \frac{x}{a}\operatorname{senh} ax - \frac{1}{a^2}\cosh ax + C$

137. $\displaystyle\int x^n \operatorname{senh} ax\,dx = \frac{x^n}{a}\cosh ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cosh ax\,dx$

138. $\displaystyle\int x^n \cosh ax\,dx = \frac{x^n}{a}\operatorname{senh} ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\operatorname{senh} ax\,dx$

139. $\displaystyle\int \tanh ax\,dx = \frac{1}{a}\ln(\cosh ax) + C$

140. $\displaystyle\int \coth ax\,dx = \frac{1}{a}\ln|\operatorname{senh} ax| + C$

141. $\displaystyle\int \tanh^2 ax\,dx = x - \frac{1}{a}\tanh ax + C$

142. $\displaystyle\int \coth^2 ax\,dx = x - \frac{1}{a}\coth ax + C$

143. $\displaystyle\int \tanh^n ax\,dx = -\frac{\tanh^{n-1} ax}{(n-1)a} + \int \tanh^{n-2} ax\,dx, \quad n \neq 1$

144. $\displaystyle\int \coth^n ax\,dx = -\frac{\coth^{n-1} ax}{(n-1)a} + \int \coth^{n-2} ax\,dx, \quad n \neq 1$

145. $\displaystyle\int \operatorname{sech} ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen}^{-1}(\tanh ax) + C$

146. $\displaystyle\int \operatorname{csch} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\left|\tanh\frac{ax}{2}\right| + C$

147. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2 ax\,dx = \frac{1}{a}\tanh ax + C$

148. $\displaystyle\int \operatorname{csch}^2 ax\,dx = -\frac{1}{a}\coth ax + C$

149. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^n ax\,dx = \frac{\operatorname{sech}^{n-2} ax \tanh ax}{(n-1)a} + \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{sech}^{n-2} ax\,dx, \quad n \neq 1$

150. $\displaystyle\int \operatorname{csch}^n ax\,dx = -\frac{\operatorname{csch}^{n-2} ax \coth ax}{(n-1)a} - \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{csch}^{n-2} ax\,dx, \quad n \neq 1$

151. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^n ax \tanh ax\,dx = -\frac{\operatorname{sech}^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$

152. $\displaystyle\int \operatorname{csch}^n ax \coth ax\,dx = -\frac{\operatorname{csch}^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$

153. $\displaystyle\int e^{ax} \operatorname{senh} bx\,dx = \frac{e^{ax}}{2}\left[\frac{e^{bx}}{a+b} - \frac{e^{-bx}}{a-b}\right] + C, \quad a^2 \neq b^2$

154. $\displaystyle\int e^{ax} \cosh bx\,dx = \frac{e^{ax}}{2}\left[\frac{e^{bx}}{a+b} + \frac{e^{-bx}}{a-b}\right] + C, \quad a^2 \neq b^2$

Algunas integrales definidas

155. $\displaystyle\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx = \Gamma(n) = (n-1)!, \quad n > 0$

156. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0$

157. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot n}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{si } n \text{ es un entero par} \geq 2 \\ \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot (n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \cdots \cdot n}, & \text{si } n \text{ es un entero impar} \geq 3 \end{cases}$

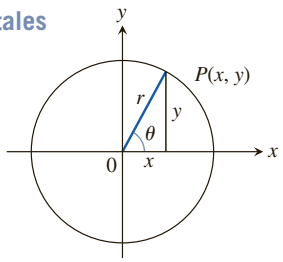
Fórmulas trigonométricas

Definiciones e identidades fundamentales

Seno: $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\csc\theta}$

Coseno: $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sec\theta}$

Tangente: $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{\cot\theta}$



Identidades

$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta, \quad \cos(-\theta) = \cos\theta$

$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta,$

$\csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta, \quad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$

$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \quad \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$

$\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen}A\cos B + \cos A\operatorname{sen}B$

$\operatorname{sen}(A - B) = \operatorname{sen}A\cos B - \cos A\operatorname{sen}B$

$\cos(A + B) = \cos A\cos B - \operatorname{sen}A\operatorname{sen}B$

$\cos(A - B) = \cos A\cos B + \operatorname{sen}A\operatorname{sen}B$

$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$

$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$

$\operatorname{sen}\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos A, \qquad \cos\left(A - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}A$

$\operatorname{sen}\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = \cos A, \qquad \cos\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}A$

$\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B = \frac{1}{2}\cos(A - B) - \frac{1}{2}\cos(A + B)$

$\cos A\cos B = \frac{1}{2}\cos(A - B) + \frac{1}{2}\cos(A + B)$

$\operatorname{sen}A\cos B = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(A - B) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(A + B)$

$\operatorname{sen}A + \operatorname{sen}B = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A + B)\cos\frac{1}{2}(A - B)$

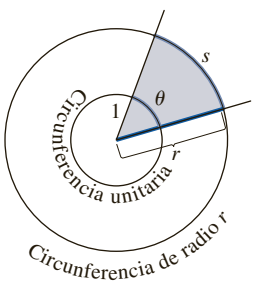
$\operatorname{sen}A - \operatorname{sen}B = 2\cos\frac{1}{2}(A + B)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A - B)$

$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{1}{2}(A + B)\cos\frac{1}{2}(A - B)$

$\cos A - \cos B = -2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A + B)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A - B)$

Funciones trigonométricas

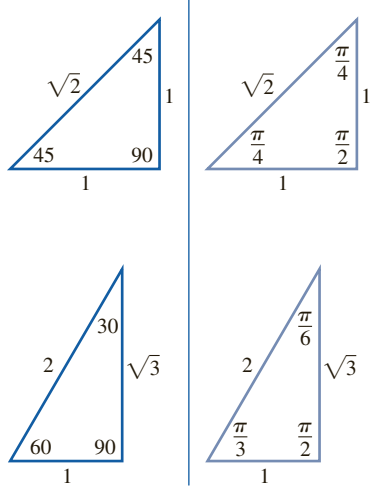
Radián como medida



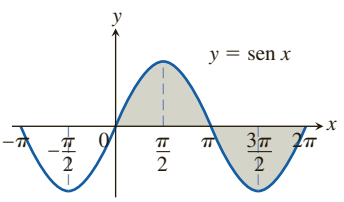
$\frac{s}{r} = \frac{\theta}{1} = \theta \quad \text{o} \quad \theta = \frac{s}{r},$

$180° = \pi$ radianes.

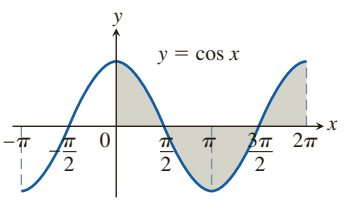
Grados	Radianes



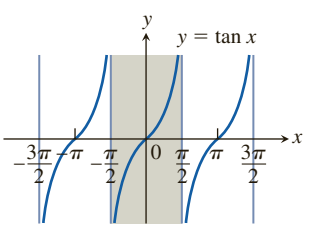
Ángulos de dos triángulos comunes, en grados y en radianes.



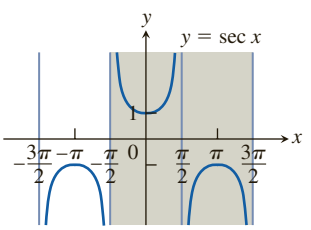
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $[-1, 1]$



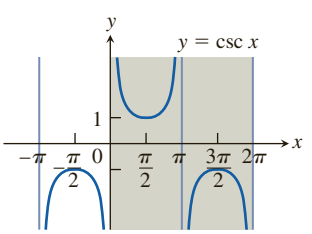
Dominio: $(-\infty, \infty)$
Rango: $[-1, 1]$



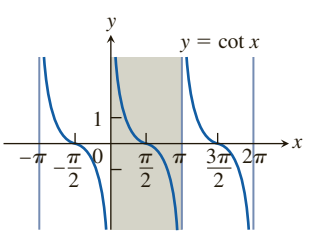
Dominio: Todos los números reales, excepto los múltiplos enteros impares $\pi/2$
Rango: $(-\infty, \infty)$



Dominio: Todos los números reales, excepto los múltiplos enteros impares $\pi/2$
Rango: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



Dominio: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Rango: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



Dominio: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Rango: $(-\infty, \infty)$

SERIES

Pruebas de convergencia para series infinitas

1. **La prueba del *n*-ésimo término:** A menos que $a_n \to 0$, la serie diverge.
2. **Serie geométrica:** $\sum ar^n$ converge si $|r| < 1$; de otra forma, diverge.
3. **Serie *p*:** $\sum 1/n^p$ converge si $p > 1$; de otra forma, diverge.
4. **Serie con términos no negativos:** Intente con el criterio de la integral, el criterio de la razón o el criterio de la raíz. Intente la comparación con una serie conocida mediante la prueba de la comparación o la prueba de comparación del límite.
5. **Serie con algunos términos negativos:** ¿La serie $\sum |a_n|$ converge? Si es así, entonces, también converge $\sum a_n$ ya que la convergencia absoluta implica convergencia.
6. **Serie alternante:** La serie $\sum a_n$ converge si la serie satisface las condiciones del criterio de la serie alternante.

Serie de Taylor

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-x)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \qquad |x| < 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \qquad |x| < \infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \qquad -1 < x \le 1$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \tanh^{-1} x = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x| < 1$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |x| \le 1$$

Serie binomial

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)x^3}{3!} + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)x^k}{k!} + \cdots$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} x^k, \qquad |x| < 1,$$

donde

$$\binom{m}{1} = m, \qquad \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2!}, \qquad \binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} \quad \text{para } k \ge 3.$$

FÓRMULAS DE OPERADORES VECTORIALES (FORMA CARTESIANA)

Fórmulas para gradiente, divergencia, rotacional y ecuación de Laplace

	Cartesianas (x, y, z) $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ son vectores unitarios en las direcciones en que aumentan x, y y z. M, N y P son las componentes escalares de $\mathbf{F}(x, y, z)$ en estas direcciones.
Gradiente	$\nabla f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$
Divergencia	$\nabla \cdot \mathbf{F} = \dfrac{\partial M}{\partial x} + \dfrac{\partial N}{\partial y} + \dfrac{\partial P}{\partial z}$
Rotacional	$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$
Ecuación de Laplace	$\nabla^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

Productos escalares triples

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$$

Teorema fundamental de las integrales de línea

Parte 1 Sea $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ un campo vectorial cuyas componentes son continuas en toda una región abierta y conexa D en el espacio. Entonces, existe una función diferenciable f tal que

$$\mathbf{F} = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

si y sólo si, para todos los puntos A y B en D, el valor de $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria que une A y B en D.

Parte 2 Si la integral es independiente de la trayectoria que une A y B, su valor es

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A).$$

Teorema de Green y su generalización en tres dimensiones

Forma tangencial del teorema de Green:
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_R \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\, dA$$

Teorema de Stokes:
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

Forma normal del teorema de Green:
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_R \nabla \cdot \mathbf{F}\, dA$$

Teorema de la divergencia:
$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$$

Identidades vectoriales

En las siguientes identidades, f y g son funciones escalares diferenciables, $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ son campos vectoriales diferenciables, y a y b son constantes reales.

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$$

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

$$\nabla \cdot (g\mathbf{F}) = g\nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla g \cdot \mathbf{F}$$

$$\nabla \times (g\mathbf{F}) = g\nabla \times \mathbf{F} + \nabla g \times \mathbf{F}$$

$$\nabla \cdot (a\mathbf{F}_1 + b\mathbf{F}_2) = a\nabla \cdot \mathbf{F}_1 + b\nabla \cdot \mathbf{F}_2$$

$$\nabla \times (a\mathbf{F}_1 + b\mathbf{F}_2) = a\nabla \times \mathbf{F}_1 + b\nabla \times \mathbf{F}_2$$

$$\nabla(\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2) = (\mathbf{F}_1 \cdot \nabla)\mathbf{F}_2 + (\mathbf{F}_2 \cdot \nabla)\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_1 \times (\nabla \times \mathbf{F}_2) + \mathbf{F}_2 \times (\nabla \times \mathbf{F}_1)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) = \mathbf{F}_2 \cdot \nabla \times \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{F}_2$$

$$\nabla \times (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) = (\mathbf{F}_2 \cdot \nabla)\mathbf{F}_1 - (\mathbf{F}_1 \cdot \nabla)\mathbf{F}_2 + (\nabla \cdot \mathbf{F}_2)\mathbf{F}_1 - (\nabla \cdot \mathbf{F}_1)\mathbf{F}_2$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$$

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \times \mathbf{F} = (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{F} - \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F})$$

LÍMITES

Leyes generales

Si L, M, c y k son números reales y

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to c} g(x) = M, \text{ entonces,}$$

Regla de la suma: $\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = L + M$

Regla de la resta: $\lim_{x\to c}(f(x) - g(x)) = L - M$

Regla del producto: $\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = L\cdot M$

Regla del múltiplo constante: $\lim_{x\to c}(k\cdot f(x)) = k\cdot L$

Regla del cociente: $\lim_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}, \quad M \neq 0$

Teorema del sándwich

Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ en un intervalo abierto que contiene a c, excepto posiblemente en $x = c$, y si

$$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L,$$

entonces, $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

Desigualdades

Si $f(x) \leq g(x)$ en un intervalo abierto que contiene a c, excepto posiblemente en $x = c$, y ambos límites existen, entonces,

$$\lim_{x\to c} f(x) \leq \lim_{x\to c} g(x).$$

Continuidad

Si g es continua en L y $\lim_{x\to c} f(x) = L$, entonces,

$$\lim_{x\to c} g(f(x)) = g(L).$$

Fórmulas específicas

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, entonces,

$$\lim_{x\to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y $Q(c) \neq 0$, entonces,

$$\lim_{x\to c}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

Si $f(x)$ es continua en $x = c$, entonces,

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$$

Regla de L'Hôpital

Si $f(a) = g(a) = 0$, tanto f' como g' existen en un intervalo abierto I que contiene a, y $g'(x) \neq 0$ en I si $x \neq a$, entonces,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

suponiendo que existe el límite en el lado derecho.

REGLAS DE DIFERENCIACIÓN

Fórmulas generales

Suponga que u y v son funciones diferenciables de x.

Constante: $\dfrac{d}{dx}(c) = 0$

Suma: $\dfrac{d}{dx}(u + v) = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$

Resta: $\dfrac{d}{dx}(u - v) = \dfrac{du}{dx} - \dfrac{dv}{dx}$

Múltiplo constante: $\dfrac{d}{dx}(cu) = c\dfrac{du}{dx}$

Producto: $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

Cociente: $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$

Potencia: $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

Regla de la cadena: $\dfrac{d}{dx}(f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

Funciones exponenciales y logarítmicas

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \qquad \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a \qquad \frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$$

Funciones trigonométricas inversas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1 + x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1 + x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\csc^{-1} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

Funciones hiperbólicas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x \qquad \frac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$\frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$$

Funciones hiperbólicas inversas

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \frac{1}{1 - x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\coth^{-1} x) = \frac{1}{1 - x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{1 + x^2}}$$

Ecuaciones paramétricas

Si $x = f(t)$ y $y = g(t)$ son diferenciables, entonces,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt}.$$

REGLAS DE INTEGRACIÓN

Fórmulas generales

Cero: $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Orden de integración: $$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Múltiplos constantes: $$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{(Cualquier número } k\text{)}$$

$$\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \qquad (k = -1)$$

Sumas y restas: $$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

Aditividad: $$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

Desigualdad máx-mín: Si máx f y mín f son los valores máximo y mínimo de f en $[a, b]$, entonces,

$$\text{mín } f \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \text{ máx } f \cdot (b - a).$$

Dominación: $$f(x) \geq g(x) \quad \text{en} \quad [a, b] \quad \text{implica} \quad \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

$$f(x) \geq 0 \quad \text{en} \quad [a, b] \quad \text{implica} \quad \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

Teorema fundamental del cálculo

Parte 1 Si f es continua en $[a, b]$, entonces, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) y su derivada es $f(x)$:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Parte 2 Si f es continua en todos los puntos de $[a, b]$, y F es cualquier antiderivada de f en $[a, b]$, entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Sustitución en integrales definidas

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Integración por partes

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

Esta nueva edición del prestigiado libro de Thomas ofrece una introducción moderna al cálculo enfocada en la comprensión integral de los elementos fundamentales de un curso tradicional, que puede ser adaptado a cualquier plan de estudios.

Los temas se desarrollan mediante explicaciones precisas y aplicaciones adaptadas al mundo dinámico y en constante evolución. Esto estimula al alumno a pensar e ir más allá de la simple memorización de fórmulas y procedimientos.

Entre lo nuevo de esta edición, que combina el pensamiento conceptual con la lógica y la estructura general del cálculo de una y varias variables, se encuentra lo siguiente.

- Gran cantidad de ejemplos y ejercicios que ayudan a una comprensión plena del cálculo en todos los niveles.
- Suficiente material de repaso con soluciones detalladas.
- Ejemplos adicionales al final de los capítulos, con énfasis en los problemas de nivel medio.
- Una sección nueva sobre probabilidad, con aplicaciones en el ámbito de las ciencias biológicas.
- Recursos adicionales al aprendizaje del cálculo que incluyen aplicaciones con el uso de tecnología.

Como complemento a este libro se recomienda el uso de MyMathLab en Español®, una plataforma que contiene ejercicios de práctica asociados al texto, así como la versión etext del libro y un sinúmero de herramientas muy útiles tanto para el profesor como para el estudiante.

Para más información sobre este libro y los recursos adicionales visite:

www.pearsonenespañol.com/thomas

ISBN 978-607-32-3336-1
90000
9 786073 233361

Visítenos en:
www.pearsonenespañol.com